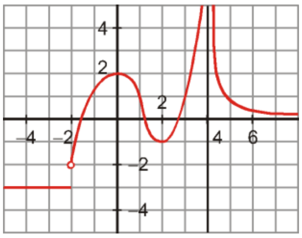
Evaluación Bloque Funciones____Solución_____4º ESO_____________ Opción A

Ejercicio nº 1.-

Dada la función *f*(*x*) a través de la siguiente gráfica:



a) Indica cuál es su dominio de definición. $\boldsymbol{Dom} = \mathbb{R}\backslash\{\mathbf{4}\}$

b) ¿Es continua? Si no lo es, indica los puntos de discontinuidad. **Es continua en todos los números reales excepto en $\boldsymbol{x = -2}$ y $\boldsymbol{x = 4}$**

c) ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y cuáles los de decrecimiento de la función? ¿Qué ocurre en el intervalo $(-\infty, -2]$?

Intervalos de monotonía:

- Creciente: $(-2,0) \cup (2,4)$
- Decreciente: $(0,2) \cup (4,+\infty)$
- Constante: $(-\infty, 2)$

Ejercicio nº 2.-

Marta sale de su lugar de trabajo a las 8 de la tarde en bicicleta y se dirige a un supermercado situado a 600 m de su trabajo, tardando en llegar 10 minutos. Después de permanecer allí un cuarto de hora, se va a un restaurante que hay a 1 km del supermercado, tardando 20 minutos en el recorrido. Tras estar 2 horas cenando con unos amigos, se va a su casa situada a 2 400 m del restaurante. Llega a su casa a las 11 y media de la noche.

Representa la gráfica *tiempo−distancia*.

Ejercicio nº 3.-

Determina el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x^2+2}{x^2+1}$

$Dom = \mathbb{R}$; ya que el denominador no se anula para ningún valor de x, y esos serían los únicos valores que me darían problema.

b) $y = \sqrt{3-9x}$

$Dom = (-\infty, \frac{1}{3}]$; ya que tenemos que buscar los valores de x para los que $3 - 9x \geq 0 \rightarrow 3 \geq 9x \rightarrow \frac{1}{3} \geq x$

Ejercicio nº 4.-

Representa gráficamente la recta *y* = − 2*x* + 1 y halla la ecuación de la recta con la misma pendiente que la anterior que pasa por el punto medio del segmento de extremos *A*(−3, 0) y *B*(1, −8).

Dibujamos primero la recta $y = -2x + 1$, para lo cual hacemos una tabla de valores:

x	y
0	1
-1	3

Pintamos los puntos sobre los ejes coordenados, unimos y prolongamos. Y ya tendríamos la primera recta.

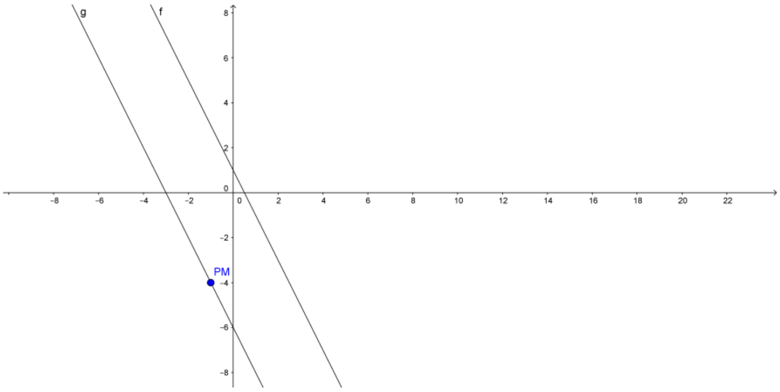
Para la segunda recta, queremos que tenga la misma pendiente (recordemos que las rectas se escriben en la forma $y = mx + n$, donde m es la pendiente y n es la ordenada en el origen). Por tanto, observando la expresión analítica de la primera recta, necesitamos que esta nueva recta tenga pendiente $m = -2$.

Ahora nos falta un punto por el que pase dicha recta, que nos piden que sea el punto medio del segmento de extremos $A(-3,0)$ y $B(1,-8)$. Recordemos que el punto medio de un segmento tiene por coordenadas la semisuma de las coordenadas de los extremos, lo cual se traduce en:

$$PM(PM_1, PM_2) = \left(\frac{-3+1}{2}, \frac{0+(-8)}{2}\right) = (-1,-4)$$

Dibujamos el punto obtenido, y trazamos la recta paralela.

