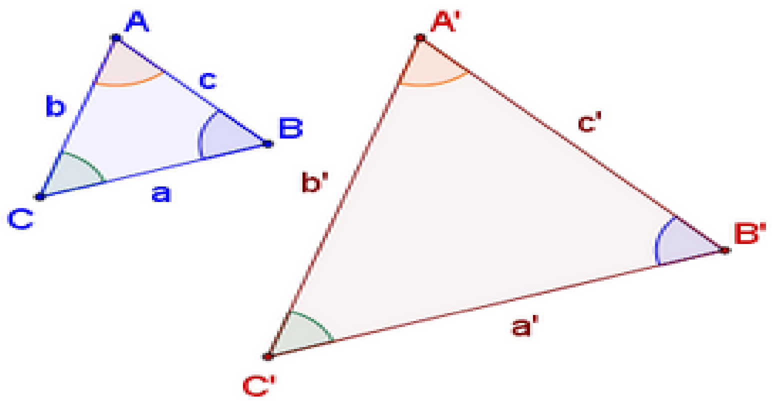
I. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

La trigonometría es una rama de las matemáticas que se basa en la semejanza de triángulos:

La razón (cociente) entre dos lados de un triángulo rectángulo es igual a la razón entre los lados correspondientes de cualquier otro triángulo semejante a él.

Esto es, si los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son semejantes:



Sabemos, por el teorema de Tales, que:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \qquad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \qquad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

Teniendo presente este hecho, pasamos a definir las razones trigonométricas

SENO, COSENO y TANGENTE de un ángulo agudo

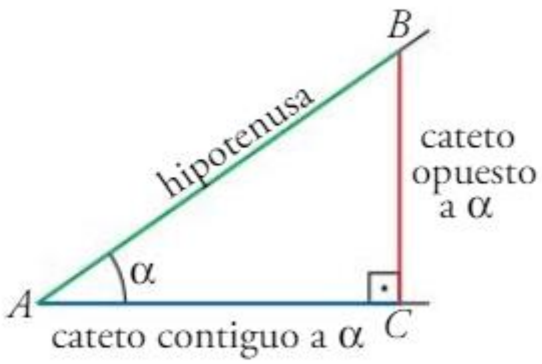
Sobre un ángulo agudo, α, construimos un triángulo rectángulo ABC.

A las siguientes relaciones las vamos a llamar **razones trigonométricas** del ángulo α:

$$\boldsymbol{seno}\ \alpha = \frac{longitud\ del\ cateto\ opuesto\ a\ \alpha}{longitud\ de\ la\ hipotenusa} \qquad sen\ \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

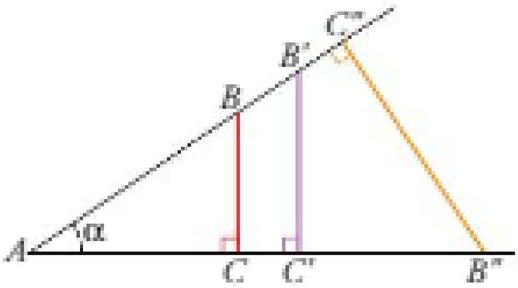
$$\boldsymbol{coseno}\ \alpha = \frac{longitud\ del\ cateto\ contiguo\ a\ \alpha}{longitud\ de\ la\ hipotenusa} \qquad \cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

$$\boldsymbol{tangente\ \alpha} = \frac{longitud\ cateto\ opuesto\ a\ \alpha}{longitud\ cateto\ contiguo\ a\ \alpha} \qquad tg\ \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$



Observación:

Las razones trigonométricas dependen del ángulo, no del triángulo



Teniendo en cuenta el dibujo, y basándonos en semejanza de triángulos, veamos que las razones trigonométricas del ángulo α son las mismas (salvo pequeñas diferencias que se puedan deber a imperfecciones en la medida o redondeos):

	En ABC	**En $AB'C'$**	**En $AB''C''$**
$\boldsymbol{\cos\alpha}$	$\overline{AC}/\overline{AB}$	$\overline{AC'}/\overline{AB'}$	$\overline{AC''}/\overline{AB''}$

Pero como los triángulos ABC, $AB'C'$ y $AB''C''$ son semejantes (ya que son triángulos rectángulos con un ángulo agudo igual), por el teorema de Tales deducimos que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}}=\frac{\overline{AC''}}{\overline{AB''}}$$

Por lo que es indiferente calcular el $coseno$ sobre cualquiera de los triángulos. Y lo mismo ocurre para las razones $seno$ y $tangente$.

II. RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

Los valores de $seno$, $coseno$ y $tangente$ de un mismo ángulo no son independientes, sino que existen una serie de relaciones que nos permiten, sabiendo uno de los valores, obtener los otros dos. Las relaciones que ligan estos valores son a lo que llamaremos **relaciones trigonométricas fundamentales**:

$$(sen\ \alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1 \qquad\qquad \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}=tg\ \alpha$$

Estas igualdades son fáciles de demostrar sin más que aplicar la definición de cada una de ellas, y el teorema de Pitágoras para la primera de ellas.

Ejemplo 1:

$sen\ \alpha=0{,}6$. Calcula $\cos\alpha$ y $tg\ \alpha$.

Dado el valor del $seno$, vamos a utilizar la primera de las relaciones trigonométricas para hallar el $coseno$:

$$(sen\ \alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1 \ \Rightarrow\ (0{,}6)^2+(\cos\alpha)^2=1 \ \Rightarrow\ (\cos\alpha)^2=1-0{,}36$$

$$\Rightarrow\ (\cos\alpha)^2=0{,}64 \ \Rightarrow\ \cos\alpha=\sqrt{0{,}64}=0{,}8$$

(Tomamos solo la raíz positiva). Hallamos ahora el valor de la tangente usando la segunda relación:

$$tg\ \alpha=\frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} \ \Rightarrow\ tg\ \alpha=\frac{0{,}6}{0{,}8}=0{,}75$$

Ejemplo 2:

$tg\ \beta = 0{,}53$. Calcula $sen\ \beta$ y $\cos\beta$.

Utilizando ambas relaciones trigonométricas, formamos un sistema de ecuaciones donde llamamos s al $seno$ y c al $coseno$:

$$\begin{cases} \frac{s}{c} = 0{,}53 \\ s^2 + c^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad s = 0{,}53 \cdot c \quad \Rightarrow \quad (0{,}53c)^2 + c^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 0{,}2809c^2 + c^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}2809c^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad c^2 = \frac{1}{1{,}2809} \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{\frac{1}{1{,}2809}} = 0{,}88 \quad \Rightarrow \quad s = 0{,}53 \cdot 0{,}88 = 0{,}47$$

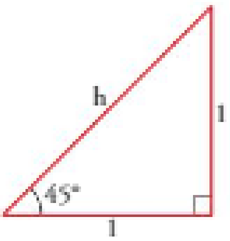
III. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CONOCIDOS

Los triángulos rectángulos cuyos ángulos agudos son $45°$,$30°$ o $60°$ aparecen con gran frecuencia, por lo que resulta útil conocer sus razones trigonométricas:

- ***Razones trigonométricas de $45°$:***

Consideramos un triángulo rectángulo de catetos igual a 1, cuya hipotenusa valdrá:

$$h = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$



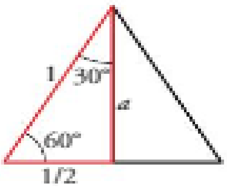
Por tanto,

$$sen\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad tg\ 45° = 1$$

- ***Razones trigonométricas de $30°$ y de $60°$:***

Consideramos un triángulo equilátero de lado 1, y calculamos su altura:

$$a = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Por tanto,

$$sen\ 30° = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad tg\ 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

y,

$$sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad\qquad tg\ 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 3:

Completa la siguiente tabla de razones trigonométricas:

$sen\ \alpha$	0,94	$1/2$	$\sqrt{2}/2$
$\cos\alpha$	0,34	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$
$tg\ \alpha$	2,76	$\sqrt{3}/3$	1

1) Sabiendo que $sen\ \alpha = 0{,}94$:

$$(sen\ \alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1 \;\Rightarrow\; (0{,}94)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1 \;\Rightarrow\; (\cos\alpha)^2 = 1 - 0{,}8836$$

$$\Rightarrow\; \cos\alpha = \sqrt{0{,}1164} = 0{,}34$$

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} \;\Rightarrow\; tg\ \alpha = \frac{0{,}94}{0{,}34} = 2{,}76$$

