Tema 8: Geometría analítica__________________________ 4º ESO

I. VECTORES EN EL PLANO

Ya sabemos que, en un sistema de ejes cartesianos, cada punto se describe mediante su coordenada x y su coordenada y.

Ejemplo:

$A(2,2)$, $B(5,7)$

La *flecha* que va de A a B se llama **vector** y se representa por $\overrightarrow{AB}$. Es el vector de **origen** A y **extremo** B. Este vector lo que nos muestra es la variación en el sentido del eje X y en el eje Y. Lo que denominamos las **coordenadas** del vector $\overrightarrow{AB}$.

En forma general, un vector se denota con una letra (habitualmente u, v,…) con una flecha encima, para indicar que es vector. Si se conocen el origen y extremo, se utilizan las letras de los puntos que lo forman para nombrar al vector.

Las coordenadas de un vector se obtienen restando las coordenadas de su origen a las de su extremo (final menos inicial).

Ejemplo:

$$\overrightarrow{AB} = (5,7) - (2,2) = (5-2, 7-2) = (3,5)$$

<u>Propiedades de los vectores:</u> un vector queda unívocamente determinado por:

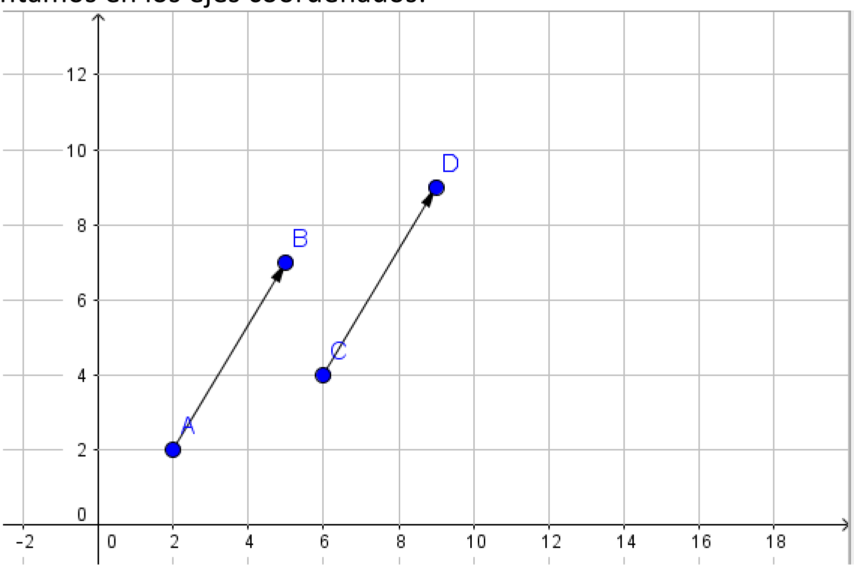
- **Módulo** de $\overrightarrow{AB}$, se denota por $|\overrightarrow{AB}|$: distancia de A a B. Si el valor del módulo es 1, se dice que el vector es **unitario**.
- **Dirección** de un vector, que es la dirección de la recta en la que se encuentra y todas las paralelas.
- **Sentido** de un vector: cada dirección admite dos sentidos.

Dos vectores son **iguales** cuando tienen el mismo módulo, dirección y sentido. En ese caso, tienen las mismas coordenadas.

Ejemplo 1:

Consideremos los puntos $A(2,2)$, $B(5,7)$, $C(6,4)$ y $D(9,9)$. Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son iguales:

- Si los representamos en los ejes coordenados:



- Si calculamos sus coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = (5,7) - (2,2) = (5-2, 7-2) = (3,5)$$
$$\overrightarrow{CD} = (9,9) - (6,4) = (9-6, 9-4) = (3,5)$$

Ejemplo 2:

Dado el vector $\overrightarrow{AB} = (3,5)$, y sabiendo que el origen es el punto de coordenadas $A(2,2)$, podemos hallar las coordenadas del extremo sin más que tener en cuenta la regla de cálculo del vector:

$$\overrightarrow{AB} = B - A \;\Rightarrow\; \overrightarrow{AB} + A = B \;\Rightarrow\; B = (3,5) + (2,2) = (5,7)$$

EJERCICIOS PARA PRACTICAR:

Ejercicio 1:

Representa los vectores $\overrightarrow{AB} = (6, -2)$ y $\overrightarrow{CD} = (6, -2)$, siendo $A(3, 3)$, $B(9, 1)$, $C(-3, 2)$ y $D(3, 0)$.

