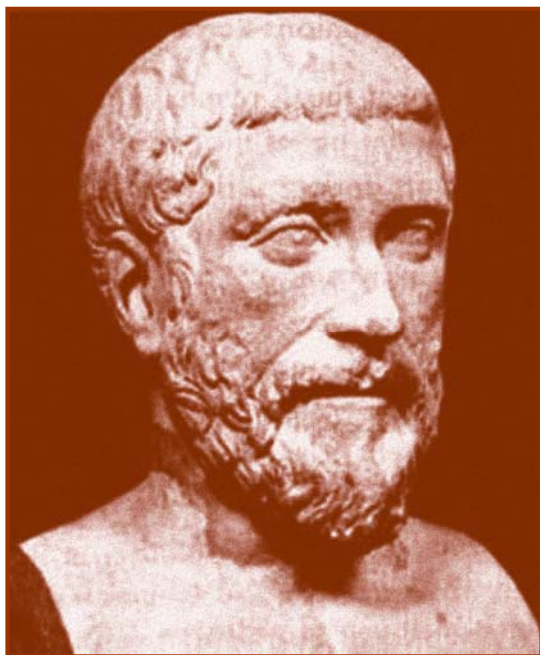


Pitágoras de Samos

(Samos, 569 a.C. - ¿Crotona, Metaponto? 475 a.C.)



Na súa xuventude viaxou a Exipto e Babilonia. Tras regresar a Samos fundou unha especie de seita que se coñece como *Escola* ou *Irmandade Pitagórica*.

Fuxindo da tiranía de Polícrates, marchou para Crotona arredor do 525 a.C. Debido á considerable popularidade e poder que a irmandade foi adquirindo en Crotona a sede da escola foi incendiada e os seus membros tiveron que fuxir.

Os bens aportados polos membros da irmandade considerábanse comúns e todos os descubrimentos eran atribuídos a Pitágoras. A filosofía pitagórica establecía que o número é a esencia de todas as cousas. O seu lema era: *Todo é número*.

Os pitagóricos acuñaron o termo *matemática* coa significación de “*o que se aprende*”. As súas investigacións e achegas teñen que ver cos seguintes campos:

O establecemento da existencia dos cinco poliedros regulares.

A determinación de familias notables dentro do conxunto dos números naturais: pares, impares, perfectos, figurados.... Xunto coa súas significacións filosóficas.

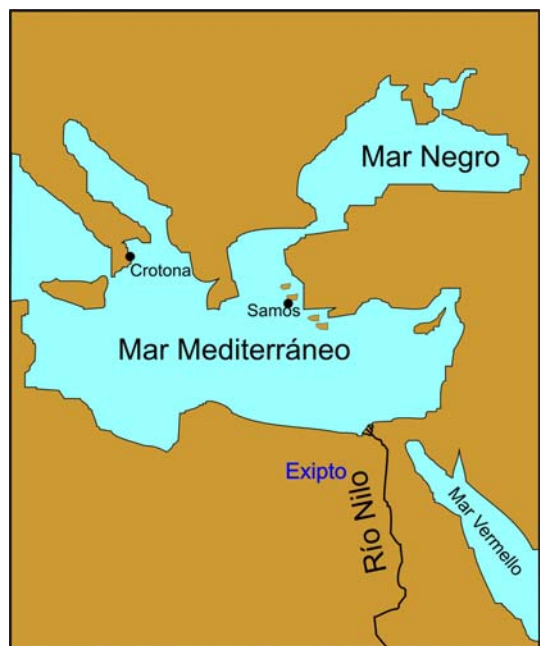
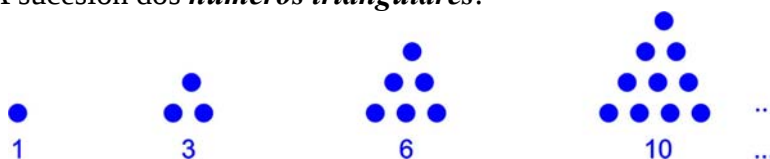
O descubrimento dos números irracionais.

O estudo da proporcionalidade e dos diferentes tipos de medias (aritmética, xeométrica, harmónica) e, como consecuencia, o inicio do establecemento da *escala musical*.

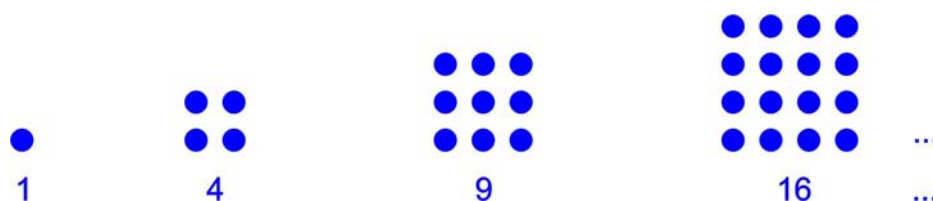
O popular *Teorema de Pitágoras* é un resultado que xa utilizaban os exipcios con anterioridade á época de Pitágoras.

Os chamados *números figurados* reciben este nome porque poden representarse utilizando figuras formadas por puntos. Existen diferentes familias de números figurados; os números pertencentes a cada unha desas familias dan lugar a sucesións numéricas moi coñecidas. Por exemplo:

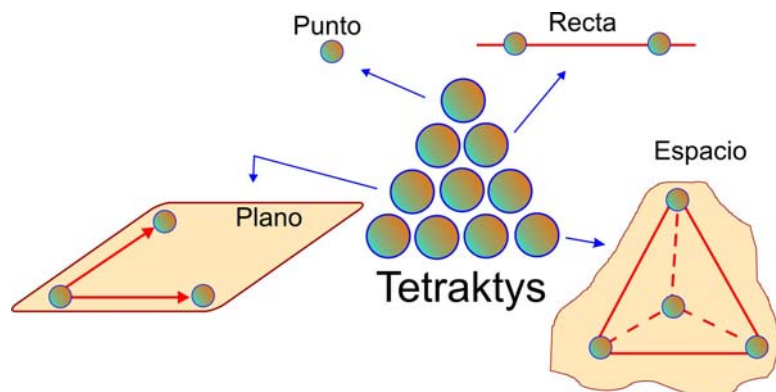
A sucesión dos *números triangulares*:



ou a sucesión dos *números cadrados*, que representamos na páxina seguinte...



Seguramente xa intuiches que existen outras familias de números figurados: *pentagonais*, *hexagonais*... Pero hai máis: *oblongos*, *estrelados*, *tetraédricos*, *cúbicos*...

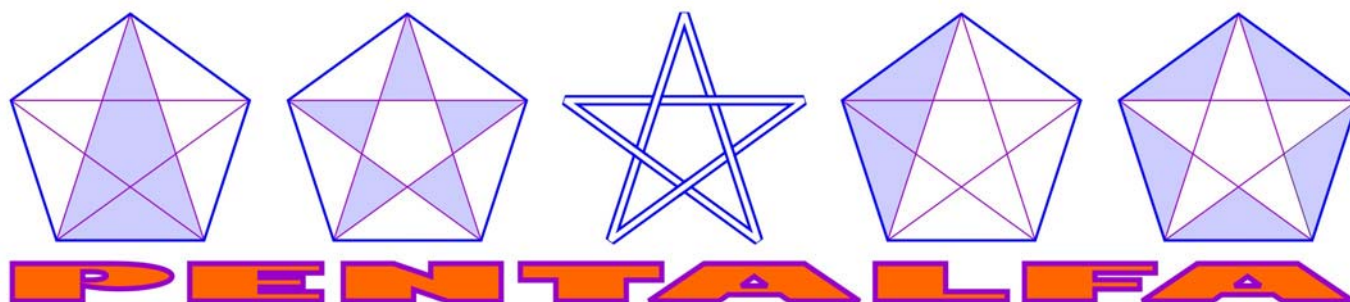


O *número triangular cuarto* era para os pitagóricos unha figura especial. Denominábano *Sagrada Tetraktys*.

Pola *Sagrada Tetraktys* facían o xuramento de que cumprirían as normas e preceptos da *irmandade pitagórica* cando eran admitidos nela.

Sobre esta figura fanse diversas interpretacións de tipo filosófico, pseudorrelixioso ou mesmo esotérico.

Como podes observar, o noso gráfico mostra unha interpretación baixo un punto de vista moito máis matemático

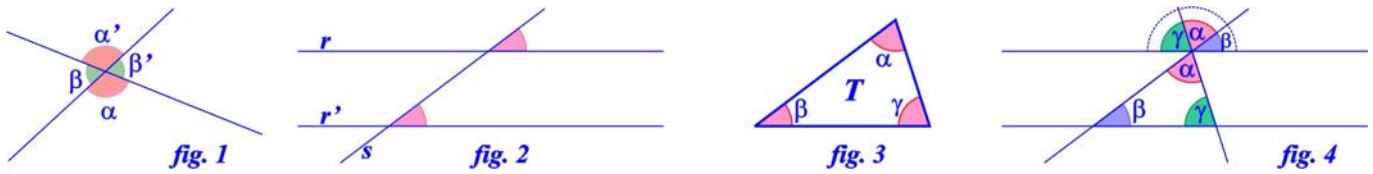


Nunha das secuencias da película de debuxos animados *Donald in mathmagic land* móstrase como algunhas persoas camiñan na noite con sixilo. Son membros da *Irmandade Pitagórica* que van asistir a unha das súas reunións.