Debería quedarnos algo así:



Ejercicio nº 5.-

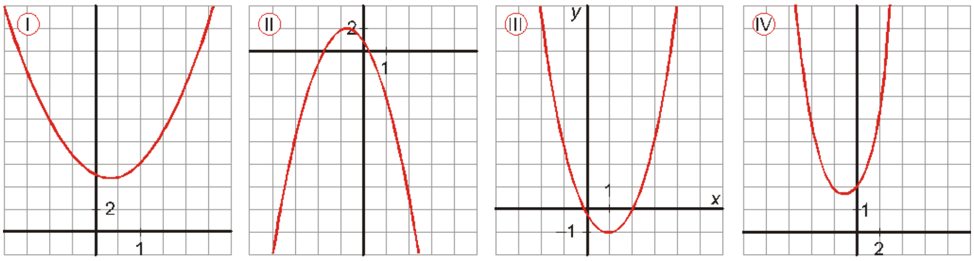
Relaciona cada gráfica con una de las siguientes expresiones:

a) $y = x^2 - 2x \rightarrow III$

b) $y = 3x^2 - 2x + 5 \rightarrow I$

c) $y = \frac{1}{3}x^2 + x + 2 \rightarrow IV$

d) $y = -2x^2 - 3x + 1 \rightarrow II$



Para unir las expresiones analíticas anteriores con sus respectivas gráficas, debemos tener en cuenta varios detalles:

- Estamos ante parábolas, ya que todas ellas son polinomios de grado 2.
- Si el coeficiente que acompaña a x^2 es positivo, la parábola tendrá forma de ∪, y si es negativo tendrá forma de ∩.
- Dónde está el vértice de la parábola.
- Cuáles son los puntos de corte.

Con todos estos conceptos claros, sabremos unir sin problema las expresiones analíticas con sus gráficas.

Ejercicio nº 6.-

Representa gráficamente la siguiente función:

$$y = \begin{cases} x - 2 & \text{si} \quad x \le 2 \\ -x + 3 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Para representar la función, lo primero que tenemos que recordar es que hay que dividir el plano en dos partes, una para los valores de x menores o iguales a 2, y otra para los valores de x estrictamente mayores que 2.

En la primera parte, vamos a dibujar la recta $x - 2$, pudiendo tomar el valor extremo (la imagen de la función para $x = 2$).

En la segunda parte, dibujaremos la recta $-x + 3$, pero en este caso **no** podemos tomar el valor extremo (la recta acabará en un círculo vacío).

Para dibujar sendas rectas, haremos una tabla de valores (es suficiente con hallar dos puntos por los que pase la recta).

Vamos a ello:

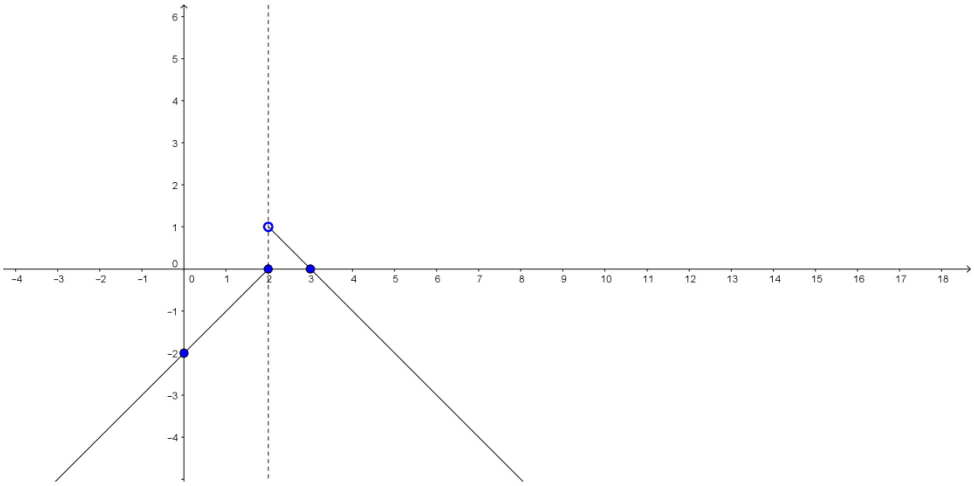
- $y = x - 2$:

x	y
2	0
0	2

- $y = -x + 3$:

x	y
2	1
3	0

La gráfica de la función, una vez pintados los puntos, quedaría:



<u>Ejercicio nº 7.-</u>

Representa las siguientes funciones:

a) $y = |3x + 9|$

Para dibujar una función valor absoluto, podemos proceder de la siguiente forma:

- Dibujamos la función que tenemos dentro del valor absoluto, sin tener en cuenta que estamos ante un valor absoluto (en nuestro caso, habría que dibujar una recta (hacemos una tabla de valores, dibujamos los puntos, unimos y extendemos))
- Todo tramo de gráfica que esté “por debajo” del eje OX, lo pasamos de forma simétrica “por encima” del eje OX.
- La parte que queda por debajo, la borramos.

