Evaluación Bloque Funciones___Solución____4º ESO____________ Opción C

Ejercicio nº 1.-

Dada la función mediante su representación gráfica, responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el dominio de definición? ¿Y su recorrido?

$$Dom\ f = [-20, +\infty)$$
$$Rec\ f = [-15, 15]$$

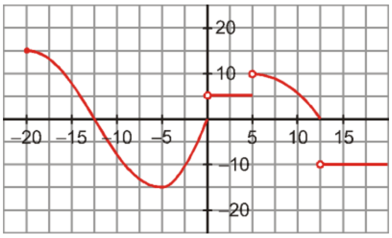
b) ¿Es continua? Si no lo es, indica dónde es discontinua.

La función presenta discontinuidades en los puntos $x = 0$, $x = 5$ y $x = 12{,}5$

c) Indica los puntos de corte con los ejes y los intervalos en los que la función toma el mismo valor.

Puntos de corte con los ejes: $(-12{,}5, 0)$, $(0, 0)$ y $(12{,}5, 0)$

La función es constante en los intervalos: $(0, 5) \cup (12{,}5, +\infty)$



Ejercicio nº 2.-

Construye una gráfica que se ajuste al siguiente enunciado:

Desde las 16:00 h del viernes, el número de vehículos en carretera aumenta paulatinamente, descendiendo a partir de las 22 h hasta las 6 de la mañana del sábado, momento en el que vuelve a producirse un aumento, menor que el del viernes, que dura hasta la 1 de la tarde. Durante 4 horas se produce una disminución del tráfico que alcanza cotas mínimas, volviendo a partir de ese momento a crecer hasta las 8 de la tarde, aunque menos que por la mañana. Desde ese instante y hasta las 8 de la mañana del domingo, el tráfico desciende; es a partir de ese momento y hasta las 10 de la noche cuando vuelve a crecer el número de vehículos alcanzando la cota máxima en ese momento del fin de semana, para luego descender hasta las 12 de la noche.

Ejercicio nº 3.-

Determina el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{5x}{3x-6}$

El dominio de definición de una función racional será el conjunto de los números reales excepto las raíces del denominador.

Calculemos las raíces del denominador:

$$3x - 6 = 0 \;\Rightarrow x = 2$$

Por lo tanto: $Dom\ y = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

b) $y = \sqrt{x^2 + x - 6}$

El dominio de definición de una función radical es el conjunto de números que hacen no negativo el radicando. En nuestro caso:

$$x^2 + x - 6 \geq 0 \;\Rightarrow (x-2)\cdot(x+3) \geq 0$$

Estudiemos el signo:

$+$ $-$ $+$

-3 2

Por lo que $Dom\ y = (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$

Ejercicio nº 4.-

Representa gráficamente la recta 3*x* + 2*y* − 1 = 0 indicando previamente cuánto valen la pendiente y la ordenada en el origen, y calculando los puntos de corte con los ejes coordenados.

Recordemos que si tenemos la ecuación de la recta en la forma $y = mx + n$, entonces el valor m será la pendiente y el valor n será la ordenada en el origen.

Transformemos la ecuación de la recta del enunciado:

$$3x + 2y - 1 = 0 \;\Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

Tenemos, pues, que la pendiente vale $m = -\frac{3}{2}$ y la ordenada en el origen $n = \frac{1}{2}$.

Para hallar los puntos de corte con los ejes coordenados:

- Corte con el eje x, hacemos $y = 0$:

$$0 = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \;\Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

  Obteniendo el punto $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

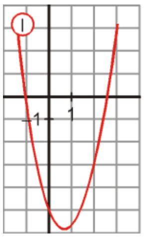
- Corte con el eje y, hacemos $x = 0$:

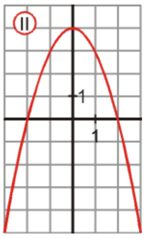
$$y = -\frac{3}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2} \;\Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

  Obteniendo el punto $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Ejercicio nº 5.-

Completa las expresiones de estas parábolas:





I $\rightarrow$ $y = 2x^2 + \boxed{}x + \boxed{}$

II $\rightarrow$ $y = \boxed{}x^2 + \boxed{}$

Para hallar los coeficientes que faltan, es suficiente con escoger dos puntos por los que pasa cada una de las parábolas, y formar un sistema de ecuaciones con ellos:

Parábola I:

- Por pasar por el punto $(-1,0)$, podemos plantear la ecuación $0 = 2 - b + c$
- Por pasar por el punto $(2{,}5\,,0)$, podemos plantear la ecuación $0 = 2 \cdot (2{,}5)^2 + b \cdot 2{,}5 + c$

Resolviendo el sistema, queda la ecuación de la parábola $y = 2x^2 - 3x + 1$

Parábola II:

- Por pasar por el punto $(0,4)$, planteamos la ecuación $4 = a \cdot 0^2 + c$
- Por pasar por el punto $(2,0)$, planteamos la ecuación $0 = a \cdot 2^2 + c$

Resolviendo el sistema, queda la ecuación de la parábola $y = -x^2 + 4$

Ejercicio nº 6.-

Representa la siguiente función:

$$y = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -3 \\ x^2 + 3x & \text{si} \quad -3 \leq x < 1 \\ 4 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Para representar gráficamente una función a trozos, procedemos de la siguiente forma:

- Dividimos el plano en secciones (dadas por las condiciones de la función)
- Representamos cada una de las funciones en su sección.

En nuestro caso, tenemos tres secciones en las que representaremos:

- Primera sección ($x < -3$): la recta (horizontal) $y = 0$
- Segunda sección ($-3 \leq x < 1$): la parábola para la cual estudiamos los siguientes conceptos:
    - Vértice, $V = (V_x, V_y)$:

$$V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$V_y = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}$$

$$V = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$

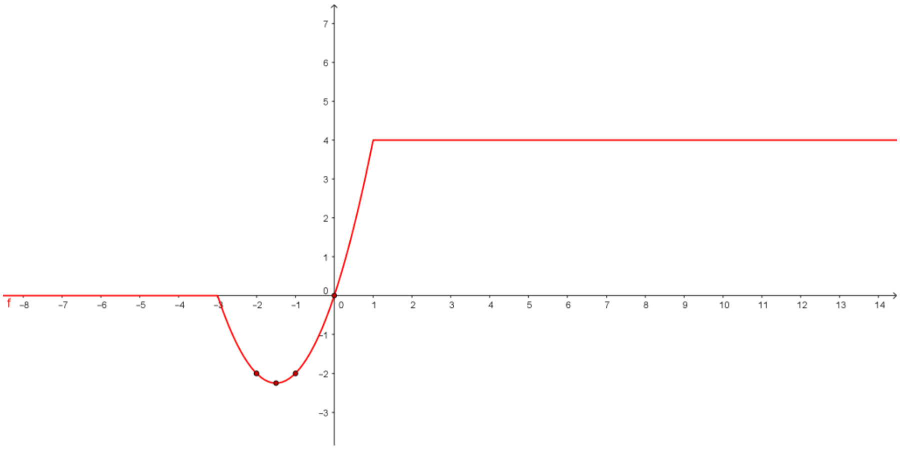
    - Puntos de corte :
        - Eje x $(y = 0)$: $0 = x^2 + 3x \Rightarrow x \cdot (x + 3) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \Rightarrow (0,0) \\ 3 \Rightarrow (3,0) \end{cases}$
        - Eje y $(x = 0)$: $y = 0^2 + 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow (0,0)$

- ○ Tabla de valores:

x	y
-2	-2
-1	-2

- Tercera sección ($x > 1$): la recta (horizontal) $y = 4$

Representemos gráficamente:



Ejercicio nº 7.-

Representa las siguientes funciones:

a) $y = |2x + 4|$

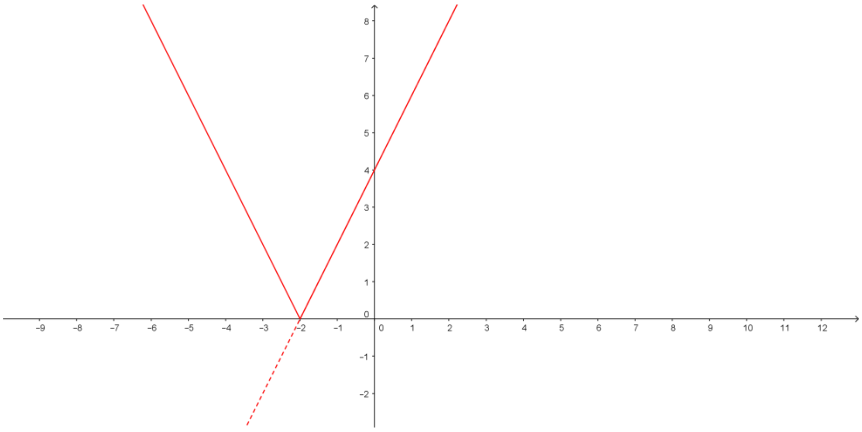
Para dibujar una función valor absoluto, podemos dibujar la función que esté dentro del valor absoluto y después aplicar una simetría respecto al eje x del tramo de gráfica que quede "por debajo" del eje de abscisas.

Para dibujar la función sin tener en cuenta el valor absoluto, como es una recta, realizamos una tabla de valores:

$y = 2x + 4$:

x	y
1	6
-1	2
0	4
-2	0

Representamos gráficamente, aplicando ya la técnica del valor absoluto:



b) $y = \dfrac{1}{x-3}$

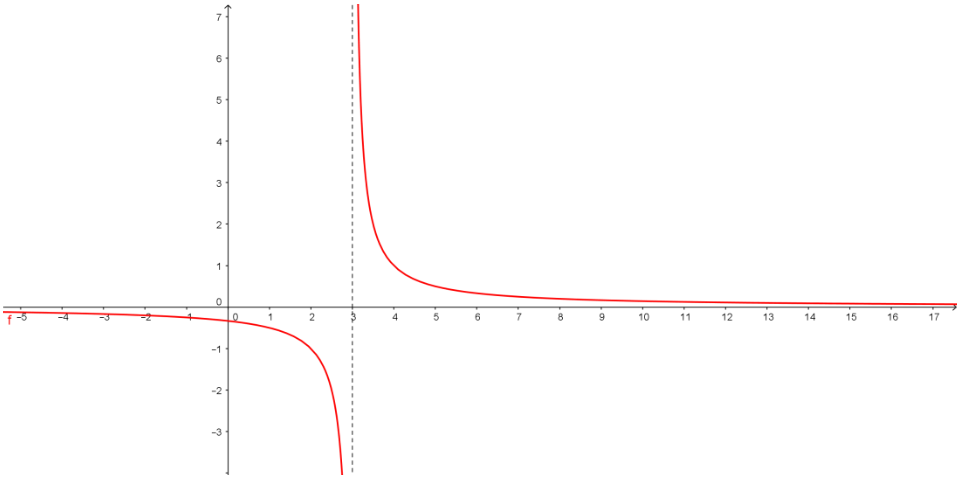
Para dibujar una función de proporcionalidad inversa, partimos del estudio de la función $y = \frac{k}{x}$, que es una hipérbola con las propiedades siguientes:

- Si $k > 0$, la hipérbola se encuentra en el primer y tercer cuadrante
- Si $k < 0$, la hipérbola se encuentra en el segundo cuadrante
- Para el valor de x que anule el denominador, tendremos una **asíntota**. Además, ese valor de x no pertenece al dominio.

Teniendo en cuenta esto, para nuestro ejercicio tendremos:

- Una hipérbola en el primer y tercer cuadrante
- Una asíntota para $x = 3$

Representemos gráficamente.



<u>Ejercicio nº 8.-</u>

Representa las siguientes funciones:

a) $y = 3^x$

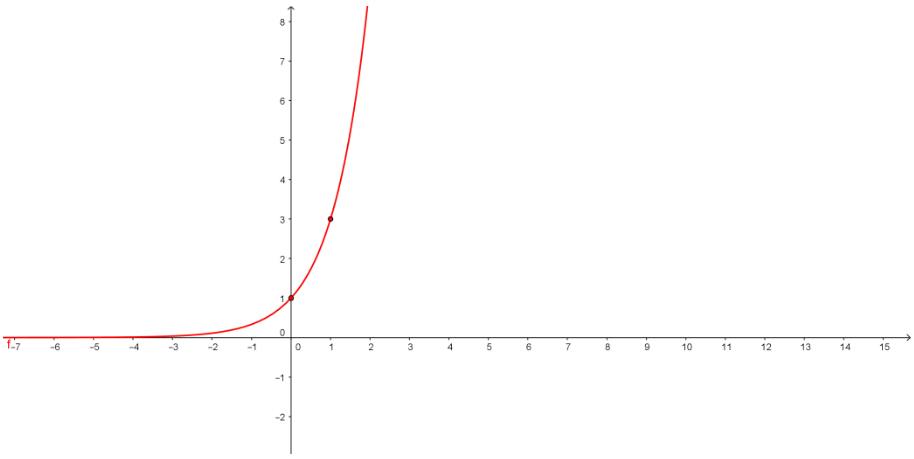
Para dibujar una función exponencial, partimos de la función $y = a^x$, y recordamos varios detalles:

- La gráfica de la función pasa por los puntos $(0,1)$ y $(1, a)$
- Si la base es un número menor que 1, la función será decreciente; y si es un número mayor que 1, será creciente.

Adaptándolo a nuestro ejercicio:

- La gráfica debe pasar por los puntos $(0,1)$ y $(1,3)$
- La función es creciente.

Vamos a representarla:



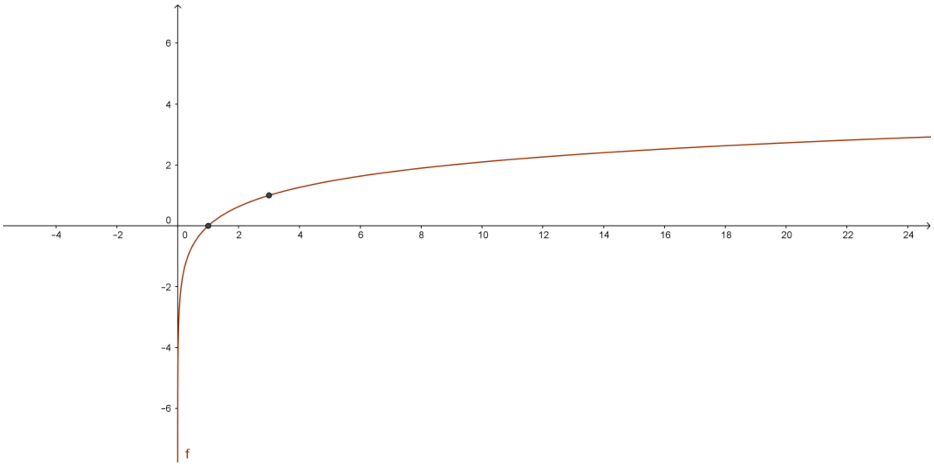
b) $y = log_3\, x$

Para representar una función logarítmica, partimos de la función general $y = \log_a x$, y recordemos:

- Pasa por los puntos $(a, 1)$, $(1, 0)$
- Es estrictamente creciente, y su dominio son los valores de x mayores que 0 (si tenemos una expresión distinta de x, tendremos que estudiar en qué intervalo o intervalos es positivo).

En nuestro caso, la función pasa por los $(3,1)$ y $(1, 0)$. Y su dominio de definición es: $Dom\ y = (0, +\infty)$.

Representemos:



Ejercicio nº 9.-

Se lanza verticalmente hacia arriba una pelota con una velocidad de 30 m/s. La altura, *h*, que alcanza en cada instante *t* viene dada por $h(t) = 30t - 5t^2$.

a) Haz la representación gráfica de *h*(*t*).

Debemos representar una parábola, por lo que debemos estudiar:

- Vértice, $V = (V_x, V_y)$:

$$V_t = \frac{-b}{2a} = \frac{-30}{2 \cdot (-5)} = 3$$

$$V_y = -5 \cdot (3)^2 + 30 \cdot 3 = 45$$

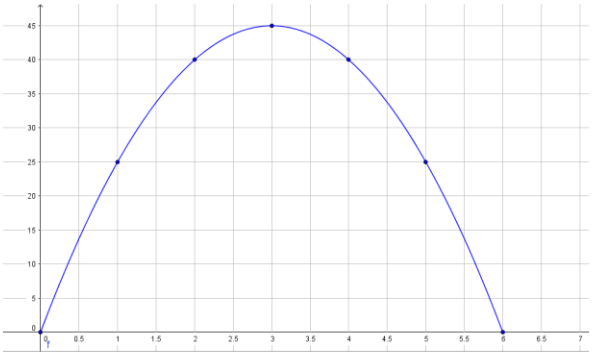
$$V = (3, 45)$$

- Puntos de corte :
  - Eje t $(y = 0) : 0 = 30t - 5t^2 \Rightarrow -5t \cdot (-6 + t) = 0 \Rightarrow t = \begin{cases} 0 \Rightarrow (0,0) \\ 6 \Rightarrow (6,0) \end{cases}$
  - Eje y $(t = 0) : y = 30 \cdot 0 - 5 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow (0, 0)$

- Tabla de valores:

x	y
1	25
2	40
4	40
5	25

Representamos, teniendo en cuenta que la función sólo tiene sentido si los valores de la abscisa (la imagen) son no negativos:



b) Indica el dominio de definición.

