

SOLUCIONES ACTIVIDADES TRIGONOMETRÍA Y TRIÁNGULOS

Matemáticas I – 1º Bachillerato

pelliteromariano@gmail.com

1.

a) $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{2}{3}$; teniendo en cuenta que $180 < \alpha < 270$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{4}{9} + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$$
$$\Rightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{5}{9} \Rightarrow \operatorname{cos} \alpha = \sqrt{\frac{5}{9}} \Rightarrow \underline{\underline{\operatorname{cos} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}}} \quad (180 < \alpha < 270)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{-2/3}{-\sqrt{5}/3} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{5}}{5}}}$$

b) $\operatorname{tg} \beta = -2$; teniendo en cuenta que $90 < \beta < 180$

$$\frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{cos} \beta} = -2 \Rightarrow \operatorname{sen} \beta = -2 \operatorname{cos} \beta \Rightarrow (-2 \operatorname{cos} \beta)^2 + \operatorname{cos}^2 \beta = 1$$
$$\Rightarrow 4 \operatorname{cos}^2 \beta + \operatorname{cos}^2 \beta = 1 \Rightarrow 5 \operatorname{cos}^2 \beta = 1 \Rightarrow \operatorname{cos}^2 \beta = \frac{1}{5} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \operatorname{cos} \beta = \frac{-1}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\frac{-\sqrt{5}}{5}}} \quad (90 < \beta < 180)$$
$$\operatorname{sen} \beta = -2 \operatorname{cos} \beta = -2 \left(\frac{-\sqrt{5}}{5}\right) \Rightarrow \underline{\underline{\operatorname{sen} \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}}}$$

2.

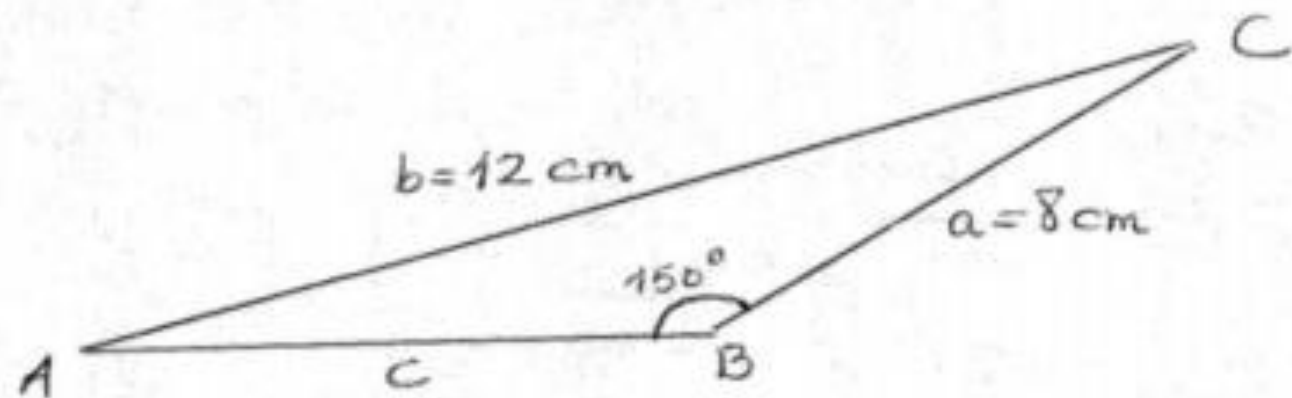
$$\text{a) } \sin 95^\circ = \sin 85^\circ = \cos 5^\circ$$

$$\text{b) } \cos 235^\circ = -\cos 55^\circ = -\sin 35^\circ$$

$$\text{c) } \operatorname{tg} 333^\circ = -\operatorname{tg} 27^\circ =$$

$$\text{d) } \sin 201^\circ = -\sin 21^\circ = -\cos 69^\circ$$

3.



$$\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{Sen } B} \Rightarrow \frac{8}{\text{Sen } A} = \frac{12}{0'5} \Rightarrow$$

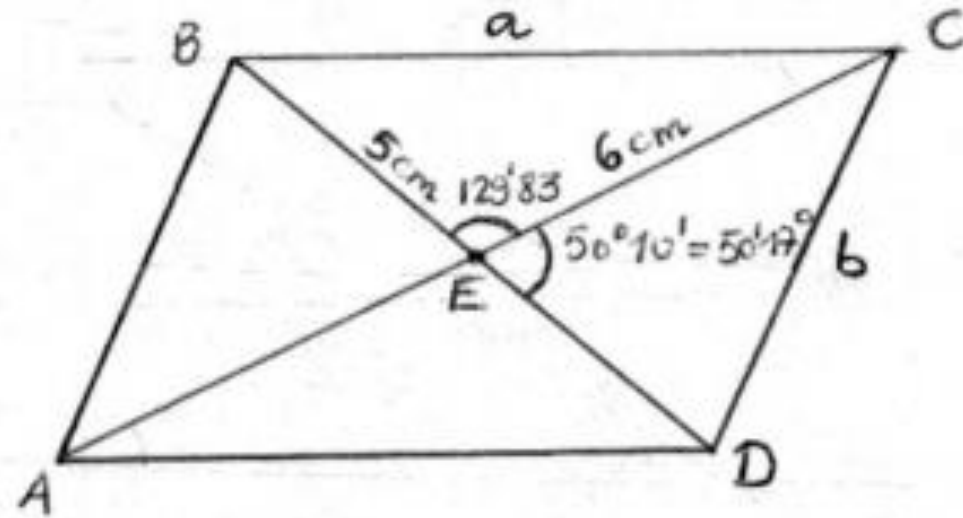
$$\Rightarrow \text{sen } A = \frac{8 \cdot 0'5}{12} = 0'33 \Rightarrow \underline{\underline{A = 19'47^\circ}}$$

$$\text{Por tanto } C = 180 - 150 - 19'47 \Rightarrow \underline{\underline{C = 10'53^\circ}}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow c^2 = 8^2 + 12^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cos 10'53$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{c = 4'39 \text{ cm}}}$$

4.



Obsérvese que
 $\overline{BE} = \overline{ED} = 2'5 \text{ cm}$
 $\overline{CE} = \overline{EA} = 3 \text{ cm}$

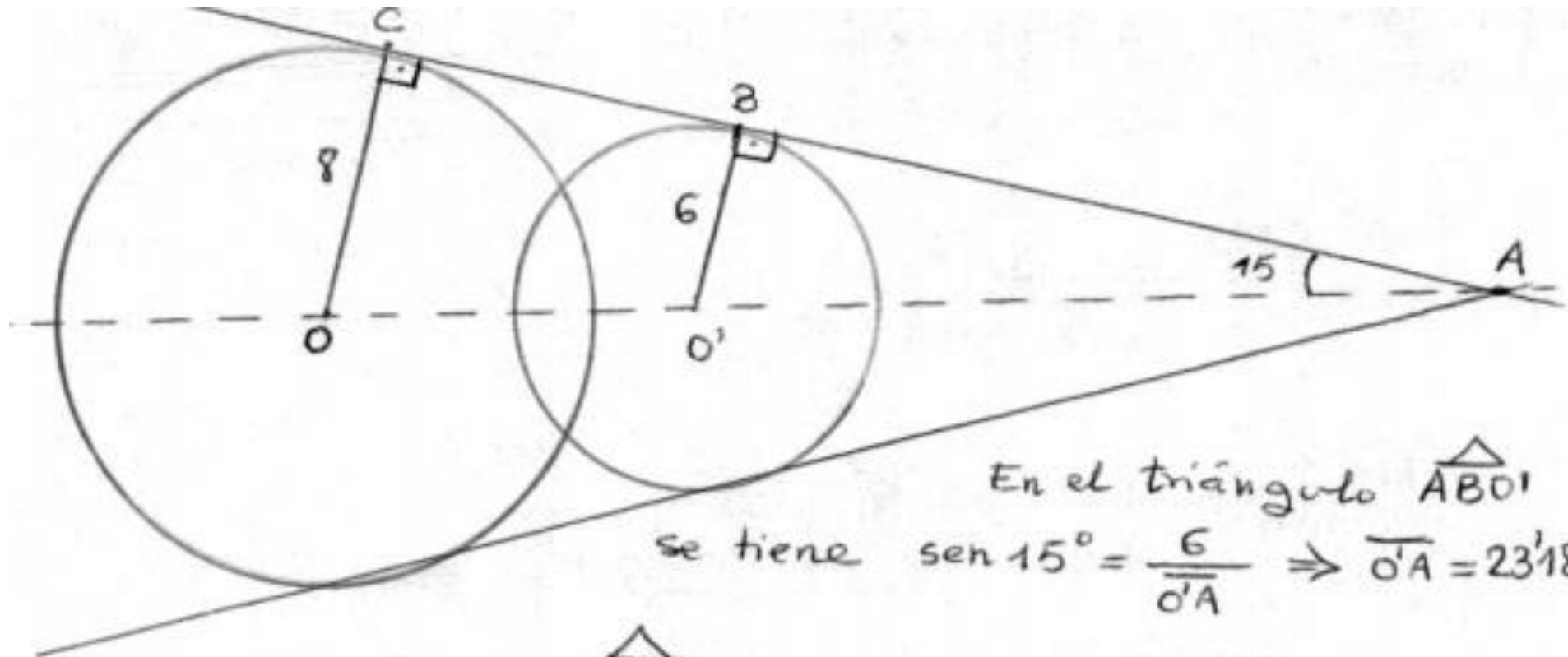
En el triángulo $\triangle CED$: $b^2 = 3^2 + 2'5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2'5 \cos 50'17^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow b^2 = 5'64 \Rightarrow b = 2'38$

En el triángulo $\triangle BEC$: $a^2 = 3^2 + 2'5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2'5 \cos 129'83 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a^2 = 24'86 \Rightarrow a = 4'99$

Por tanto el perímetro p del paralelogramo es:

$p = 2a + 2b = 2 \cdot 4'99 + 2 \cdot 2'38 = \underline{\underline{14'74 \text{ cm}}}$

5.



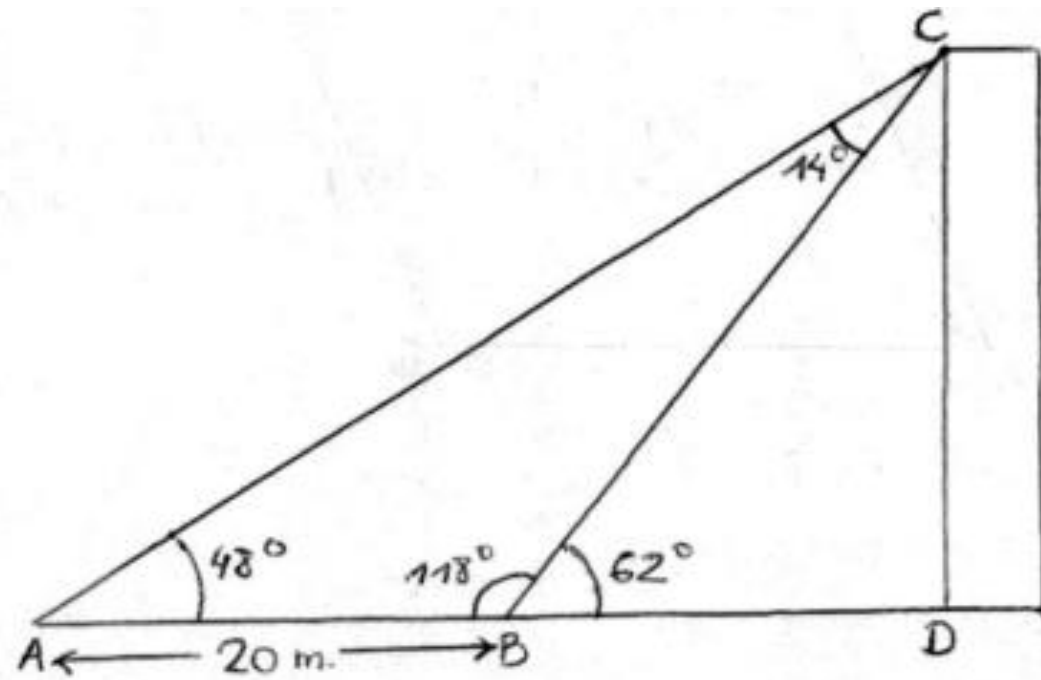
En el triángulo $\triangle ABO'$
se tiene $\text{sen } 15^\circ = \frac{6}{O'A} \Rightarrow O'A = 23'18$

En el triángulo $\triangle ACO$ tenemos $\text{sen } 15^\circ = \frac{8}{OA} \Rightarrow$
 $\Rightarrow OA = 30'91.$

Por tanto $OO' = OA - O'A = 30'91 - 23'18 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\underline{OO' = 7'73 \text{ cm}}}$

6.



En el triángulo $\triangle ABC$ $\frac{\overline{AC}}{\text{Sen } 118^\circ} = \frac{20}{\text{sen } 14^\circ} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{AC} = \frac{20 \cdot \text{sen } 118^\circ}{\text{sen } 14^\circ} \Rightarrow \overline{AC} = 72'99 \text{ m.}$

En el triángulo $\triangle ACD$ $\text{sen } 48^\circ = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{CD} = 72'99 \cdot \text{sen } 48 \Rightarrow \underline{\underline{\overline{CD} = 54'25 \text{ m.}}}$

7.

Opción 1

Teorema del coseno ($a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos \hat{A}$) $\rightarrow 100=400+c^2-40\cdot c\cdot\cos(30^\circ)$

$$c^2-20\sqrt{3}c+300=0 \rightarrow c=10\sqrt{3} \text{ (doble)}$$

Si $c=10\sqrt{3}$, apliquemos teorema del seno ($\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}}$) $\rightarrow \frac{10}{\text{sen}30} = \frac{20}{\text{sen}\hat{B}}$

$$\hat{B} = \arcsen\left(\frac{20\cdot\text{sen}(30)}{10}\right) = 90^\circ \rightarrow \hat{C} = 60^\circ$$

Opción 2

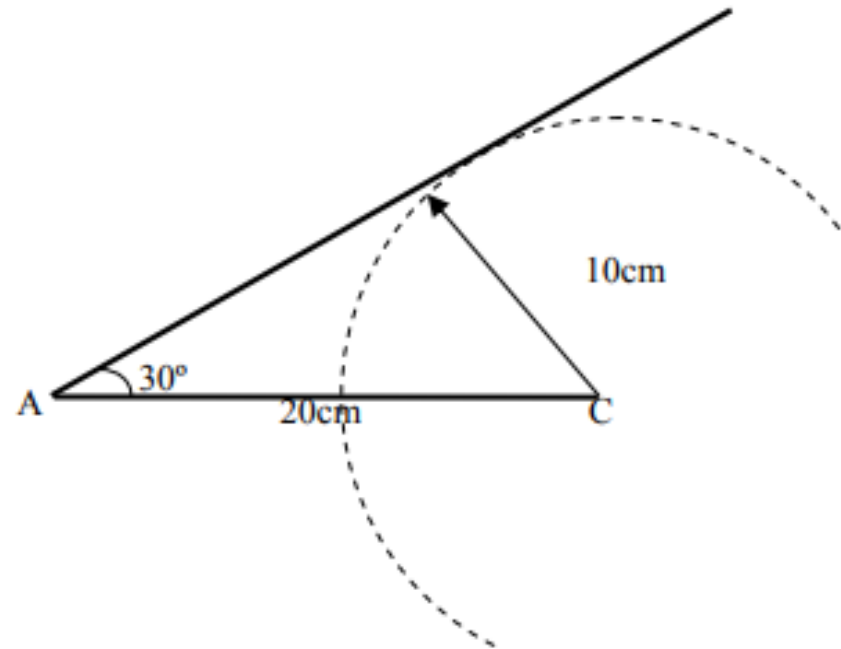
7.

Teorema del seno $\left(\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}}\right) \rightarrow \frac{10}{\text{sen}30} = \frac{20}{\text{sen}\hat{B}} \rightarrow \hat{B} = \text{arcsen}\left(\frac{20 \cdot \text{sen}30}{10}\right) = 90^\circ$

$\hat{C} = 60^\circ$.

Teorema del coseno para calcular c: $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos(\hat{C}) \rightarrow c = 10\sqrt{3}$

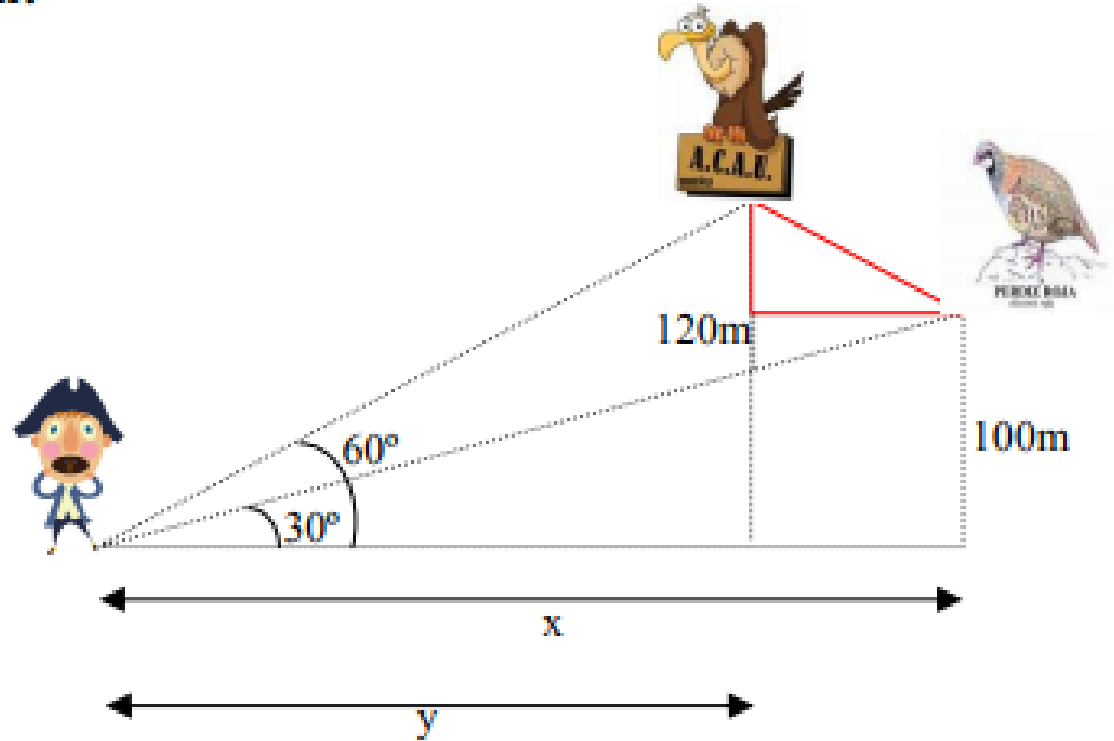
Gráficamente



Área: como es rectángulo un cateto es la base y el otro la altura $\text{area} = \frac{10 \cdot 10\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \text{ cm}^2$

Solución:

8.



Podemos calcular la distancia si conocemos los catetos del triángulo rojo. Uno de los dos catetos mide $5\text{km}-3\text{km}=2\text{km}$. El otro es $y-x$. Calculémoslo:

$$\text{tg}(30^\circ)=100/x \rightarrow x=100/\text{tg}(30^\circ)=100 \cdot \sqrt{3} \text{ m}$$

$$\text{tg}(60^\circ)=120/y \rightarrow y=120/\text{tg}(60^\circ)=40 \cdot \sqrt{3} \text{ m}$$

Así la distancia entre las dos aves definida por la hipotenusa de un triángulo con catetos de

$$20\text{m} \text{ y de } (x-y)=60 \cdot \sqrt{3} \text{ m} \rightarrow d=\sqrt{20^2 + (60\sqrt{3})^2} = 105.8 \text{ m} \rightarrow \text{se come la perdiz.}$$

9.

$$1 + \operatorname{tg}^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \rightarrow \frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \rightarrow \cos^2(\alpha) = \frac{4}{5} \rightarrow \cos(\alpha) = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{3er cuadr}} \cos(\alpha) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \rightarrow \operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

10.

a)

$$6 \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos(x) = 1 \rightarrow 6 \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \rightarrow 8 \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2$$

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4} \rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} 60^\circ + 360^\circ k \\ 300^\circ + 360^\circ k \\ 120^\circ + 360^\circ k \\ 240^\circ + 360^\circ k \end{cases} \rightarrow x = \begin{cases} 120^\circ + 720k \\ 600^\circ + 720^\circ k \\ 240^\circ + 720^\circ k \\ 480^\circ + 720k \end{cases} \rightarrow x = \begin{cases} 120^\circ + 720k \\ 240^\circ + 720k \end{cases}$$

b)

$$\operatorname{sen}(x) + \cos(x) = \sqrt{2} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{sen}(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(x) = 1 \rightarrow \cos(45) \cdot \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(45) \cdot \cos(x) = 1$$
$$\rightarrow \operatorname{sen}(x + 45^\circ) = 1 \rightarrow x + 45^\circ = 90^\circ \rightarrow x = 45^\circ + 360k$$

10.

$$\mathbf{c)} \quad x = \pi - y \rightarrow \text{sen}(\pi - y) + \text{sen}(y) = 1 \rightarrow \text{sen}(y) + \text{sen}(y) = 1 \rightarrow \text{sen}(y) = 1/2 \rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 60^\circ + 360^\circ k = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} - 2\pi k \\ y = 120^\circ + 360^\circ k = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \rightarrow x = \frac{\pi}{3} - 2\pi k \end{cases}$$

$$\mathbf{d)} \quad \begin{cases} \text{sen}(x) + \text{sen}(y) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \\ \text{sen}(x) - \text{sen}(y) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X + Y = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \\ X - Y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = \begin{cases} 60^\circ + 360^\circ k \\ 120^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ Y = \frac{1}{2} \rightarrow y = \begin{cases} 30^\circ + 360^\circ k \\ 150^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases}$$

11.

a)

$$\begin{aligned}\cos(x + (y + z)) &= \cos(x) \cdot \cos(y + z) - \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(y + z) = \cos(x) \cdot (\cos(y) \cdot \cos(z) - \text{sen}(y) \cdot \text{sen}(z)) - \\ &- \text{sen}(x) \cdot (\text{sen}(y) \cdot \cos(z) + \cos(y) \cdot \text{sen}(z)) = \\ &= \cos(x) \cos(y) \cos(z) - \cos(x) \text{sen}(y) \text{sen}(z) - \text{sen}(x) \text{sen}(y) \cos(z) - \text{sen}(x) \cos(y) \text{sen}(z)\end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{\text{sen}^2(2a)}{(1 - \cos^2 a) \cdot \cos(a)} = \frac{(2 \cdot \text{sen}(a) \cdot \cos(a))^2}{\text{sen}^2 a \cdot \cos(a)} = \frac{4 \text{sen}^2(a) \cdot \cos^2(a)}{\text{sen}^2(a) \cdot \cos(a)} = 4 \cdot \cos(a)$$

12. a) $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$

$$\cos^2 x - \sin^2 x - 3\cos x + 2 = 0 \rightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - 3\cos x + 2 = 0$$

$$\rightarrow \cos^2 x - 1 + \cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$$

$$\rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$$

Hacemos un cambio de variable: $z = \cos x$

$$2z^2 - 3z + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{4} \end{cases} = \frac{1}{2}$$

Deshacemos el cambio:

$$\text{Si } z=1 \rightarrow \cos x = 1 \rightarrow x = 0^\circ + 360^\circ k \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Si } z = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \begin{cases} 60^\circ + 360^\circ k \\ 300^\circ + 360^\circ k \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

12.

$$b) \cos x \cdot \operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = 0$$

$$\cos x \cdot 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow 2\operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x - \operatorname{sen} x = 0$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} x \cdot (2\cos^2 x - 1) = 0$$

Tenemos una ecuación factorizada con las siguientes soluciones:

$$\operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = 0^\circ + 360^\circ k \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$2\cos^2 x - 1 = 0 \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{si } \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad x = \begin{cases} 45^\circ + 360^\circ k \\ 315^\circ + 360^\circ k \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{si } \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad x = \begin{cases} 135^\circ + 360^\circ k \\ 225^\circ + 360^\circ k \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

13.

En primer lugar calculo las restantes razones trigonométricas de 50° :

$$\cos^2 50^\circ + \operatorname{sen}^2 50^\circ = 1 \rightarrow \cos^2 50^\circ = 1 - \operatorname{sen}^2 50^\circ \rightarrow \cos^2 50^\circ = 1 - 0,77^2$$

$\rightarrow \cos 50^\circ = 0,64$ redondeando a dos decimales.

Relacionamos los siguientes ángulos con el ángulo 50° del primer cuadrante.

13.

$$a) \cos 130^\circ = \cos(180^\circ - 50^\circ) = -\cos 50^\circ = -0,64$$

$$b) \operatorname{tg} 310^\circ = -\operatorname{tg} 50^\circ = -\frac{\operatorname{sen} 50^\circ}{\cos 50^\circ} = -\frac{0,77}{0,64} = -1,20$$

$$c) \operatorname{sen} 230^\circ = \operatorname{sen}(180^\circ + 50^\circ) = -\operatorname{sen} 50^\circ = -0,77$$

El siguiente lo relacionamos con el ángulo doble:

$$d) \operatorname{tg} 100^\circ = \frac{\operatorname{sen} 100^\circ}{\cos 100^\circ} = \frac{2\operatorname{sen}50^\circ \cos 50^\circ}{\cos^2 50^\circ - \operatorname{sen}^2 50^\circ} = \frac{2 \cdot 0,77 \cdot 0,64}{0,64^2 - 0,77^2} = -5,38$$

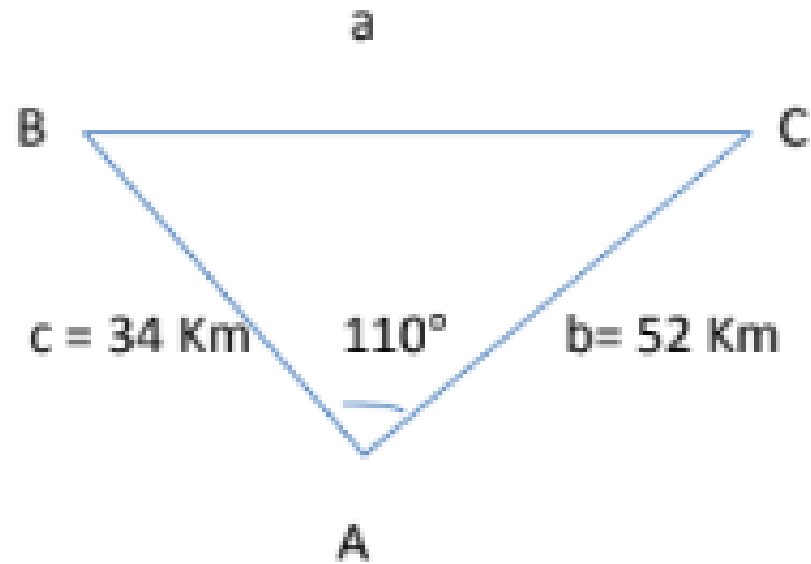
El siguiente con el ángulo mitad:

$$e) \cos 25^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 50^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0,64}{2}} = 0,91$$

Y el siguiente con un ángulo famoso:

$$\begin{aligned} f) \operatorname{sen} 80^\circ &= \operatorname{sen}(50^\circ + 30^\circ) = \operatorname{sen}50^\circ \cos 30^\circ + \cos 50^\circ \operatorname{sen} 30^\circ = 0,77 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,64 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 0,99 \end{aligned}$$

14.



Utilizo el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \rightarrow a^2 = 52^2 + 34^2 - 2 \cdot 52 \cdot 34 \cdot \cos 110^\circ \rightarrow a = 71,20 \text{ Km}$$

Se encuentran a 71,20 Km.

15.

$$\frac{(\operatorname{sen}x + \operatorname{cos}x) \cdot \operatorname{cos}2x}{(\operatorname{cos}x - \operatorname{sen}x)} = 1 + \operatorname{sen}2x$$

Voy a partir de la primera expresión y llegar a la segunda:

$$\begin{aligned} \frac{(\operatorname{sen}x + \operatorname{cos}x) \cdot \operatorname{cos}2x}{(\operatorname{cos}x - \operatorname{sen}x)} &= \frac{(\operatorname{sen}x + \operatorname{cos}x)(\operatorname{cos}^2x - \operatorname{sen}^2x)}{(\operatorname{cos}x - \operatorname{sen}x)} \\ &= \frac{(\operatorname{sen}x + \operatorname{cos}x) \cdot (\operatorname{cos}x - \operatorname{sen}x) \cdot (\operatorname{cos}x + \operatorname{sen}x)}{(\operatorname{cos}x - \operatorname{sen}x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (\operatorname{sen}x + \operatorname{cos}x) \cdot (\operatorname{cos}x + \operatorname{sen}x) = (\operatorname{sen}x + \operatorname{cos}x)^2 = \operatorname{sen}^2x + \operatorname{cos}^2x + 2\operatorname{sen}x \cdot \operatorname{cos}x \\ &= 1 + 2\operatorname{cos}x \cdot \operatorname{sen}x = 1 + \operatorname{sen}2x \end{aligned}$$

Con lo que queda demostrado.

16.

Llamo h a la altura del mástil:

Planteo las siguientes ecuaciones: $a + b = 10$

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{h}{a} \text{ y } \text{sen } 35^\circ = \frac{h}{b}$$

$$\begin{cases} a + b = 10 \\ h = a \cdot \text{sen } 60^\circ \rightarrow a \cdot \text{sen } 60^\circ = b \text{sen}35^\circ \rightarrow a \cdot \text{sen } 60^\circ = (10 - a)\text{sen } 35^\circ \rightarrow \\ h = b \cdot \text{sen } 35^\circ \end{cases}$$

$$a \cdot \text{sen } 60^\circ = 10 \cdot \text{sen } 35^\circ - a \cdot \text{sen}35^\circ \rightarrow a \cdot \text{sen } 60^\circ + a \cdot \text{sen } 35^\circ = 10 \cdot \text{sen } 35^\circ$$

$$\rightarrow a(\text{sen}60^\circ + \text{sen}35^\circ) = 10 \cdot \text{sen}35^\circ \rightarrow a = \frac{10 \cdot \text{sen}35^\circ}{\text{sen}60^\circ + \text{sen}35^\circ}$$

$$= 3,98 \text{ m}$$

$$\text{Calculo } h = a \cdot \text{sen}60^\circ = 3,98 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3,45 \text{ m}$$

16.

Calculamos la distancia entre A y B. Utilizo el teorema del seno:

$$\frac{AB}{\text{sen } 85^\circ} = \frac{3,98}{\text{sen } 35^\circ} \rightarrow AB = 6,91 \text{ m}$$

La altura del mástil es de 3,45 m y la distancia entre A y B 6,91 m.

Voy a calcular las restantes razones trigonométricas:

17.

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \frac{4}{9} + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{5}{9} \rightarrow$$

$$\operatorname{cos} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3} \text{ negativo porque es del } 2^\circ \text{ o } 3^\circ \text{ cuadrante.}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{-2}{\sqrt{5}}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Calcular:

$$\text{a) } \operatorname{cos} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = \operatorname{cos} \frac{3\pi}{2} \cdot \operatorname{cos} \alpha - \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \cdot \operatorname{sen} \alpha = 0 \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{3} \right) - (-1) \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{b) } \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \pi - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \pi \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{0 + \frac{2}{\sqrt{5}}}{1 + 0 \cdot \left(\frac{-2}{\sqrt{5}} \right)} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

18.

Utilizamos el teorema del seno:

$$\frac{x}{\text{sen } 140^\circ} = \frac{100}{\text{sen } 15^\circ} \rightarrow x = 100 \cdot \frac{\text{sen } 140^\circ}{\text{sen } 15^\circ} = 248,35 \text{ cm}$$

$$\frac{y}{\text{sen } 25^\circ} = \frac{100}{\text{sen } 15^\circ} \rightarrow y = 100 \cdot \frac{\text{sen } 25^\circ}{\text{sen } 15^\circ} = 163,28 \text{ cm}$$

Sara se encuentra a 248,35 cm del castillo y Manolo a 163,28 cm