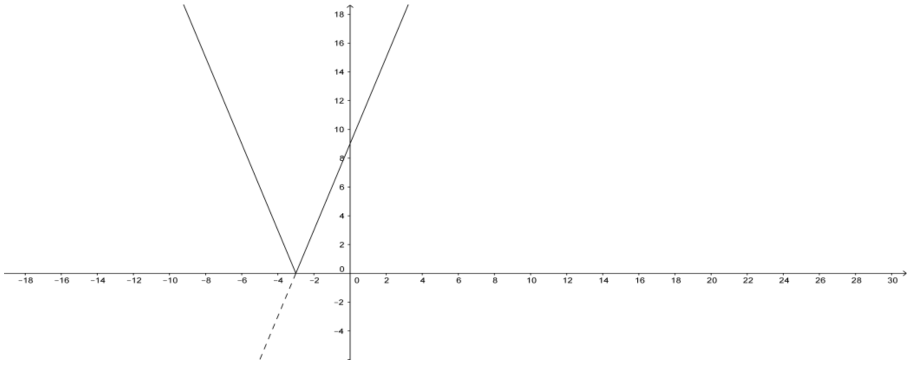
Otra forma de proceder, aunque más laboriosa, sería escribir la función valor absoluto como una función a trozos, y dibujar dicha función. Como no nos pide escribir la función en forma analítica sin usar el valor absoluto, vamos a descartar esta forma de proceder. (Dicho sea de paso, en funciones más complejas, no es el proceder más adecuado).

Hagamos una tabla de valores:

$y = 3x + 9$:

x	y
-3	0
0	9

Dibujemos:



b) $y = -\dfrac{1}{x+1}$

Para dibujar una función de proporcionalidad inversa, partimos de la función $y = \frac{k}{x}$.

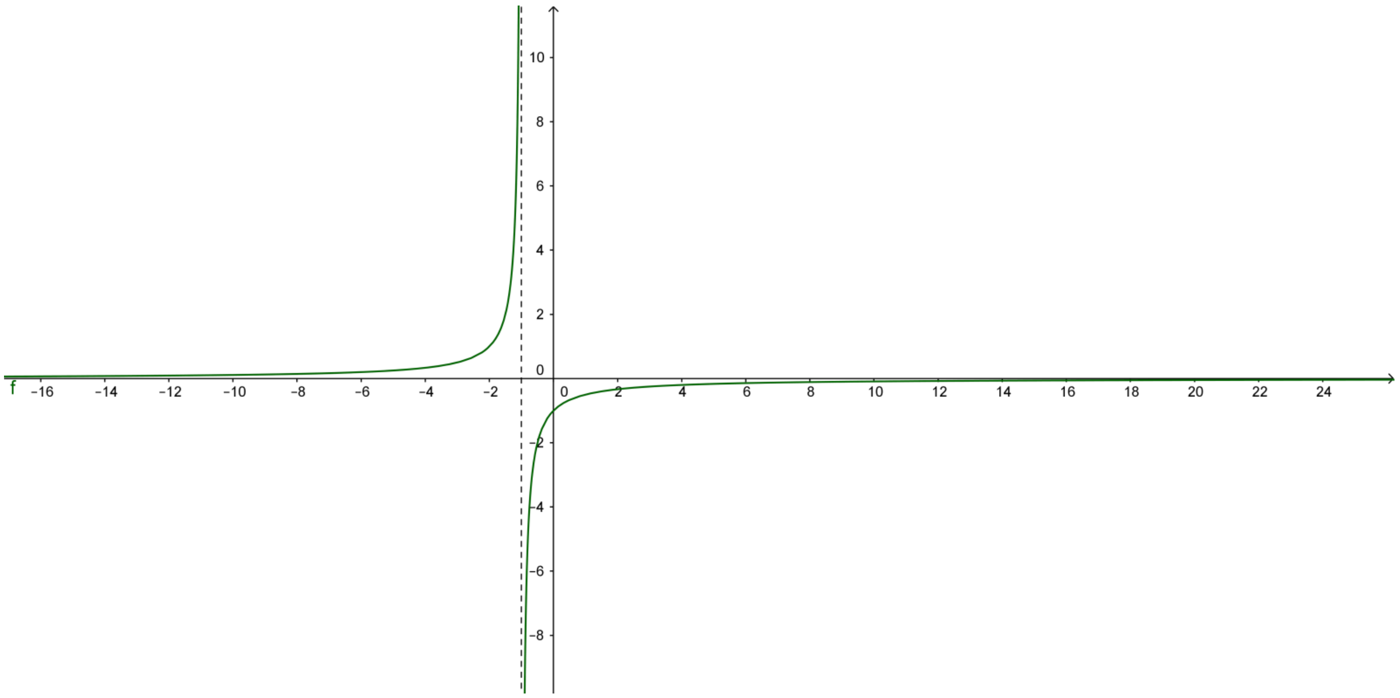
Recordemos que esta función es una hipérbola que tiene sus ramas en el primer y tercer cuadrante si $k > 0$, o en el segundo y cuarto cuadrante si $k < 0$.

Además, estas funciones tienen una **asíntota**, que es simplemente una recta vertical, dada por el valor de x para el cual no existe valor de la función.

Vamos con nuestro ejercicio:

- Como $k = -1$, nuestra hipérbola tendrá sus ramas en el segundo y cuarto cuadrante.
- Como en el denominador aparece $x + 1$, sabemos que ese polinomio será cero si $x = -1$, que será nuestra asíntota.

Dibujemos:



Ejercicio nº 8.-

Representa las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{2 - x}$

Para dibujar una función radical, partimos de la función $y = \sqrt{x}$, que recordemos que tiene la forma de media parábola, con el eje OX como eje de simetría.

Para dibujar cualquiera de estas funciones, lo más importante es hallar el dominio de definición, ya que esa información nos dirá si debemos dibujar la función radical hacia valores que tienden a $+\infty$, o hacia valores que tienden a $-\infty$.

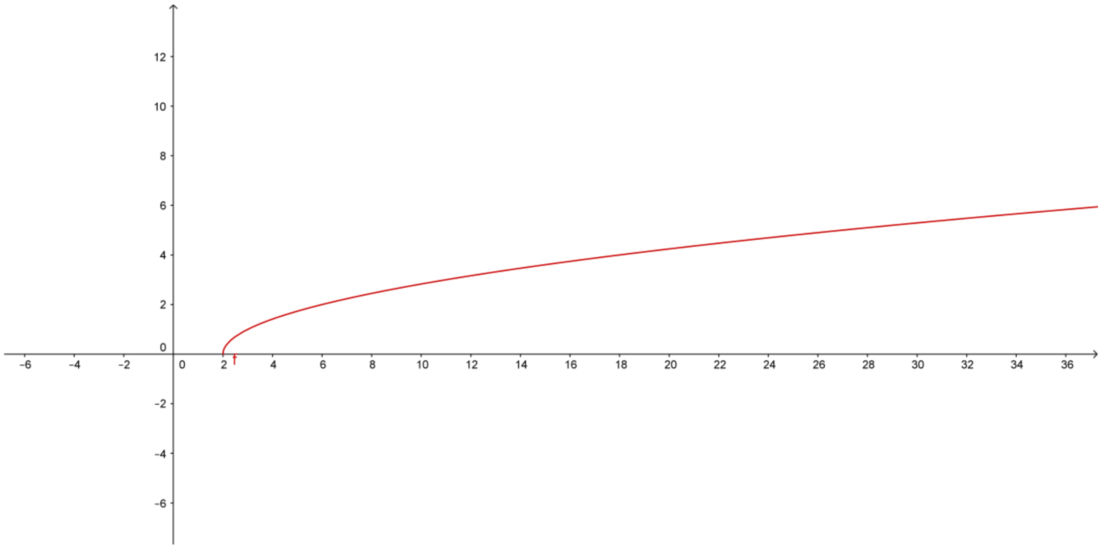
En nuestro caso, el dominio de definición es el conjunto de valores de x tales que:

$$2 - x > 0 \Rightarrow 2 < x$$

Por lo que tendremos media parábola, para los valores de x mayores que 2, partiendo del punto $(2{,}0)$.

Además, tendremos esa media parábola en la parte superior del eje de abscisas (eje OX), ya que el término que multiplica a la raíz es positivo (en realidad, es 1).

Vamos a dibujarla:



b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

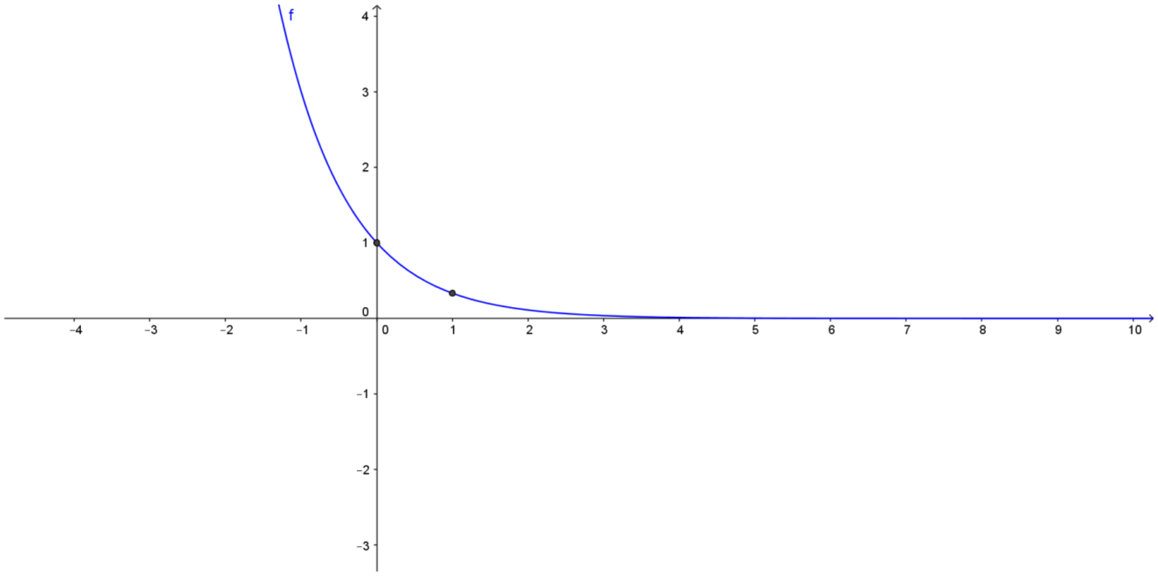
Para dibujar una función exponencial, partimos de la función $y = a^x$, y recordamos varios detalles:

- La gráfica de la función pasa por los puntos $(0{,}1)$ y $(1, a)$
- Si la base es un número menor que 1, la función será decreciente; y si es un número mayor que 1, será creciente.

Adaptándolo a nuestro ejercicio:

- La gráfica debe pasar por los puntos $(0{,}1)$ y $\left(1, \frac{1}{3}\right)$
- La función es decreciente.

Vamos a dibujarla:



<u>Ejercicio nº 9.-</u>

Tenemos en un banco un capital de 120 000 € por el que nos dan un interés del 2% anual.

a) Escribe la función que exprese el capital acumulado en función del tiempo que permanezca el dinero en el banco.

Este tipo de funciones vienen dadas por funciones exponenciales. Se pueden ver como una progresión geométrica, o bien utilizando la fórmula de interés bancario.

De cualquier modo, lo que hacemos es aumentar un 2% la cantidad inicial (120000). Por lo que, lo que debemos hacer, es multiplicar esa cantidad por su índice porcentual:

$$f(x) = 1{,}02^x \cdot 120000$$

Donde x representan los años transcurridos.

b) ¿Cuánto dinero tendremos al cabo de 3 años?

Nos piden la imagen de la función anterior para $x = 3$:

$f(3) = 1{,}02^3 \cdot 120000 = 127344{,}96$

Por lo que tendremos $127344{,}96$ €

c) ¿Cuánto tardará el dinero en duplicarse?

Debemos calcular cuántos años han de pasar para que nuestro dinero pase a ser 240000. Esto es lo que se llama imagen inversa o antecedente de $y = 240000$.

Tenemos que calcular para qué valor de x, obtenemos $f(x) = 240000$:

$$240000 = 1{,}02^x \cdot 120000 \;\Rightarrow 2 = 1{,}02^x \;\Rightarrow \ln 2 = x \cdot \ln 1{,}02 \;\Rightarrow x = 35{,}003$$

Por lo que han de transcurrir 35 años.

Ejercicio nº 10.-

Representa la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & \text{si } x\le 0\\ \sqrt{x-2} & \text{si } x>0\end{cases}$$

Para realizar la representación gráfica de esta función, vamos a utilizar lo ya explicado a lo largo de los ejercicios anteriores:

- Dividimos el plano en dos semiplanos, por la recta $x = 0$
- A la izquierda, dibujamos la hipérbola $y = \frac{1}{x-1}$
- A la derecha, dibujamos la función radical $y = \sqrt{x-2}$

La función debería quedar como sigue: