Tema 10: Azar y Probabilidad________________________________ 4º ESO

I. SUCESOS ALEATORIOS

Recordemos:

- Se llama **suceso aleatorio** a aquel acontecimiento en cuya realización influye el azar.
- **Experiencia aleatoria** es aquella cuyo resultado es un suceso aleatorio.

Existen experiencias aleatorias provocadas, como pueden ser:

- Lanzar un dado, lanzar una o más monedas, extraer un naipe de una baraja, extraer una bola de una bolsa,…
- Efectuar un experimento de laboratorio y analizar cualitativa o cuantitativamente el resultado.

Existen otro tipo de experiencias aleatorias cuyos resultados se consiguen mediante observación, como por ejemplo:

- Encuestar a los miembros de un colectivo y recabar información respecto a algún acontecimiento
- Contar cuántos coches pasan por un lugar durante cinco minutos en distintas horas del día, distintos días de la semana,…

Utilizaremos la siguiente **NOMENCLATURA**:

- ***Caso*** es cada uno de los posibles resultados que pueden ocurrir al efectuar una experiencia aleatoria. También se puede llamar ***suceso elemental***.
- ***Espacio muestral*** es el conjunto de todos los posibles casos que pueden ocurrir al efectuar una experiencia aleatoria. Se suele designar mediante las letras E u Ω, y también se denomina ***suceso universal***.
- ***Suceso*** es cualquier conjunto de sucesos elementales.
- El suceso universal, E, también se llama ***suceso seguro***, pues ocurre siempre.
- El suceso vacío, $\emptyset$, no contiene ningún caso, y se llama ***suceso imposible***, porque no ocurre nunca.

Ejemplo:

En la experiencia “Extraer una carta de la baraja”, el espacio muestral tiene 40 casos: cada uno de los naipes de la baraja (española).

$AS\ de\ BASTOS$ es un suceso elemental de “Extraer una carta de la baraja” y $3\ de\ COPAS$ sería otro suceso elemental.

$AS\ de\ BASTOS$ y $COPAS$ son dos sucesos de “Extraer una carta de la baraja”.

Utilizaremos los conocimientos sobre conjuntos para establecer las siguientes **RELACIONES y OPERACIONES CON SUCESOS:**

La ***unión*** de dos sucesos A y B, que se designa $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, es el suceso formado por todos los elementos de A y los de B.

La ***intersección*** de dos sucesos A y B, que se designa $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$, es el suceso formado por los elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B.

Observación

El suceso $A \cup B$ ocurre cuando lo hacen A o B o ambos.

El suceso $A \cap B$ ocurre cuando lo hacen a la vez A y B.

Ejemplo:

Consideremos el espacio muestral

$$E = CARTAS\ DE\ UNA\ BARAJA\ ESPAÑOLA\ (40\ CARTAS)$$

Y los sucesos

$$A = OROS \qquad\qquad B = FIGURAS$$

Entonces:

$A \cup B =$

$A \cap B =$

Siguiendo con las definiciones:

Dos sucesos son **incompatibles** cuando no tienen en común ningún suceso elemental. Es decir, es imposible que ocurran simultáneamente. Cuando dos sucesos A y B son incompatibles, se tiene que $A \cap B = \emptyset$.

Un suceso, $\boldsymbol{A'}$, se dice que es **contrario** del suceso A cuando entre ambos se reparten los elementos del espacio muestral. Es decir, siempre ocurre uno u otro, pero nunca ambos simultáneamente:

Si A' es el suceso contrario de A, entonces $A \cap A' = \emptyset$ y $A \cup A' = E$

Ejemplo:

En la baraja española, los sucesos $A = OROS$ y $B = ESPADAS$ son incompatibles.

El suceso contrario a $A = OROS$ es $A' = COPAS, ESPADAS\ o\ BASTOS$. El suceso A tiene 10 elementos y el suceso A' tiene 30.

Ejemplo:

Una bola tiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. La experiencia consiste en sacar una bola y anotar su número.

a) Espacio muestral: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
b) Considera estos sucesos:

$$A = \text{"}número\ primo\text{"} \qquad\qquad B = \text{"}múltiplo\ de\ 3\text{"}$$

Describe los sucesos siguientes:

$$A = \{2, 3, 5, 7\} \qquad\qquad A \cup B = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$$

$$B = \{3, 6, 9\} \qquad\qquad A \cap B = \{3\}$$

$$A' = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\} \qquad\qquad A \cup A' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = E$$

$$B' = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\} \qquad\qquad A \cap A' = \emptyset$$

II. PROBABILIDADES DE LOS SUCESOS.

El azar no es tan caprichoso como parece. Los sucesos que dependen del azar (sucesos aleatorios) ocurren con mayor o menor facilidad; es decir, con mayor o menor probabilidad. Y esta probabilidad se puede medir.