Cando chegan á porta do local onde vai ter lugar a xuntanza, identifícanse mostrando un contrasinal que levan gravado na palma da man: un *polígono regular estrelado* de cinco puntas, a *pentalfa*.

Pero esta figura que os identificaba causoulle aos *pitagóricos* moitas dores de cabeza. Cando quixeron medir a *diagonal* dun pentágono regular utilizando como unidade de medición o *lado* do propio pentágono atopáronse coa imposibilidade de poder expresar esa medida mediante a *relación de dous números enteiros*, é dicir, non existe ningunha *fracción* que coincida con ela. E logo, cal é o seu valor?

Imos comezar polo principio. Seguro que se vos pregunto cal é o valor da *suma das medidas dos tres ángulos interiores dun triángulo plano*, todos me diredes que a resposta é 180° . Pero que pasará se vos pido que xustifiques, cando menos graficamente, esa afirmación?



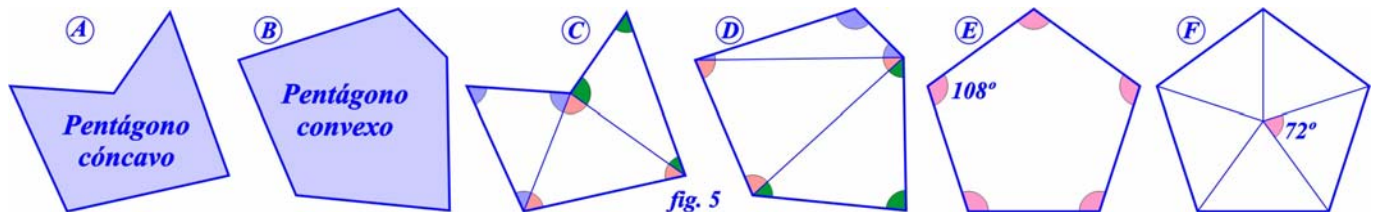
Na **fig. 1** os ángulos α e α' son *opostos polo vértice* (tamén o son β e β'). Eses ángulos teñen vértice común e os lados de ambos forman dúas rectas secantes que se cortan nese vértice; é dicir, os lados dun dos ángulos son semirectas opostas aos lados (tamén semirectas) do outro. Os ángulos opostos polo vértice teñen a mesma medida: $\alpha = \alpha'$ (e $\beta = \beta'$).

Na **fig. 2** facemos a representación de dúas rectas paralelas, r e r' , cortadas por outra recta secante, s , non perpendicular ás anteriores. As tres rectas determinan oito ángulos, catro deles teñen a mesma medida e os outros catro tamén coinciden noutra medida diferente da primeira. Sobre esa figura destacamos dous ángulos que miden o mesmo.

A partir destes dous esbozos queremos mostrar que a suma das medidas dos ángulos do triángulo T (**fig. 3**) resulta ser 180° . Se vos fixades, a **fig. 4** é unha xustificación gráfica de que esa propiedade é correcta.

Agora a pregunta vai ser outra: *Canto suman os ángulos interiores dun pentágono calquera?* Se nos poñemos a debuxar un pentágono (sexa cóncavo ou convexo) é doado observar que se pode descompoñer en tres triángulos, tal como se mostra nas imaxes **C** e **D** da **fig. 5**. Dedúcese, polo tanto, que a suma das medidas dos ángulos interiores de calquera pentágono, coincide coa suma das medidas dos ángulos interiores dos tres triángulos que interveñen na descomposición dese pentágono. En conclusión:

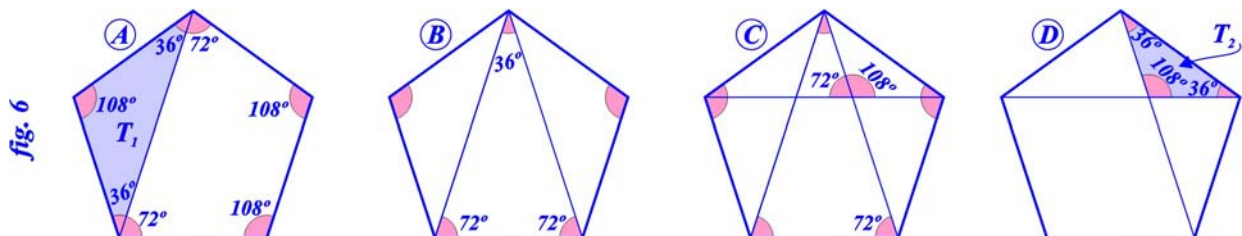
$$\text{Suma das medidas dos ángulos interiores dun pentágono} = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$$



Para o caso dun **pentágono regular** (aquele que ten *lados iguais* e *ángulos iguais*) deducimos que cada un dos seus ángulos interiores mide $540^\circ : 5 = 108^\circ$ e cada un dos seus ángulos centrais $360^\circ : 5 = 72^\circ$, tal como se mostra nas imaxes **E** e **F** da **fig. 5**.

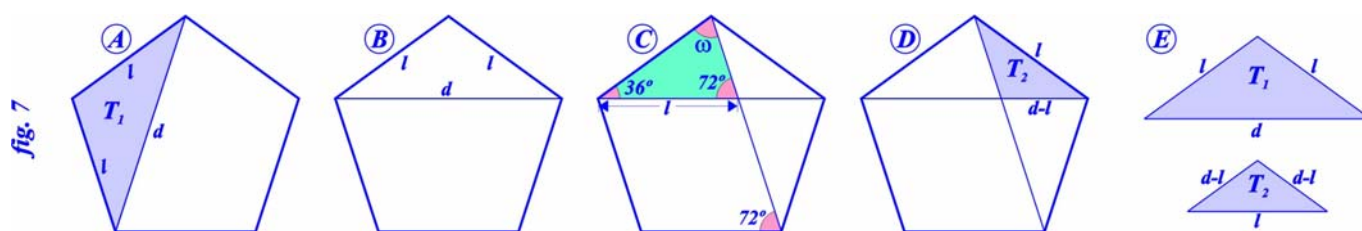
Centrarémonos a partir de aquí no pentágono regular. O triángulo T_1 (imaxe **A** da **fig. 6**) é un **triángulo isóscele** (constrúese utilizando unha diagonal do pentágono e dous dos seus lados); o maior dos seus ángulos mide 108° , polo tanto, os outros dous teñen que ser de 36° (por que?).

Avanzando de maneira razoada pola **fig. 6** dende a imaxe **A** ata a imaxe **D**, chegamos á conclusión de que o triángulo T_2 tamén é isóscele *je os seus ángulos coinciden en medida cos do triángulo T_1 !*



Acabamos de comprobar, pois, que os triángulos T_1 e T_2 teñen ángulos coas mesmas medidas. Isto significa que os dous triángulos son **semellantes** (teñen a mesma forma). Polo tanto, as medidas dos lados correspondentes son **proporcionais**. E cales son as medidas deses lados?

Denotemos por l á medida de cada un dos lados do pentágono e por d á medida das súas diagonais. Con esta notación establecida, a medida dos lados do triángulo T_1 é a que aparece na imaxe **A** da **fig. 7**.



Por outra parte, se seguimos a secuencia de imaxes da **fig. 7**, vemos que o triángulo que destacamos na imaxe **C** é isóscele, pois, tendo en conta as medidas dos seus ángulos, ω ten que ser de 72° . Sendo isto así, os lados iguais dese triángulo teñen de medida l , o que implica que os lados iguais do triángulo T_2 (destacado na imaxe **D**) miden $d-l$.

Despois de todas as consideracións que fixemos anteriormente, chegamos á imaxe **E** da **fig. 7** na que aparecen os dous **triángulos semellantes** T_1 e T_2 xunto coas medidas dos seus lados.

Sabemos que, se dous triángulos son semellantes, **as medidas dos lados correspondentes son proporcionais**. Polo tanto:

$$\frac{d}{l} = \frac{l}{d-l}$$

A pregunta que xurde agora é: cal é o valor desta proporción (*a constante de proporcionalidade*)? É dicir, canto vale d/l ? Ou sexa: **como están relacionadas as medidas da diagonal e do lado en calquera pentágono regular?**

Imos facer dúas cousas: dividiremos entre l o *numerador* e o *denominador* do segundo membro da proporción anterior, e realizaremos *un cambio de variable*: chamaremos x ao valor (por agora descoñecido) d/l , $x=d/l$. Temos:

$$\frac{d}{l} = \frac{l}{d-l} \Rightarrow \frac{d}{l} = \frac{\frac{l}{d-l}}{\frac{l}{l}} \Rightarrow x = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x \cdot (x-1) = 1 \Rightarrow x^2 - x = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Resolvamos a ecuación completa de segundo grao $x^2 - x - 1 = 0$, utilizando a coñecida fórmula:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \pm 1,618033988...$$

Seguro que xa identificaches a solución positiva da ecuación: **Efectivamente, o número áureo!**

Velaí a conclusión; Cúmprese que, en **calquera pentágono regular**, **a relación entre a medida da diagonal e a do seu lado é o número de ouro**, un número que ten unha expresión decimal infinita non periódica, un número que non se pode expresar como fracción, un **número irracional**:

$$x = \frac{d}{l} = \phi$$



Diego Alonso Orozco Núñez
Cuarto ESO-A

Cales son as medidas de x , y , z ?