2) Sabiendo que $\cos\alpha = \sqrt{3}/2$:

$$(sen\ \alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1 \;\Rightarrow\; (sen\ \alpha)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \;\Rightarrow\; (sen\ \alpha)^2 = 1 - \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow\; sen\ \alpha = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} \;\Rightarrow\; tg\ \alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3) Sabiendo que $tg\ \alpha = 1$:

$$\begin{cases} (sen\alpha)^2 + (cos\alpha)^2 = 1 \\ \dfrac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} = 1 \end{cases} \;\Rightarrow\; sen\ \alpha = \cos\alpha \;\Rightarrow\; (\cos\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

$$\Rightarrow\; 2\cdot(\cos\alpha)^2 = 1 \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow\; sen\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

IV. UTILIZACIÓN DE LA CALCULADORA EN TRIGONOMETRÍA

Remito para este apartado a las páginas 148 y 149 de vuestro libro, donde os explican las características de vuestra calculadora a la hora de usar ángulos y razones trigonométricas.

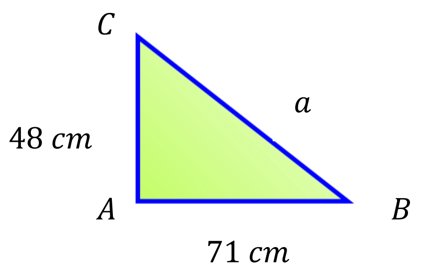
V. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo es hallar todos sus elementos (ángulos y lados) a partir de algunos elementos conocidos.

- **Conocidos dos lados:**
  - El tercer lado se halla mediante el teorema de Pitágoras.
  - Cada uno de los ángulos agudos se halla a partir de la razón trigonométrica que lo relaciona con los dos lados conocidos.

Ejemplo 4:

Los dos catetos de un triángulo rectángulo miden $48\ cm$ y $71\ cm$. Halla el resto de elementos.



Hallamos la hipotenusa, a, mediante el teorema de Pitágoras:

$$a = \sqrt{71^2 + 48^2} = 85{,}7$$

Y los ángulos:

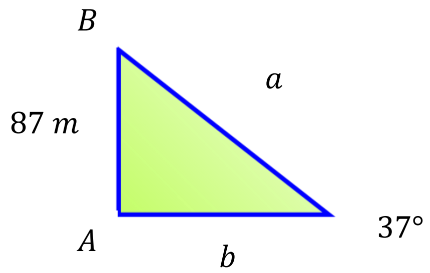
$$tg\ B = \frac{48}{71} = 0{,}676 \quad \Rightarrow \quad B = 34°\ 3'39''$$

$$tg\ C = \frac{71}{48} = 1{,}479 \quad \Rightarrow \quad C = 55°\ 56'20''$$

- **Conocidos un lado y un ángulo:**
  - Otro lado se halla mediante la razón trigonométrica que lo relaciona con el lado y el ángulo conocidos.
  - El otro ángulo agudo es complementario del que conocemos.

Ejemplo 5:

En un triángulo rectángulo, un ángulo agudo mide $37\ °$, y el cateto opuesto $87\ m$. Resuelve el triángulo.



Calculamos el cateto contiguo:

$$tg\ 37° = \frac{87}{b} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{87}{tg\ 37°} = 115{,}45$$

Y la hipotenusa:

$$sen\ 37° = \frac{87}{a} \ \Rightarrow \ a = \frac{87}{sen\ 37°} = 144{,}56$$

El otro ángulo agudo será complementario del dado:

$$B = 90° - 37° = 53°$$

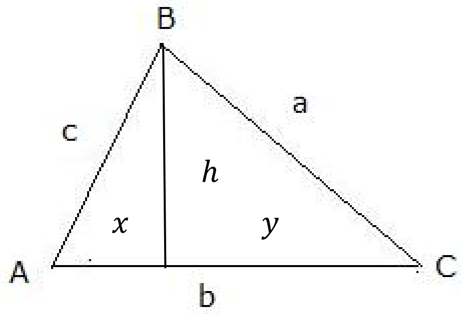
VI. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Cualquier triángulo no rectángulo puede ser resuelto mediante la **estrategia de la altura**. Consiste en elegir una de las alturas del triángulo de modo que, al trazarla, se obtengan dos triángulos rectángulos resolubles por separado o conjuntamente.

Veamos cómo llevar esta estrategia a la práctica mediante un par de ejemplos.

Ejemplo 6:

Resuelve el triángulo ABC, sabiendo que $\overline{AB} = 37\ cm$, $\overline{AC} = 50\ cm$ y $\hat{A} = 32°$.



Trazamos la altura sobre el lado AC (aunque podríamos haber trazado la altura sobre AB), y calculamos el valor de la altura:

$$sen\ A = \frac{h}{37} \ \Rightarrow \ h = 37 \cdot sen\ 32° = 19{,}6\ cm$$

Calculamos también el valor del cateto x en el triángulo auxiliar que hemos trazado:

$$\cos A = \frac{x}{37} \ \Rightarrow \ x = 37 \cdot \cos 32° = 31{,}4\ cm$$

Por lo tanto, $y = 50 - 31{,}4 = 18{,}6 \ \Rightarrow \ a = \sqrt{h^2 + y^2} = \sqrt{19{,}6^2 + 18{,}6^2} = 27{,}02\ cm$

Hallamos el valor de C utilizando razones trigonométricas en el triángulo de la derecha:

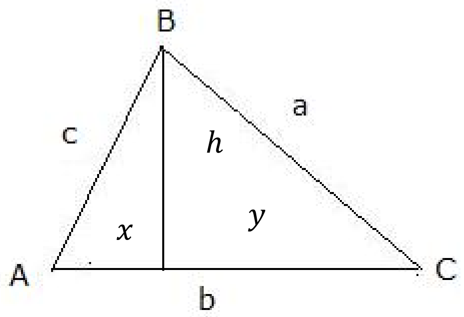
$$tg\ C = \frac{h}{y} = \frac{196}{18{,}6} \ \Rightarrow \ C = 46{,}5°$$

De donde, teniendo en cuenta que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180 °:

$$B = 180° - (32° + 46{,}5°) = 101{,}5°$$

Ejemplo 7:

Resuelve el triángulo ABC del que sabemos que $\overline{AC} = 100\ cm$, $A = 42°$ y $C = 18°$.



Hallamos el ángulo que nos falta:

$$B = 180° - (48° + 18°) = 34°$$

Vamos a calcular el valor de los lados x e y planteando un sistema:

$$\begin{cases} tg\ 48° = \dfrac{h}{x} \\ tg\ 18° = \dfrac{h}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = x \cdot tg\ 48° \\ h = y \cdot tg\ 18° \end{cases}$$

Que, utilizando el método de igualación y teniendo en cuenta que $x + y = 100$, resulta:

$$\begin{cases} x \cdot tg\ 48° = y \cdot tg\ 18° \\ x + y = 100 \end{cases}$$

Resolviendo por sustitución, por ejemplo, obtenemos:

$$y = 77{,}37\ cm \qquad\qquad x = 22{,}63\ cm$$

Con estos resultados en mente, y utilizando razones trigonométricas, vamos a calcular a y c:

$$\cos 18° = \frac{y}{a} \Rightarrow a = \frac{77{,}37}{\cos 18°} = 81{,}35\ cm$$

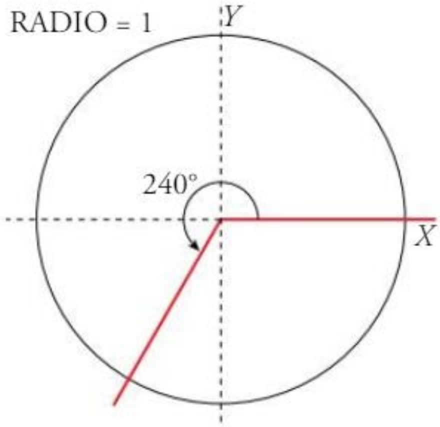
$$\cos 48° = \frac{x}{c} \Rightarrow c = \frac{22{,}63}{\cos 48°} = 33{,}82\ cm$$

VII. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 0° A 360°

Sobre un sistema de coordenadas, trazamos una circunferencia de radio 1 y centro el origen. La llamamos **circunferencia goniométrica**. En ella, es sencillo definir y visualizar las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

Los ángulos se sitúan sobre la circunferencia goniométrica del siguiente modo:

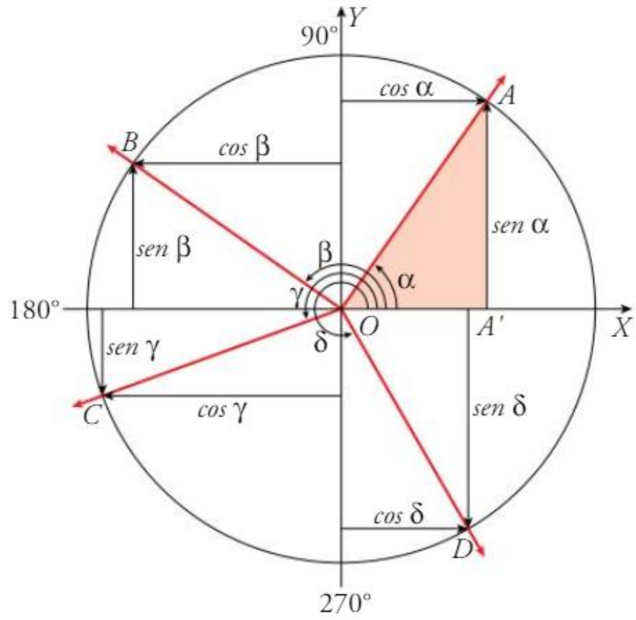
- Su vértice en el centro.
- Uno de los lados se hace coincidir con el semieje positivo de las X
- El otro lado se sitúa donde corresponda, abriéndose el ángulo en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj.



Seno y coseno de un ángulo entre $0°$ y $360°$

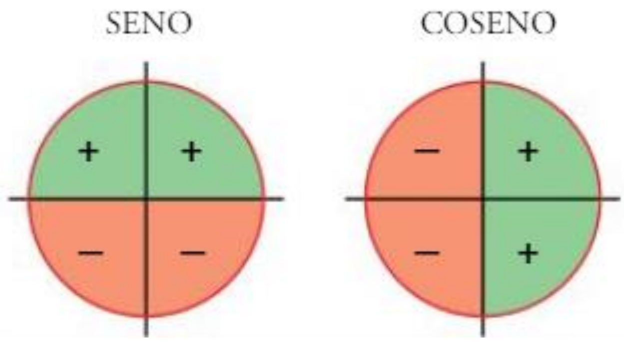
Si situamos un ángulo cualquiera, ϕ, sobre la circunferencia goniométrica, definimos el coseno y el seno del ángulo como las coordenadas del punto en el que el segundo lado del ángulo corta a la circunferencia.

Observa que, aplicando los conocimientos de semejanza, esta definición es compatible con los conceptos de seno y coseno para ángulos agudos.



Observación:

Al igual que las coordenadas de un punto, los signos del seno y del coseno de un ángulo dependen del cuadrante en el que se sitúe el segundo lado del ángulo.

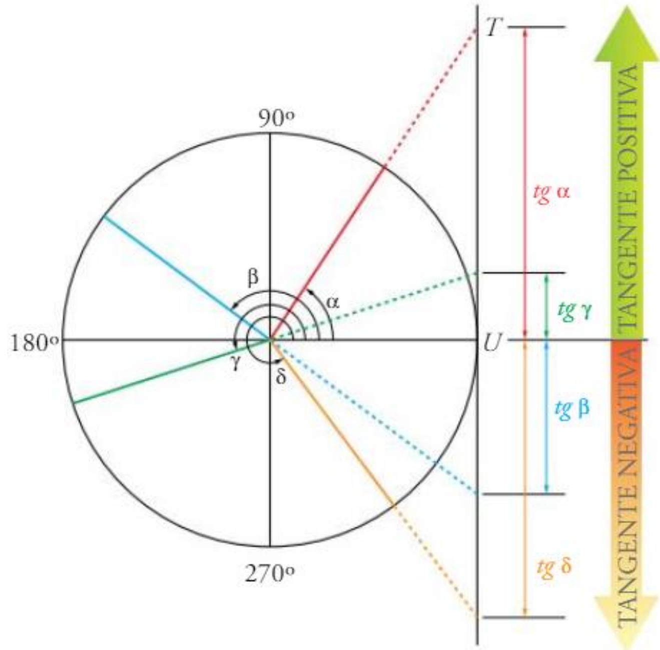


Tangente de un ángulo entre $0°$ y $360°$

Situamos un ángulo cualquiera, α, sobre la circunferencia goniométrica. Trazamos la recta t, tangente a la circunferencia en $U(1, 0)$.

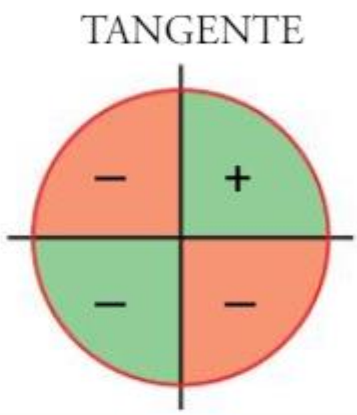
El segundo lado del ángulo, o su prolongación, corta a la recta t en un punto T. La tangente del ángulo es igual a la medida del segmento UT, con el signo correspondiente (positivo hacia arriba y negativo hacia abajo).

Los ángulos $90°$ y $270°$ no tienen tangente.



Observación:

La tangente es positiva en los cuadrantes primero y tercero, y negativa en los cuadrantes segundo y cuarto.



Ejemplo 8:

Indica el signo de cada una de estas razones trigonométricas:

a. $sen\ 185° \rightarrow negativo$
b. $\cos 320° \rightarrow positivo$
c. $tg\ 100° \rightarrow negativo$
d. $\cos 350° \rightarrow positivo$
e. $\cos 120° \rightarrow negativo$
f. $tg\ 95° \rightarrow negativo$
g. $\cos 275° \rightarrow positivo$
h. $sen\ 85° \rightarrow positivo$
i. $tg\ 265° \rightarrow positivo$

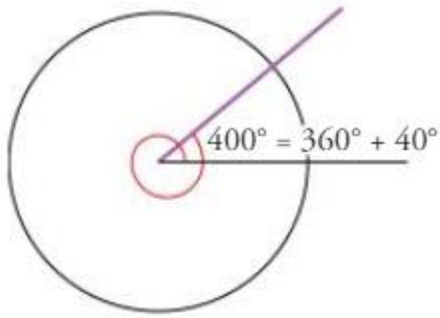
Ejemplo 9:

Indica en qué cuadrante se encuentra cada uno de los ángulos α, β, γ y ϕ, y el signo de la razón trigonométrica que falta:

a. $sen\ \alpha < 0$ y $tg\ \alpha > 0 \ \Rightarrow\ 180° < \alpha < 270°$; $\cos \alpha < 0$
b. $\cos \beta > 0$ y $tg\ \beta < 0 \ \Rightarrow\ 270° < \beta < 360°$; $sen\ \beta < 0$
c. $sen\ \gamma < 0$ y $\cos \gamma < 0 \ \Rightarrow\ 180° < \gamma < 270°$, $tg\ \gamma > 0$
d. $\cos \phi > 0$ y $sen\ \phi < 0 \ \Rightarrow\ 270° < \phi < 360°$; $tg\ \phi < 0$

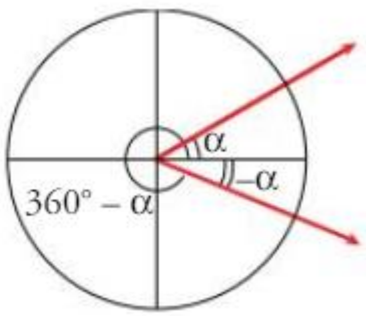
VIII. ÁNGULOS DE MEDIDAS CUALESQUIERA. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.

Los valores comprendidos entre $0°$ y $360°$ nos permiten medir cualquier ángulo. Pero también podemos darle sentido a otras medidas. Por ejemplo, podemos interpretar $400°$ como una vuelta completa $(360°)$ más un ángulo de $40°$. Es decir, $400° = 360° + 40°$. Las razones trigonométricas de $400°$ serán, pues, las mismas que las de $40°$.



En general, si $\alpha \in [0°, 360°)$ y $\beta = \alpha + 360° \cdot n$, donde n es un número entero, entonces el ángulo β es esencialmente igual a α y, por tanto, las razones trigonométricas de β son las mismas que las de α.

De forma similar, un ángulo comprendido entre $180°$ y $360°$ se puede designar con medida negativa. Por ejemplo, un ángulo de $300°$ puede expresarse como: $300° = 300° - 360° = -60°$.

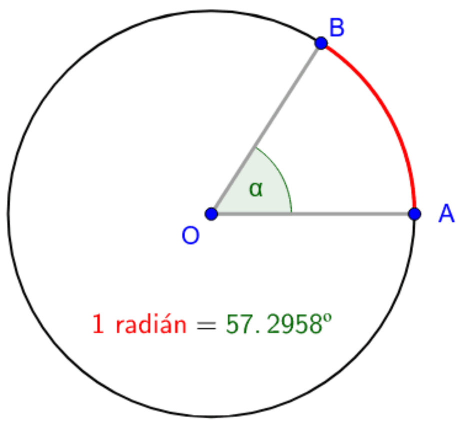


IX. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS. EL RADIÁN.

Llamaremos **radián** a un ángulo tal que el arco que abarca tiene la misma longitud que el radio con el que se ha trazado. Es decir, α es un radián porque la longitud del arco AB es igual a la del radio:

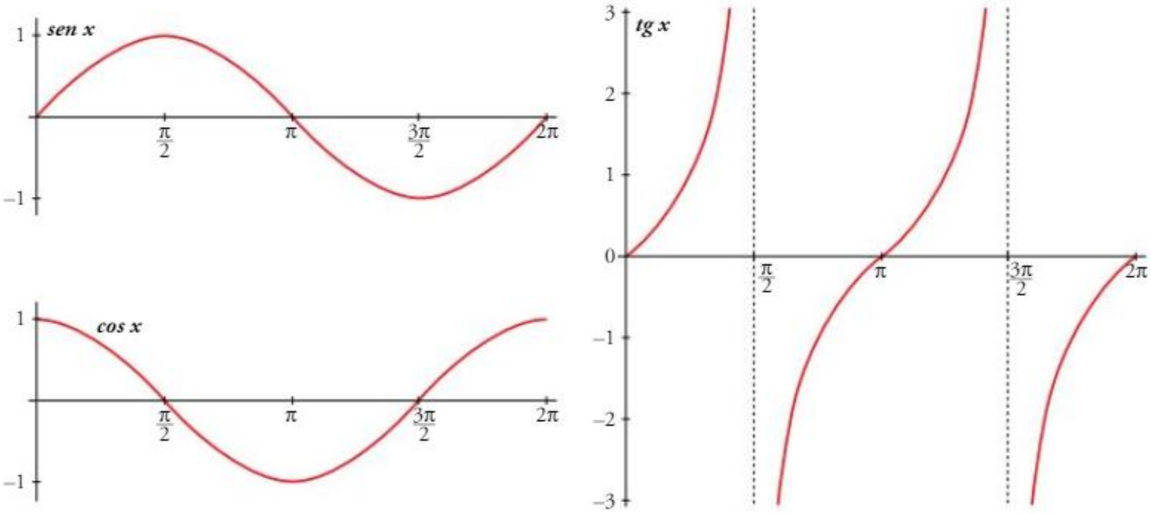
$$longitud\ de\ \widehat{AB} = \overline{OA}$$

Para pasar de grados a radianes se utiliza la igualdad $\alpha° = \frac{2\pi}{360}\alpha\ rad$



Las funciones trigonométricas en $[0, 2\pi]$

Podemos construir la función seno, coseno y tangente tomando como unidad de medida de ángulos el radián:



Estas tres funciones, $y = sen\ x$, $y = \cos x$, $y = tg\ x$, definidas en $[0, 2\pi]$ en las que la abscisa es la medida del ángulo en radianes y la ordenada el valor de la razón trigonométrica, son las llamadas **funciones trigonométricas.**

Las funciones trigonométricas definidas en todo $\mathbb{R}$.

Extendiendo estas tres funciones de forma periódica a toda la recta real, obtenemos: