Logaritmos

Definición de logaritmo

El **logaritmo** de un número, en una **base** dada, es el **exponente** al cual se debe elevar la **base** para obtener el número.

$\log_a x = y \Rightarrow a^y = x$	$a > 0$ y $a \neq 1$

Siendo **a** la **base**, **x** el **número** e **y** el **logaritmo**.

$\log_2 4 = 2$	$2^2 = 4$
$\log_2 1 = 0$	$2^0 = 1$

- **Logaritmos Decimales :**

Se llaman logaritmos decimales o vulgares a los logaritmos que tienen por base el número 10. Al ser muy habituales es frecuente no escribir la base.

$$\log_{10} x = \log x$$

- **Logaritmos Neperianos :**

Se llaman logaritmos neperianos, naturales o hiperbólicos a los logaritmos que tienen por base el número *e*.

$$\log_e x = \ln x = Lx$$

Ejemplos de cálculo de logaritmos

$\log_{\frac{1}{2}} 0.25 = y$	$\left(\frac{1}{2}\right)^y = 0.25$	$\left(\frac{1}{2}\right)^y = \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$y = 2$
$\log_{\sqrt{5}} 125 = y$	$\sqrt{5}^y = 125$	$5^{\frac{1}{2}y} = 5^3$	$y = 6$
$\log 0.001 = y$	$10^y = 0.001$	$10^y = 10^{-3}$	$y = -3$
$\ln \frac{1}{e^5} = y$	$e^y = \frac{1}{e^5}$	$e^y = e^{-5}$	$y = -5$
$\log_{\sqrt{3}} \sqrt[5]{\frac{1}{81}} = y$	$\sqrt{3}^y = \sqrt[5]{\frac{1}{81}}$	$3^{\frac{1}{2}y} = 3^{-\frac{4}{5}}$	$y = -\frac{8}{5}$

- **Características útiles :**

Si a > 1

Los números menores que 1 tienen logaritmo negativo

Los números mayores que 1 tienen logaritmo positivo

Si 0 < a < 1

Los números menores que 1 tienen logaritmo positivo

Los números mayores que 1 tienen logaritmo negativo

Propiedades de los logaritmos

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x$
- $\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$
- $\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$
- $\log_a (u^n) = n \cdot \log_a u$
- $\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_a u$

- **Cambio de Base :**

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \quad ; \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Ecuaciones Logarítmicas :

Aquella ecuación en la que la incógnita aparece sometida a la operación de logaritmación.

La igualdad de los logaritmos de dos expresiones implica la igualdad de ambas. (principio en el que se fundamenta la resolución de ecuaciones logarítmicas, también se llama "tomar antilogaritmos")

$$\log_a u = \log_a v \iff u = v$$

Frecuentemente se resuelven aplicando las propiedades de los logaritmos antes enunciadas, en orden inverso, simplificando y realizando transformaciones oportunas.

- **Ejemplos de ecuaciones logarítmicas**

$$\log 2 + \log(11 - x^2) = 2\log(5 - x)$$

$$\log\left[2(11 - x^2)\right] = \log(5 - x)^2$$

$$2(11 - x^2) = (5 - x)^2$$

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$x = 3 \qquad 11 - 3^2 > 0 \qquad 5 - 3 > 0$

$x = \frac{1}{3} \qquad 11 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 > 0 \qquad 5 - \frac{1}{3} > 0$

Sistemas de Ecuaciones Logarítmicas :

Se llaman sistemas de ecuaciones logarítmicas a los sistemas de ecuaciones en los que la/s incógnita/s está sometida a la operación logaritmo.

Se resuelven como los sistemas ordinarios pero utilizando las propiedades de los logaritmos para realizar transformaciones convenientes.