La **probabilidad de un suceso aleatorio** es el grado de confianza que podemos tener en que ese suceso ocurra. Se expresa mediante un número comprendido entre 0 y 1.

Para designar la probabilidad de un suceso, S, ponemos $P(S)$:

- Si $P(S)$ es próxima a cero, el suceso es poco probable.
- Si $P(S)$ es próxima a uno, el suceso es muy probable.

Hay dos formas de medir la probabilidad de un suceso:

EXPERIENCIAS IRREGULARES

Para hallar la probabilidad de un suceso correspondiente a una experiencia irregular, no queda más remedio que experimentar. Esto es, repetir la experiencia muchas veces, averiguar la frecuencia relativa y asignarle ese valor (aproximado) a la probabilidad. Cuantas más veces repitamos la experiencia, más fiable será el valor asignado.

EXPERIENCIAS REGULARES

Si la experiencia aleatoria se realiza con un instrumento regular, entra en juego la Ley de Laplace, que recordemos:

- Si el espacio muestral tiene n casos y la experiencia es *regular*, entonces todos ellos tienen la misma probabilidad, $1/n$.
- Si un suceso tiene k casos, entonces su probabilidad es k/n:

$$P(S) = \frac{número\ de\ casos\ favorables\ a\ S}{número\ total\ de\ casos\ posibles}$$

Ejemplo:

¿Cuál es la probabilidad de extraer el $5\ de\ BASTOS$ de una baraja española? ¿Y el $REY\ de\ COPAS$?

En ambos casos, la probabilidad es de $1/40$.

Ejemplo:

Lanzamos un dado con forma de octaedro, con sus caras numeradas del 1 al 8. Evalúa estas probabilidades:

a) $P(múltiplo\ de\ 3)$
b) $P(menor\ que\ 5)$
c) $P(número\ primo)$
d) $P(no\ múltiplo\ de\ 3)$

El primer paso es describir el espacio muestral de nuestra experiencia aleatoria:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

El número total de casos posibles es 8. Vamos a calcular cada una de las probabilidades que nos piden:

a) $P(múltiplo\ de\ 3)$

El suceso $A = \text{"múltiplos de 3"} = \{3, 6\}$ tiene 2 casos favorables, por lo que $P(múltiplo\ de\ 3) = \frac{2}{8} = 0{,}25$

b) $P(menor\ que\ 5)$

El suceso $B =$ "menor que 5" $= \{1, 2, 3, 4\}$ tiene 4 casos favorables, por lo que

$$P(menor\ que\ 5) = \frac{4}{8} = 0{,}5$$

c) $P(número\ primo)$

El suceso $C =$ "número primo" $= \{2, 3, 5, 7\}$ tiene 4 casos favorables también, por lo que

$$P(número\ primo) = 0{,}5$$

d) $P(no\ múltiplo\ de\ 3)$

El suceso $D =$ "$no\ múltiplo\ de\ 3$" $= \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ tiene 6 casos posibles, por lo que

$$P(no\ múltiplo\ de\ 3) = \frac{6}{8} = 0{,}75$$

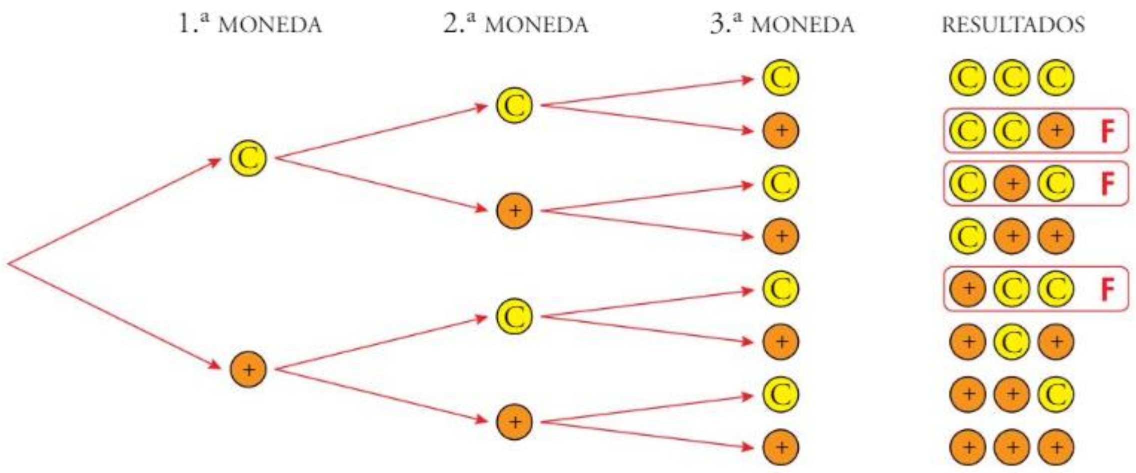
III. ALGUNAS ESTRATEGIAS PARA EL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

<u>**Diagrama de árbol para contar posibilidades**</u>

Ejemplo:

Lanzamos 3 monedas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos caras?

El siguiente esquema (***diagrama de árbol***) sirve para visualizar y contar todas las posibilidades:



Vemos que hay 8 casos, de los cuales 3 son favorables. Por tanto:

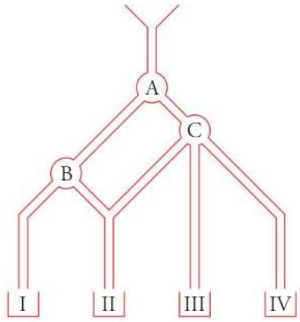
$$P(2\ CARAS) = \frac{casos\ con\ 2\ caras}{casos\ posibles} = \frac{3}{8}$$

Para obtener sistemáticamente todos los casos que se pueden producir cuando repetimos una misma experiencia o cuando encadenamos varias experiencias distintas, es muy útil el diagrama en árbol.

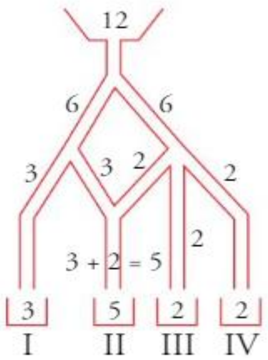
<u>Reparto de la probabilidad en una ramificación</u>

Ejemplo:

Observa el aparato que ves en el margen. Si echamos un perdigón en el embudo de arriba, ¿cuál es la probabilidad de que caiga en el depósito II? (Suponemos que en cada ramificación el perdigón tiene la misma probabilidad de ir a cada ramal).



Para resolver este problema, vamos a partir de un número de perdigones que, al llegar a cada distribuidor, se reparten de forma equitativa. Observa cómo se repartirán 12 perdigones:



Según esto, la probabilidad de que el perdigón caiga en el depósito II es: $P(II)=\frac{5}{12}$

Análogamente: $P(I)=\frac{3}{12}$, $P(III)=\frac{2}{12}$, $P(IV)=\frac{2}{12}$

¿Por qué hemos tomado 12 perdigones? Porque hay dos distribuidores con 2 salidas y uno con 3 $(2\cdot 2\cdot 3=12)$.

¿Qué pasaría si hubiéramos tomado 24 perdigones? Pues que se duplicarían los que caen en cada depósito y las probabilidades así obtenidas serían las mismas.

¿Y si tomáramos 16 perdigones? Al llegar al distribuidor C no se podrían repartir equitativamente y eso nos haría ver que esa cantidad (16) no es adecuada para resolver el problema.

<u>Tablas de contingencia</u>

Ejemplo:

La tabla del margen describe la composición de un equipo de fútbol. Si señalamos al azar a uno de los jugadores, hallar la probabilidad de que sea:

	NACION.	EXTRAN.
TITULARES	7	4
SUPLENTES	8	1

a) Titular b) Extranjero c) Nacional y suplente

d) ¿Cuál es la probabilidad de ser titular siendo extranjero?

e) ¿Cuál es la probabilidad de ser titular siendo nacional?

	N	E	
TITULARES	7	4	11
SUPLENTES	8	1	9
	15	5	20

Para resolverlo, ampliamos la tabla, en el margen, sumando filas y columnas.

a) De los 20 futbolistas, 11 son titulares. Por tanto, $P(TITULAR)=\frac{11}{20}$

b) Hay 5 extranjeros. Por tanto, $P(EXTRANJERO)=\frac{5}{20}$

c) Hay 8 nacionales suplentes. Por tanto, $P(NACIONAL\ Y\ SUPLENTE)=\frac{8}{20}$

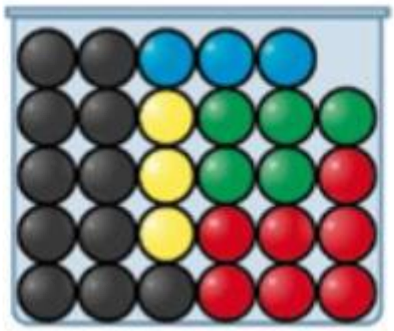
d) Hay 5 extranjeros y, de ellos, 4 titulares: $P(TITULAR\ SIENDO\ EXTRANJERO)=\frac{4}{5}=0{,}80$

e) Hay 15 nacionales y, de ellos, 7 titulares: $P(TITULAR\ SIENDO\ NACIONAL)=\frac{7}{15}=0{,}47$

EJERCICIOS PARA PRACTICAR:

1. Indica el espacio muestral correspondiente a cada una de estas experiencias aleatorias:
   a. Lanzar dos monedas y contar el número de cruces.
   b. Sacar una bola de esta urna y ver qué número se obtiene:

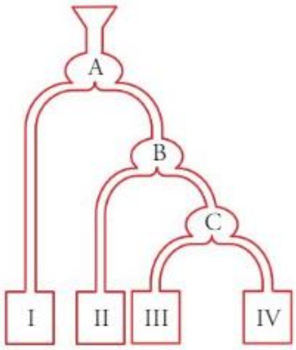
   c. Sacar una moneda del bolsillo y observar su valor.
   d. Tirar un dado con forma de tetraedro y ver el número que has obtenido.
2. Una experiencia consiste en lanzar un dado y, después, lanzar una moneda. los casos son $1C$, $1+$, … , $6C$, $6+$.
   a. Escribe el espacio muestral completo.
   b. El suceso $NÚMERO\ MAYOR\ QUE\ 5\ y\ CARA$ sólo tiene un caso: $6C$. Describe el suceso $NÚMERO\ PAR\ y\ CARA$ enumerando todos sus casos.
   c. Enumera los casos del suceso $CUALQUIER\ NÚMERO\ y\ CRUZ$.
3. Una bolsa contiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. La experiencia consiste en extraer una bola y anotar su número.
   a. ¿Cuál es el espacio muestral?
   b. Consideramos los sucesos: $A =$ "$obtener\ número\ primo$", $B =$ "$obtener\ múltiplo\ de\ 3$".
      i. Escribe los sucesos A, A', B, B', $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup A'$, $B \cap B'$
      ii. Calcula $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cup A')$, $P(B \cap B')$
4. Se extrae una bola al azar de una urna como la siguiente:

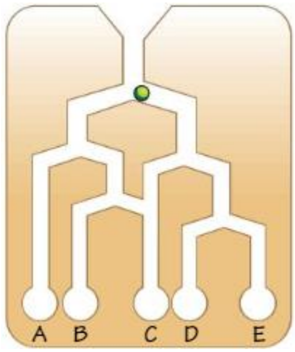


   Indica la probabilidad de que:

   a. Sea roja.
   b. No sea negra.
5. Calcula las siguientes probabilidades asociadas al lanzamiento de un dado correcto:
   a. El resultado es múltiplo de 3
   b. El resultado es múltiplo de 2
   c. El resultado es mayor que 1
   d. El resultado es menor que 5
   e. El resultado es menor que 1
6. En una cierta región, el 15% de los habitantes padecen una alergia, y de estos, el 60% tienen alergia al polen. ¿Qué probabilidad podemos asignar a que tomando una persona al azar no tenga alergia al polen?

7. En mi maleta tengo cuatro camisetas: una blanca de manga corta, una negra de manga larga y una negra de manga larga con capucha. Además, tengo dos pantalones: uno azul y otro verde. Tengo que salir de madrugada y no quiero dar la luz para no despertar a los que duermen en la habitación, por lo que cojo a oscuras, al azar, una camiseta y un pantalón.
    a. Escribe el espacio muestral. ¿Cuál es la probabilidad de cada caso?
    b. Describe el suceso $CAMISETA\ NEGRA\ y\ PANTALÓN\ AZUL$ enumerando todos sus casos. ¿Cuál es la probabilidad de este suceso?
    c. Describe el suceso $CAMISETA\ DE\ MANGA\ CORTA\ y\ PANTALÓN\ VERDE$ enumerando todos sus casos. ¿Cuál es su probabilidad?
8. Calcula, en cada caso, la probabilidad de que la bolita caiga en los distintos recintos:

a. 

b. 

9. Los alumnos de una clase se distribuyen del siguiente modo:

	CHICAS	CHICOS
CON GAFAS	3	6
SIN GAFAS	12	10

Escogemos al azar a una persona de esa clase. Calcula la probabilidad de que:

    a. Sea chica.
    b. Tenga gafas.
    c. Sea chica con gafas.
    d. Sabiendo que es chico, que tenga gafas.
10. De los 30 estudiantes que somos en clase, hay 18 chicas, de las cuales 12 han aprobado todo. Si en total ha habido 10 personas con alguna asignatura suspensa y elegimos al azar a alguien de clase, halla la probabilidad de que:
    a. Sea chico y haya aprobado todo
    b. Habiendo suspendido alguna, sea chica.