

Números Aleatorios

A atracción que moitas persoas senten polos xogos de azar non é cousa da sociedade actual, xa en antigas civilizacións foron moi populares este tipo de xogos. Os romanos tiñan paixón polos dados, aos que denominaban *álea*, e desta palabra latina procede o noso termo actual *aleatorio* que utilizamos para referirnos a algo que depende ou é produto da casualidade.

Se forzamos un pouco o significado da palabra, podemos dicir que os seres humanos vivimos nun medio aleatorio e mesmo os nosos comportamentos son moitas veces impredecibles.

Un **número aleatorio** é aquel que foi xerado ao azar, no proceso de xeración dun número aleatorio non poden influír os resultados obtidos con anterioridade.

Son moitas as situacións da vida cotiá nas que aparecen ou necesitamos utilizar **números aleatorios**: nos mencionados xogos de azar, nos deseños de animacións por ordenador, en tests de control de calidade, para realizar auditorías contables...

Para resolver moitos problemas de estatística, de teoría de probabilidades ou, en xeral, cando se queren construír modelos matemáticos que requiran resultados impredecibles empréganse **números aleatorios**. Velaquí tres exemplos nos que mostramos como obter **números aleatorios**:

Supoñamos que necesitamos simular cal será o sexo dos dez primeiros bebés que nacerán a partir do día 1 do mes que vén no *Hospital Teresa Herrera Materno Infantil da Coruña*. Poderíamos xerar unha lista de dez díxitos formada por ceros e uns, acordando previamente que 0 represente a unha nena e 1 a un neno. Iso foi o que fixemos, lanzando unha moeda e anotando 1 cada vez que saíu cara e 0 cando o resultado foi cruz. Obtivemos a seguinte secuencia:

1 1 0 0 0 0 1 0 1 0



Vexamos agora como obtivemos dez números menores que 300. Para logralo utilizamos tres *botes dispensadores de bólas numeradas*. No primeiro bote (o das centenas) depositamos bólas numeradas con 0, 1 e 2; o segundo bote (o das decenas) e o terceiro (o das unidades) contiñan dez bólas cada un, numeradas do 0 ao 9. Deste xeito foi como conseguimos os seguintes dez números que se mostran aquí despois de que os ordenáramos:

003 – 067 – 107 – 121 – 154 – 166 – 229 – 230 – 240 – 247

A túa calculadora científica tamén che permite obter **números aleatorios**. Pulsando a tecla que activa a función **Ran#** obterás un número comprendido entre 0.000 e 0.999 (ambos incluídos).

Utilizando a función **Ran#** tamén podes “fabricar” números aleatorios enteiros. Por exemplo: como procederemos para simular o lanzamento dun dado cúbico? Será suficiente con mirar na pantalla o resultado da expresión $6 \cdot \text{Ran\#} + 1$ e tomar unicamente a parte



enteira dese resultado (desprezar os decimais que van despois do punto decimal, no seguinte artigo falamos da función $f(x) = \text{Ent}(x)$). Un matemático dirá que temos que ver cal é o resultado de:

$$\text{Ent}(6 \cdot \text{Ran\#} + 1)$$

Unha **táboa de números aleatorio** está formada por filas e columnas que conteñen as dez cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 coa propiedade de que a probabilidade de que apareza un deses díxitos en calquera punto da táboa é a mesma que a probabilidade de que apareza calquera outro. Ademais, se percorremos a táboa por filas, columnas ou diagonais e lemos os díxitos agrupándoos de dous en dous, de tres en tres, de catro en catro... unha determinada agrupación de cifras ten a mesma probabilidade de obterse que calquera outra posible agrupación que conteña o mesmo número de díxitos

Na actualidade as **táboas de números aleatorios** elabóranse mediante métodos informáticos pero tamén se poden aproveitar situacións reais para construílas, por exemplo: a lista dos números da Lotería Nacional.

07318	82387	48582	31495
76722	67209	43440	22962
67575	61200	50903	59892
39145	39420	62705	37169
29948	22454	15135	16721
68192	01120	54994	68730
47294	25057	83630	77451
91068	24417	32803	57250
95179	97557	91397	54896
69886	52996	24078	55751

As **táboas de números aleatorios** utilízanse frecuentemente en estatística para elixir mostras dos individuos dunha determinada poboación; nós usámolas con ese obxectivo, tal como indicamos a continuación.

Unha das investigacións, entre as que estamos desenvolvendo, trata do *índice de masa corporal (IMC)*. Por este motivo, pretendemos saber como anda o *IMC* do alumnado do noso instituto.

Para determinar o *IMC* dunha persoa necesitamos coñecer cal é o seu peso e a súa estatura. Como non resulta operativo medir e pesar a todas as alumnas e alumnos do centro (que sería a **poboación** obxecto do estudo), decidimos elixir unha **mostra** (*subconxunto da*

poboación) formada por sesenta estudantes (*tamaño da mostra*, $n = 60$). Realizamos unha **mostraxe aleatoria simple**, como describimos a seguir.

No momento de iniciar a *selección da mostra* o número de estudantes matriculados no **IES Ramón Otero Pedrayo** era de 264. Confeccionamos unha lista con todos e a cada un asignámoslle un número do 1 ao 264.

A continuación procuramos unha **táboa de números aleatorios** que, nesta ocasión, tiña 40 filas e 50 columnas. Utilizando a tecla **RND#** da calculadora fixamos sobre a táboa o punto de partida para comezar a determinar que **individuos** formarían a mostra. Obtivemos:

$$\text{Número de fila} = \text{Ent}(40 \cdot \text{Ran\#} + 1) = 22$$

$$\text{Número de columna} = \text{Ent}(50 \cdot \text{Ran\#} + 1) = 24$$

O díxito de partida foi, pois, o que se atopaba na fila 22 e na columna 24. En que sentido percorreriámos a táboa? Acordamos buscar un número entre 1 e 4 e asignamos os seguintes sentidos: 1, cara á dereita; 2, cara arriba; 3, cara á esquerda e 4, cara abaixo. Obtivemos $\text{Ent}(4 \cdot \text{Ran\#} + 1) = 2$, polo que o percorrido comezou cara arriba ata rematar a columna 24, logo proseguimos na 25 de abaixo para arriba...

No noso percorrido iamos agrupando as cifras de tres en tres. Por que de 3 en 3?: para que calquera resultado entre 000 e 999 tivese a mesma posibilidade de ser elixido. Ademais, para o noso caso unicamente anotaremos os valores comprendidos entre 001 e 264, velaquí como comezou a selección:

441 – 432 – 570 – 882 – 463 – 946 – 418 – **015** – **120** – **099** – 782 – 406 – **130** – 508 – **211** – 421...

Como podedes supoñer, non todos os números obtidos son válidos para formar parte da mostra; se un número é maior que 264 ou é 000, temos que pasar ao seguinte e así hasta que obtivemos 60.

Pois ben, nós xa rematamos o listado cos 60 nomes que forman a mostra, xa vos contaremos as conclusións, se somos quen de rematar o traballo que nos propuxemos.

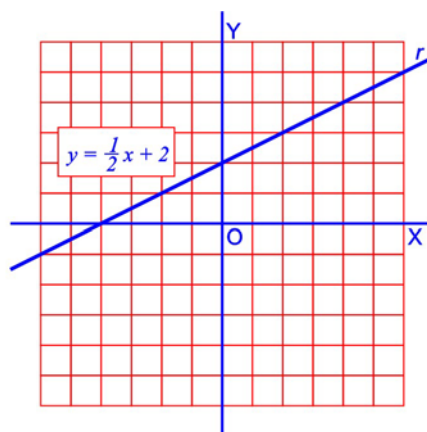
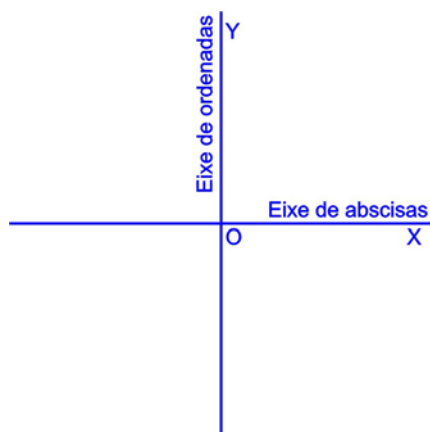


Mario Guerra Castelo
3º ESO A

FUNCIÓNS

Mesmo os máis novos do instituto, as alumnas e alumnos de primeiro de ESO, tedes debuxado algunha vez un **sistema de coordenadas rectangulares cartesianas**. Quen non escoitou falar do **eixe de abscisas** (“o dos equis”) ou do **eixe de ordenadas** (“o dos is”)?

Os de primeiro quedades avisados (logo non digades que ninguén vos advertiu!), un día calquera chegará á aula a vosa profesora ou profesor de matemáticas e soltará: “–Hoxe imos comezar a falar de **funcións**”.



$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

x	y
-6	-1
-5	-1/2
-4	0
-1	3/2
0	2
1	5/2
2	3
5	9/2
6	5

Nas figuras anteriores podemos observar tres elementos que están fortemente relacionados (unha **fórmula**, unha **táboa numérica** e unha **gráfica**), de feito son tres maneiras diferentes de referirnos ao mesmo concepto matemático.

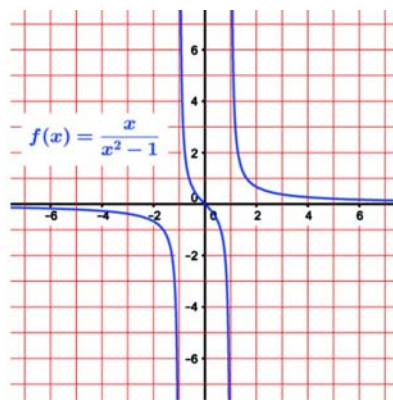
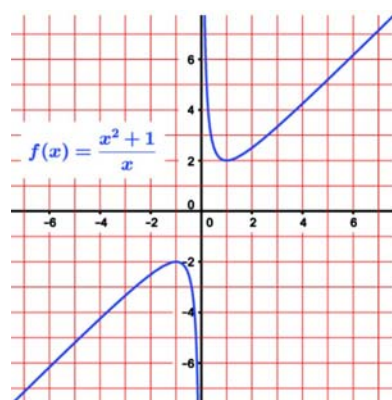
Na fórmula interveñen dous elementos **variables** que representamos con x e y . Se no lugar do x imos colocando valores diferentes, ao facermos as contas indicadas, obtemos os resultados que lle corresponden ao y . Por este feito ao x chamáremoslle **variable independente** e ao y **variable dependente**.

Se expresásemos **verbalmente** a **relación** que se mostra no gráfico anterior, diríamos: “tomado un valor para x , o valor correspondente do y obtense sumándolle dúas unidades á metade do valor de x ”. A táboa resume este mesmo **enunciado** para nove valores **enteiros** de x (xunto cos resultados obtidos para y), sen embargo, x pode tomar calquera outro valor **real**. Fixádevos que os **puntos** que forman a **recta r** se corresponden con todos os **pares ordenados** (x, y) que poden aparecer na **táboa** e que se obterán a partir da **fórmula**.

Unha **relación** deste tipo entre dúas variables, chámase **función**. De maneira xenérica, para referirnos a unha **función** utilizaremos a seguinte notación $y = f(x)$ co que queremos dicir: “cada valor da variable y (variable dependente) obtense facendo as contas nunha fórmula en x (variable independente), substituíndo o x por todos os valores que se poida”.

Deste modo, para o noso exemplo anterior, $f(-5) = -1/2$ (que se le “a imaxe de -5 é -1/2”) ou $f(1) = 5/2$ (“a imaxe de 1 é 5/2”). Neste caso podemos calcular a **imaxe** de **calquera número real** que substituíamos na fórmula (**todo número real ten unha imaxe**) por iso diremos que **o dominio da función é $\mathbb{R}$** , e escribiremos así: **$Dom(f) = \mathbb{R}$** .

Ademais, a gráfica da función é **continua e crecente**.



Existen moitas funcións para as que ocorre que non sempre se poden obter imaxes de todos os **números reais**. Comproba que no caso da primeira destas funcións que aparecen á esquerda non se pode obter imaxe para o cero ($f(0)$ non existe) e, no caso da segunda, non se

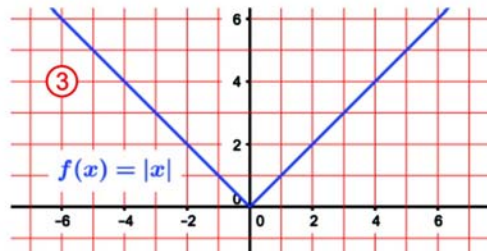
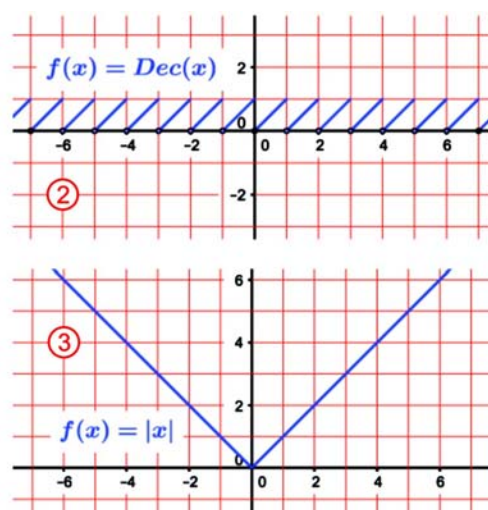
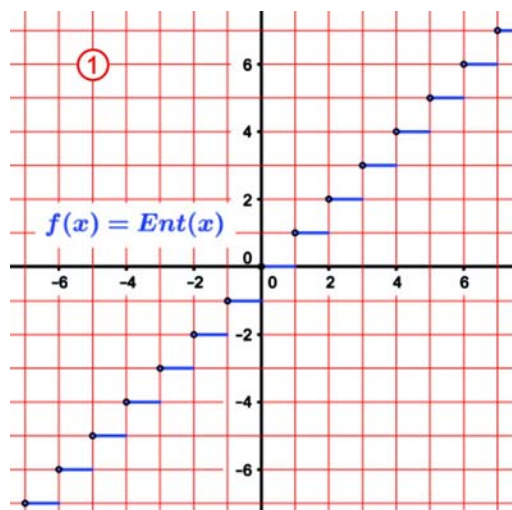
poden calcular $f(-1)$ nin $f(1)$. Polo tanto $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ e $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, respectivamente, ademais **non son continuas**. Ambas funcións son **simétricas respecto á orixe de coordenadas**.

Á hora de estudar o **crecemento** e **decrecemento** de funcións, é habitual facer un resume utilizando unha táboa coma a da dereita. Trata de comprender o que se di nesta

Intervalo	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$y=f(x)$ é	crecente	máximo	decrecente	decrecente	mínimo	crecente

táboa, que corresponde á función $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$. Fai ti outra táboa similar para $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.

Imos reparar agora en tres funcións moi coñecidas en matemáticas: as funcións **parte enteira**, **parte decimal** e **valor absoluto** (que son estas que están a seguir numeradas con 1, 2 e 3, respectivamente).

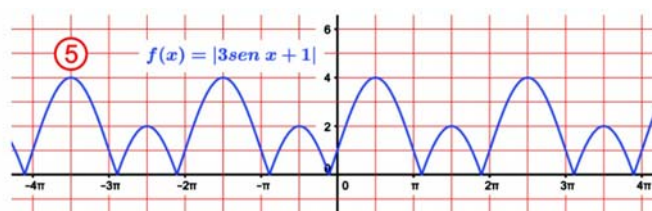
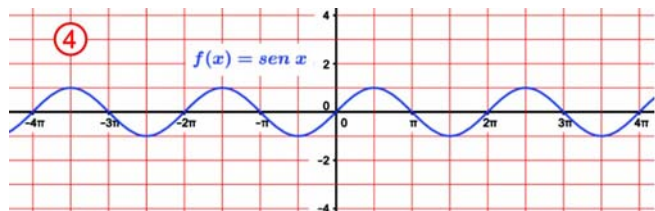


A función **parte enteira**, $f(x) = \text{Ent}(x)$ ou tamén $f(x) = [x]$, faille corresponder a cada número real o maior número enteiro que sexa **menor ou igual** ca el. Por exemplo: $f(0,11) = 0$, $f(2) = 2$, $f(3,245) = 3$, $f(6,9) = 6$, ... e **atención!**: $f(-1,23) = -2$, $f(-2) = -2$, $f(-3,999) = -4$.

Estamos, pois, diante dunha gráfica **escalonada** (**constante a anacos**) que existe en todos os números reais ($\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$), sendo a función **descontinua** en todos os números enteiros e **crecente** no seu **dominio de definición**.

A función **parte decimal** (tamén chamada **función mantisa**), $f(x) = \text{Dec}(x)$ ou $f(x) = \text{Mant}(x)$, defínese da seguinte maneira $\text{Dec}(x) = x - \text{Ent}(x)$. Polo tanto $f(0,8) = 0,8$, $f(2,35) = 0,35$, $f(3) = 0$, $f(5,893) = 0,893$, ... pero **ollo!**: $f(-0,8) = 0,2$, $f(-2,35) = 0,65$, $f(-3) = 0$, $f(-5,893) = 0,107$. Esta función é **periódica de período 1**, pois a gráfica **repítese** en cada intervalo do eixe OX que teña de medida unha unidade.

Deixaremos a función **valor absoluto** para que ti investigues. Como “funciona” esta **función**? Cal é o seu **dominio**? É **continua**? Onde **crece**? Onde **decrece**? Ten **máximos** ou **mínimos**?



Para rematar, mostramos outros dous exemplos de **funcións periódicas**. Estas dúas gráficas pertencen a unha familia denominada **funcións trigonométricas**. A gráfica número 4 corresponde á **función seno**, $f(x) = \text{sen } x$. É unha función continua de **período 2π** . Estuda os **intervalos de crecemento e decrecemento** e os seus **máximos e mínimos**. A gráfica 5 obtense facendo transformacións sobre a función $f(x) = \text{sen } x$. Se utilizas **Geogebra** poderás estudar moitas propiedades destas e doutras funcións.



Laura Rodríguez Ferreras
4º ESO A