Como ya hemos observado en la gráfica, el dominio de definición será: $Dom\ h = [0, 6]$

c) ¿En qué instantes tiene una altura superior a 25 m?

A la vista de la tabla de valores y la gráfica, esto sucederá para valores comprendidos en el intervalo $[1, 5]$

d) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza la pelota?

¿En qué momento se alcanza?

La máxima altura es $45\ m$, y se alcanza a los $3\ s$ (observemos que coincide con las coordenadas del vértice).

<u>Ejercicio nº 10.-</u>

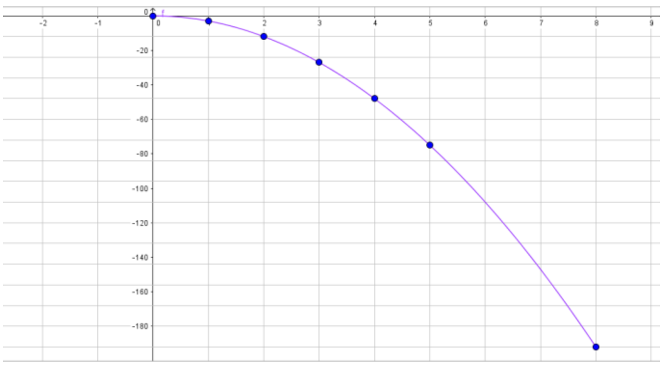
Dejamos caer una piedra desde un acantilado cuya altura es de 192 m.

En la siguiente tabla se recoge la distancia recorrida por la piedra en distintos tiempos:

TIEMPO (s)	0	1	2	3	4	5
DISTANCIA (m)	0	−3	−12	−27	−48	−75

a) Haz una gráfica de esta función. ¿Observas alguna regularidad en la tabla? Encuentra la expresión analítica que se ajusta a dicha tabla.

Representamos los puntos de la tabla, unimos, y prolongamos hasta el valor de $y = -192$:



Observando la gráfica, podemos deducir que la función sigue una evolución cuadrática, del tipo $y = ax^2 + bx + c$, siendo a, b, c números reales.

Para calcular dichos números, escogemos tres puntos, dados por la tabla anterior, y formamos un sistema de ecuaciones que debemos resolver.

Vamos a elegir los tres primeros puntos, que sustituyendo en la ecuación cuadrática queda:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 0 \\ -3 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 \\ -12 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -3 - b \\ -12 = 4a + 2b \end{cases} \Rightarrow -12 = 4 \cdot (-3 - b) + 2b \Rightarrow -12 = -12 - 4b + 2b \Rightarrow b = 0$$

$$\Rightarrow a = -3$$

Por lo tanto, la expresión analítica que se ajusta a la gráfica de la función es: $y = -3x^2$

b) ¿Cuánto tiempo tarda la piedra en llegar al suelo?

La piedra llegará al suelo cuando la imagen de la función calculada en el apartado anterior sea $y = -192$ (que es la altura del acantilado, y con signo negativo, ya que la tabla está considerando que la altura que baja desde lo alto del acantilado toma valores negativos).

Vamos a resolver la ecuación:

$$-192 = -3x^2 \Rightarrow \frac{192}{3} = x^2 \Rightarrow 64 = x^2 \Rightarrow x = \pm 8$$

Descartamos el valor negativo, ya que estamos considerando que el tiempo que transcurre es positivo.

Por lo que la piedra tarda $8\ s$ en llegar al suelo.

c) ¿Desde qué altura se habría dejado caer la piedra si hubiera tardado 11 segundos en llegar al suelo?

Ahora nos hacen la pregunta inversa: cuál será el valor de la imagen suponiendo que ha tardado un valor de $x = 11$.

Pues vamos a calcularlo:

$$y = -3 \cdot 11^2 \Rightarrow y = -3 \cdot 121 \Rightarrow y = -363$$

Por lo que la piedra se habría tirado desde $363\ m$.