Ejercicio 2:

Sean los puntos $A(10, 2)$ y $B(3, 7)$. Halla las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$.

Ejercicio 3:

Se sabe de un vector que tiene por coordenadas $\overrightarrow{AB} = (5, 4)$. Halla las coordenadas del origen sabiendo que su extremo es $B(5, 2)$.

Ejercicio 4:

Dado el vector $\vec{u} = (2, -1)$ y dos vectores iguales a $\vec{u}$: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, determinar las coordenadas de B y C sabiendo que $A(1, -3)$ y $D(2, 0)$.

II. OPERACIONES CON VECTORES

Al igual que ocurre con los números reales, los vectores también tienen una serie de operaciones asociadas:

- **Producto de un número por un vector:**

El producto de un número k por un vector $\vec{v}$ es otro vector $k\vec{v}$ que tiene:

- Módulo: igual al producto del módulo de $\vec{v}$ por el valor absoluto de k: $|\, k\vec{v}\, | = |k| \cdot |\vec{v}|$
- Dirección: la misma de $\vec{v}$
- Sentido: el mismo de $\vec{v}$ si k es positivo, o su opuesto si k es negativo.

Las coordenadas del vector $k\vec{v}$ se obtienen multiplicando por k todas las coordenadas de $\vec{v}$.

<u>Casos particulares:</u>

→ Si $k = 0$, obtenemos el **vector cero $\vec{0}$**. No es más que un vector en el que tanto el origen como el extremo son el mismo punto, por lo que su módulo será cero, y carece de dirección.

→ Si $k = -1$, obtenemos el vector **opuesto de $\vec{v}$, $-\vec{v}$.**

Ejemplo 3:

Dado el vector $\vec{v} = (3, -4)$:

$$-\vec{v} = (-3, 4) \qquad -3\vec{v} = \big(3 \cdot (-3), (-4) \cdot (-3)\big) = (-9, 12)$$

$$2\vec{v} = (3 \cdot 2, (-4) \cdot 2) = (6, -8)$$

- **Suma de vectores:**

Para sumar dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de forma gráfica, se colocan un vector a continuación del otro, de forma que el extremo del primero coincida con el origen del segundo.

La suma de ambos vectores será el vector que obtenemos desde el origen del primer vector hasta el extremo del segundo.

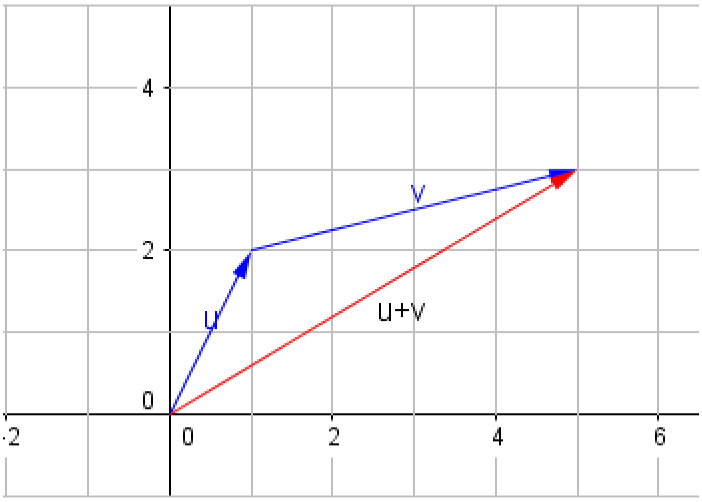
Las coordenadas del vector $\vec{u} + \vec{v}$ se obtienen sumando las coordenadas de $\vec{u}$ con las de $\vec{v}$.

Ejemplo 4:

Dados $\vec{u} = (1, 2)$ y $\vec{v} = (4, 1)$, calculamos

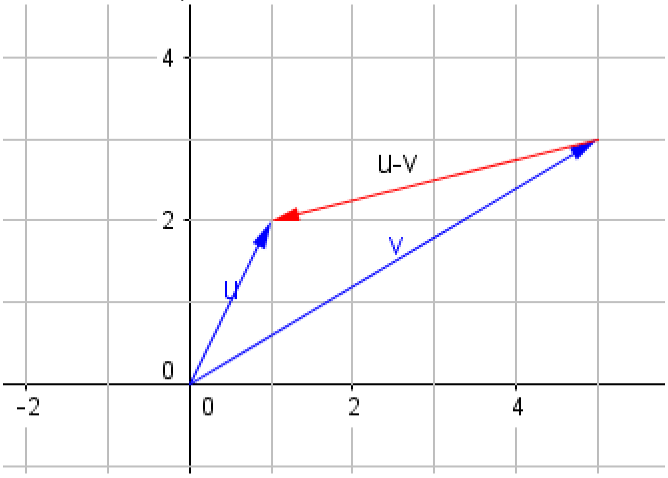
$$\vec{u} + \vec{v} = (1 + 4, 2 + 1) = (5, 3)$$

Gráficamente:



- **Resta de vectores:**

Para restar dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de forma gráfica, los colocamos ambos con el origen en el mismo punto, y el vector diferencia será el que resulte de unir ambos extremos.
Otra forma de pensarlo es sumar el vector opuesto y aplicar las propiedades del apartado anterior.
Las coordenadas del vector $\vec{u}-\vec{v}$ se obtienen restando a las coordenadas de $\vec{u}$ las de $\vec{v}$.
Ejemplo 5:
Dados los vectores $\vec{u}=(1,2)$ y $\vec{v}=(5,3)$, calculamos
$$\vec{u}-\vec{v}=(1-5,2-3)=(-4,-1)$$
Gráficamente,



- **Combinación lineal de vectores:**

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y dos números reales a y b, diremos que el vector $a\vec{u}+b\vec{v}$ es una **combinación lineal** de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen direcciones distintas, cualquier vector del plano puede escribirse como combinación lineal de ellos, sin más que resolver un sistema de ecuaciones.
Ejemplo 6:
Dados los vectores $\vec{u}=(1,2)$ y $\vec{v}=(3,4)$, expresar el vector $\vec{w}=(5,6)$ como combinación lineal de ellos.
Debemos encontrar números a y b tales que:
$$a\vec{u}+b\vec{v}=\vec{w} \quad \Leftrightarrow \quad a\cdot(1,2)+b\cdot(3,4)=(5,6)$$
Realizando las cuentas del primer miembro de la igualdad:
$$(a+3b,2a+4b)=(5,6)$$
Para que ambos vectores sean iguales, deben tener las mismas coordenadas, de donde sale el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} a+3b=5 \\ 2a+4b=6 \end{cases}$$
Que, resolviendo por el método que queráis, obtenemos: $a=-1$, $b=2$
EJERCICIOS PARA PRACTICAR:
Ejercicio 5:
Dados los vectores $\vec{u}=(1,2)$, $\vec{v}=(3,4)$ y $\vec{w}=(5,6)$, calcula las coordenadas de:

a) $3\vec{u}$
b) $\vec{u}+\vec{v}$
c) $\vec{u}-\vec{w}$
d) $2\vec{u}-\vec{v}+3\vec{w}$

Representa en los ejes cartesianos los vectores y las operaciones.
Ejercicio 6:
Dados los vectores $\vec{u}=(1,2)$, $\vec{v}=(3,4)$ y $\vec{w}=(7,8)$, calcula los valores de x e y que cumplen:
$$x\vec{u}+y\vec{v}=\vec{w}$$

III. VECTORES QUE REPRESENTAN PUNTOS

Si un vector tiene su origen en el origen de coordenadas, O, entonces las coordenadas del vector coinciden con las del extremo.

Es por ello que cualquier punto del plano puede describirse como un vector de origen en O.

Ejemplo 7:

Dado el punto $A(1,1)$, le podemos asociar el vector $\vec{v} = \overrightarrow{OA} = (1,1)$.

IV. PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Dado un segmento de extremos las coordenadas de los puntos A y B, que denotaremos por AB, podemos calcular las coordenadas del **punto medio**, $\boldsymbol{M}$, como la semisuma de las coordenadas de los extremos.

Esto es, si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, obtenemos el punto medio como:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Podemos decir también que el punto B es el **simétrico de $\boldsymbol{A}$** respecto a M.

Ejemplo 8:

Dados los puntos $A(1,2)$ y $B(3,4)$, el punto medio del segmento AB será

$$M\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = \left(\frac{4}{2}, \frac{6}{2}\right) = (2,3)$$

Ejemplo 9:

El simétrico del punto $A(1,2)$ respecto de $M(3,4)$ será el punto B cuyas coordenadas cumplan que M es el punto medio del segmento AB. Esto es, si llamamos a las coordenadas de $B(x,y)$:

$$(3,4) = \left(\frac{1+x}{2}, \frac{2+y}{2}\right)$$

De donde sacamos las igualdades:

$$\begin{cases} 3 = \dfrac{1+x}{2} \\ 4 = \dfrac{2+y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = 1 + x \\ 8 = 2 + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \end{cases}$$

Siendo $B(5,6)$ el simétrico de A respecto de M.

EJERCICIOS PARA PRACTICAR:

Ejercicio 7:

Halla las coordenadas del punto medio del segmento AB, de extremos $A(3,9)$ y $B(-1,5)$.

Ejercicio 8:

Hallar las coordenadas del punto C, sabiendo que $B(2,2)$ es el punto medio de AC, donde $A(-3,1)$.

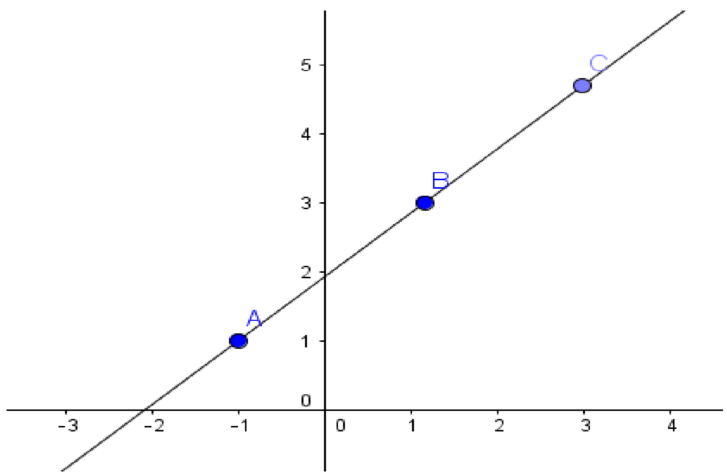
Ejercicio 9:

Si el segmento AB de extremos $A(1,3)$ y $B(7,5)$ se divide en cuatro partes iguales, ¿cuáles son las coordenadas de los puntos de división?

V. PUNTOS ALINEADOS

Visualmente, diremos que tres puntos están alineados si existe una recta que los contenga.

Ejemplo 10:



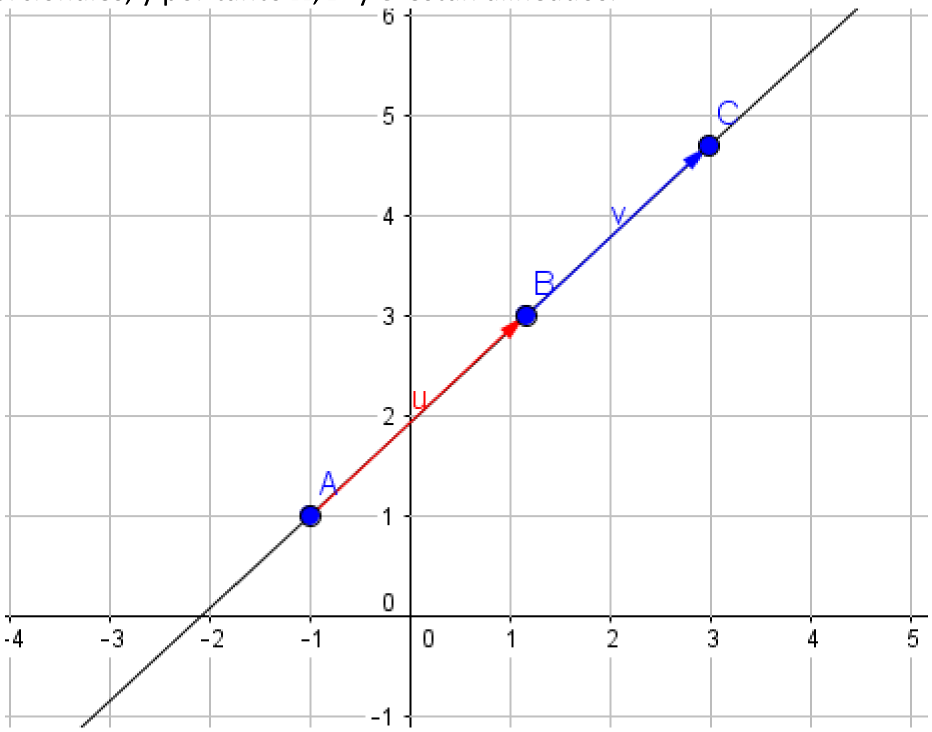
Otra forma de pensarlo es que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ tengan la misma dirección. Esto ocurre solamente si las coordenadas de ambos vectores son proporcionales.

Ejemplo 11:

Siguiendo con el ejemplo anterior, dados los puntos $A(-1,1)$, $B(1.16,3)$ y $C(2.99,4.69)$, son tales que sus vectores asociados $\overrightarrow{AB} = (2.16,2)$ y $\overrightarrow{BC} = (1.83,1.69)$ cumplen que:

$$(2.16,2) = k \cdot (1.83,1.69) \quad \Rightarrow \begin{cases} k = \dfrac{2.16}{1.83} \\ k = \dfrac{2}{1.69} \end{cases} \Rightarrow \quad k = 1.83$$

Esto es, son proporcionales, y por tanto A, B y C están alineados.



Formalmente, diremos que los puntos $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ y $C(x_3,y_3)$ están **alineados** si $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$; esto es, si las coordenadas del vector (x_2-x_1,y_2-y_1) son proporcionales a las del vector (x_3-x_2,y_3-y_2).

EJERCICIOS PARA PRACTICAR:

Ejercicio 10:

Comprueba si los puntos $A(-2,-3)$, $B(1,0)$ y $C(6,5)$ están alineados.

Ejercicio 11:

Calcula el valor de a para que los puntos $A(1,1)$, $B(0,3)$ y $C(2,a)$ estén alineados.

VI. ECUACIONES DE LA RECTA

Llegados a este punto, ya tenemos muchos conocimientos de rectas y vectores, que vamos a relacionar entre sí.

Sabemos que una recta queda unívocamente determinada conociendo dos puntos por los que pasa; pero acabamos de ver que dados dos puntos, podemos encontrar la dirección que determinan, que no es más que la dirección del vector asociado a esos puntos.

Intuitivamente, es fácil ver que si conocemos un punto por el que pasa la recta y la dirección que toma, también tendremos determinada nuestra recta.

Pues bien, vamos a escribir todos estos conocimientos que tenemos de manera más formal:

Supongamos que queremos conocer todas las coordenadas de los puntos de una recta, llamémoslas (x,y), con vector de posición asociado $\overrightarrow{OX}$. Supongamos además que conocemos un punto P por el que pasa (recordemos que a este punto le podemos asociar un vector $\vec{P} = (p_1,p_2)$, que no es más que el vector de origen el origen de coordenadas y extremo P) y un vector $\vec{v} = (v_1,v_2)$ que nos da la dirección de la recta, al que llamaremos **vector director**.

A partir de ese punto P, recorriendo la dirección de $\vec{v}$ en ambos sentidos, obtenemos los distintos puntos de la recta, llamémosla $\boldsymbol{r}$:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OX}} = \vec{\boldsymbol{P}} + \boldsymbol{t} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$$

Siendo t cualquier número real.

A esta ecuación es a la que se le llama **ecuación vectorial de la recta**.

Pero, al fin y al cabo, lo que tenemos en la anterior ecuación son operaciones de vectores. Vamos a realizarlas:

$$(x, y) = (p_1, p_2) + t \cdot (v_1, v_2)$$
$$(x, y) = (p_1, p_2) + (t \cdot v_1, t \cdot v_2)$$
$$(x, y) = (p_1 + t \cdot v_1, p_2 + t \cdot v_2)$$

¿Y cuándo dos vectores eran iguales? Cuando sus coordenadas son iguales, lo que quiere decir que:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = p_1 + t \cdot v_1} \\ \boldsymbol{y = p_2 + t \cdot v_2} \end{cases}$$

Estas ecuaciones son lo que se denomina **ecuaciones paramétricas de la recta**.

Hasta aquí, todo parece natural. Lo único que nos puede molestar es ese parámetro t, que puede tomar cualquier valor real, y parece que nos da más inseguridad… Pues vamos a despejarlo de ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - p_1}{v_1} \\ t = \dfrac{y - p_2}{v_2} \end{cases}$$

Como si de un sistema se tratase, podemos utilizar el método de igualación para "resolverlo":

$$\boldsymbol{\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}}$$

Esta ecuación es la que se denomina **ecuación continua de la recta**.

Pero parece que falta una forma de escribir las rectas, que hemos estado usando hasta la saciedad en el tema de funciones, y todavía no he nombrado… A partir de la ecuación anterior, la podríamos obtener sin más que despejar la coordenada y, lo cual no voy a escribir para que no entréis en pánico, aunque es fácil escribirlo (y os recomiendo probar).

Sin más dilación, he aquí la **ecuación explicita de la recta**

$$\boldsymbol{y = mx + n}$$

Donde m es la **pendiente** de la recta, y n la **ordenada en el origen**.

Quizás recordéis también la **ecuación punto-pendiente de la recta**, que escribimos de la forma

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

Donde m es la pendiente y (x_0, y_0) un punto por el que pasa.

Ejemplo 12:

Sabiendo que una recta pasa por el punto $P(1, 1)$, y que sigue la dirección del vector $\vec{v} = (2, 3)$, escribir la ecuación de la recta en todas sus formas.

Comencemos con la ecuación vectorial:

$$(x, y) = (1, 1) + t \cdot (2, 3)$$

Donde t es un parámetro que toma cualquier valor real ($t \in \mathbb{R}$).

Realizando las operaciones con vectores:

$$(x, y) = (1 + t \cdot 2, 1 + t \cdot 3)$$

Por lo que las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$$

Despejando en ambas ecuaciones el parámetro:

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - 1}{2} \\ t = \dfrac{y - 1}{3} \end{cases}$$

Por lo que tendremos la ecuación de la recta en forma continua:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{3}$$

Despejando y:

$$\frac{x-1}{2}\cdot 3 = y-1 \;\Rightarrow\; x\cdot\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+1 = y \;\Rightarrow\; \frac{3}{2}x-\frac{1}{2} = y$$

De donde obtenemos la ecuación explícita de la recta, de la cual deducimos que la pendiente de la recta es $m=\frac{3}{2}$ y cuya ordenada en el origen es $n=-\frac{1}{2}$.

Como la recta pasaba por el punto $(1,1)$, y conocemos la pendiente, escribimos la ecuación punto-pendiente:

$$y-1=\frac{3}{2}\cdot(x-1)$$

Observación:

A la vista de este ejemplo, vamos a comparar la pendiente de la recta $\left(m=\frac{3}{2}\right)$ y su vector director $\left(\vec{v}=(2,3)\right)$. Si nos fijamos, la pendiente la obtenemos dividiendo la segunda coordenada del vector director entre la primera.

Esto no es una casualidad. Si despejáis desde la ecuación continua de la recta que escribimos arriba, hasta llegar a la ecuación explícita, veréis que el parámetro que multiplica a x, y que por tanto es su pendiente, toma la forma $\frac{v_2}{v_1}$.

Este descubrimiento nos sirve de gran ayuda en multitud de ejercicios, ya que nos permite relacionar la pendiente y el vector director de una recta. Por lo que conocido uno de ellos, podemos obtener el otro sin problema.

Ejemplo 13:

Dada la recta $y=3x-1$, cuya pendiente es $m=3$, podemos escribir el vector director $\vec{v}=(1,3)$. También podríamos escribir $\vec{w}=(2,6)$, y sería perfectamente correcto; ya que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son proporcionales, por lo que llevan la misma dirección.

EJERCICIOS PARA PRACTICAR:

Ejercicio 12:

Escribe la ecuación general de la recta, r, que pasa por los puntos $(1,0)$ y $(3,6)$

Ejercicio 13:

Halla la ecuación de la recta, r, que pasa por $(3,2)$ y tiene como vector director $\vec{v}=(1,1)$

Ejercicio 14:

Obtén, en todas sus formas, la ecuación de la recta r que pasa por $(3,-1)$ y tiene pendiente $-\frac{1}{2}$.

VII. PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

Ya hemos visto que la dirección de una recta viene dada por su vector director $\vec{v}=(v_1,v_2)$, o por su pendiente, que están relacionadas por la igualdad:

$$m=\frac{v_2}{v_1}$$

Diremos que dos rectas r y s, con pendientes m_1 y m_2 son:

- **Paralelas**: si tienen la misma pendiente (o sus vectores directores son proporcionales)
- **Perpendiculares**: si las pendientes de las rectas cumplen que $m_1\cdot m_2=-1$

Ejemplo 14:

Da tres vectores perpendiculares a $(-6,1)$

Los vectores $(-1,-6)$, $(2,12)$ o $\left(\frac{1}{2},3\right)$ son perpendiculares a $(-6,1)$. En efecto, el vector $(-6,1)$ tiene una pendiente asociada $m=-\frac{1}{6}$.

Los vectores propuestos tienen por pendiente asociada 6, cuyo producto por m da -1.

Observación:

Si tenemos el vector $\vec{v}=(v_1,v_2)$, y queremos un vector perpendicular, no tenemos más que invertir el orden de sus coordenadas y cambiar uno de los signos; esto es, $\vec{w}=(-v_2,v_1)$ es perpendicular al vector $\vec{v}$.

Ejemplo 15:
Halla la ecuación de la recta que pasa por $P(2,-5)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}=(5,7)$
Como queremos que nuestra recta sea perpendicular a $\vec{v}$, tomaremos el vector director $\vec{w}=(-7,5)$, y escribimos la ecuación vectorial de la recta:

$$(x,y)=(2,-5)+t\cdot(-7,5)$$

Ejemplo 16:
La recta r pasa por $(3,0)$, y la recta s pasa por $(-5,3)$. Ambas son perpendiculares a $4x+2y-7=0$. Halla sus ecuaciones.
El primer paso es calcular la pendiente de la recta que nos dan, para conocer la pendiente de las rectas r y s. Para ello, despejamos y de la ecuación de la recta:

$$4x+2y-7=0 \;\Rightarrow\; y=-2x+\frac{7}{2}$$

Por lo que la pendiente de las rectas r y s debe ser $\frac{1}{2}$.
La ecuación punto- pendiente de r será: $y=\frac{1}{2}\cdot(x-3)$
La ecuación en forma continua de s será: $\frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{1} \;\Rightarrow\; \frac{x+5}{2}=y-3$

VIII. RECTAS PARALELAS A LOS EJES COORDENADOS

Cosas conocidas de funciones, que vamos a trasladar a nuestro tema de geometría analítica:

- **Rectas paralelas al eje X:**

La función constante $y=k$ se representa mediante una recta horizontal, paralela al eje X. Su pendiente será 0, y cualquier vector director de este tipo de rectas tomará la forma $(a,0)$, para cualquier valor de a distinto de cero.

- **Rectas paralelas al eje Y:**

Las ecuaciones (<u>no funciones</u>) de la forma $x=k$ se representan mediante rectas verticales, paralelas al eje Y. Cualquier vector director de este tipo de rectas tomará la forma $(0,a)$, con a distinto de cero.

Ejemplo 17:
Las rectas r y s pasan por el punto $(5,-3)$. La recta r es paralela a $5y+17=0$, y s es perpendicular a ella. Da sus ecuaciones.
Como la recta r es paralela a la dada, será también paralela al eje X, por lo que será de la forma $y=-3$
En cambio, la recta s será paralela al eje Y, por lo que será de la forma $x=5$.

IX. POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

Ya hemos visto cuándo dos rectas pueden ser paralelas, y cuándo perpendiculares.
En cualquier caso, para estudiar la posición relativa de dos rectas, resolvemos el sistema de ecuaciones asociado a ellas, teniendo tres posibilidades:

- Si el sistema de ecuaciones no tiene solución, las rectas serán **paralelas**.
- Si el sistema de ecuaciones tiene solución única, las rectas serán **secantes**.
- Si el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones, las rectas serán **coincidentes**

Así pues, para hallar el punto de corte de dos rectas, simplemente debemos resolver el sistema asociado.
También se puede realizar el estudio de la posición relativa de dos rectas mediante su pendiente (y consecuentemente su vector director):

- Si tienen pendientes distintas, las rectas serán **secantes**.
- Si tienen igual pendiente, tendremos dos casos:
  - Si tienen algún punto en común, las rectas son **coincidentes**.
  - Si no tienen ningún punto en común, las rectas son **paralelas**.

Observación:
Dos rectas que tengan igual pendiente tienen todos sus puntos en común, o ninguno. Por lo que es suficiente comprobar si un punto por el que pasa una de las rectas pertenece a la otra para tomar una decisión.

Ejemplo 18:
Di la posición relativa de estos pares de rectas:

a) $r: 8x+2y-14=0$, $s: 5x-y-20=0$

Vamos a resolver el sistema de ecuaciones lineales asociado a ambas rectas:

$$\begin{cases} 8x + 2y = 14 \\ 5x - y = 20 \end{cases}$$

Resolviendo por el método que queráis, queda la solución $x = 3$, $y = -5$. Por lo que ambas rectas se cortan en el punto $(3, -5)$, y son secantes.

b) $r\colon pasa\ por\ (-1, 4) y\ (7, -2),\ s\colon 3x + 4y = 0$

Calculemos un vector director para r: $\vec{v} = (7, -2) - (-1, 4) = (8, -6)$; por lo que tendremos la pendiente asociada $m = -\frac{3}{4}$.

Con la pendiente, y teniendo en cuenta que pasa por el punto $(-1, 4)$, podemos escribir la ecuación punto-pendiente de r: $y - 4 = -\frac{3}{4} \cdot (x + 1)$

Resolvemos el sistema de ecuaciones asociado:

$$\begin{cases} y - 4 = -\dfrac{3}{4} \cdot (x + 1) \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$$

Lo resolvemos, por el método que queráis, y vemos que no tiene solución. Por lo que las rectas son paralelas.

c) $r\colon pasa\ por\ (2, -1) y\ (8, 2),\ s\colon su\ pendiente\ es \frac{1}{2}\ y\ pasa\ por\ (0, -2)$

Calculamos un vector y pendiente de r:

$$\vec{v} = (8, 2) - (2, -1) = (6, 3) \ \Rightarrow\ m = \frac{1}{2}$$

Luego ambas rectas tienen la misma pendiente.

Vamos a escribir la ecuación de la recta r, en cualquiera de sus formas, y a comprobar si el punto por el que nos dicen que pasa s también pertenece a r:

$$r\colon y + 1 = \frac{1}{2} \cdot (x - 2)$$

Para comprobar si el punto $(0, -2)$ pertenece a r, simplemente sustituimos x e y por los valores correspondientes, y hacemos cuentas:

$$¿-2 + 1 = \frac{1}{2} \cdot (0 - 2)? \ \Leftrightarrow\ ¿-1 = \frac{1}{2} \cdot (-2)? \ \ SÍ$$

Por lo que r y s son rectas coincidentes.

EJERCICIOS PARA PRACTICAR:

Ejercicio 15:

Halla la ecuación de la recta, s, paralela a $y = \frac{1}{2}x$ que pasa por el punto $(4, 4)$. Obtén el punto de corte de la recta s y de la recta del ejercicio 12.

Ejercicio 16:

Escribe la ecuación de la recta, s, que pasa por $(5, 2)$ y es paralela al eje X. Obtén después el punto de corte de la recta s con la recta del ejercicio 13.

Ejercicio 17:

a) Halla la ecuación de la recta, r, que pasa por $(0, 0)$ y es paralela al vector $\vec{v} = (3, 6)$
b) Escribe la ecuación general de la recta, s, que pasa por $(3, 4)$ y es perpendicular a $x + y - 5 = 0$
c) Obtén el punto de intersección de las dos rectas anteriores.

Ejercicio 18:

Escribe la ecuación de la recta, s, perpendicular a $x + 3y = 2$ que pasa por $(2, -4)$. Halla después el punto de intersección de esta recta con la del ejercicio 14.

Ejercicio 19:

a) Escribe la ecuación general de la recta, r, que pasa por los puntos $(0, 5)$ y $(1, 2)$
b) Obtén la ecuación de la recta, s, paralela a $2x + y = 3$ que pasa por el punto $(1, 1)$
c) Halla el punto de corte de las dos rectas anteriores

Ejercicio 20:

a) Escribe la ecuación de la recta que pasa por $(2, 1)$ y es paralela a $y = \frac{1}{2}x + 3$
b) Halla la ecuación de la recta que pasa por $(0, -2)$ y es perpendicular a $2x + y = -3$

Ejercicio 21:
Dados los puntos $A(2,-1)$ y $B(3,4)$, halla las ecuaciones de las dos rectas siguientes:

a) $r\text{: } pasa\ por\ A\ y\ es\ paralela\ a\ AB$
b) $s\text{: } pasa\ por\ B\ y\ es\ paralela\ a\ AB$

Ejercicio 22:

a) Obtén la ecuación de la recta paralela al eje X que pasa por el punto $(5,-1)$
b) Halla la ecuación general de la recta perpendicular a $3x-y=1$ que pasa por el punto $(0,1)$

Ejercicio 23:

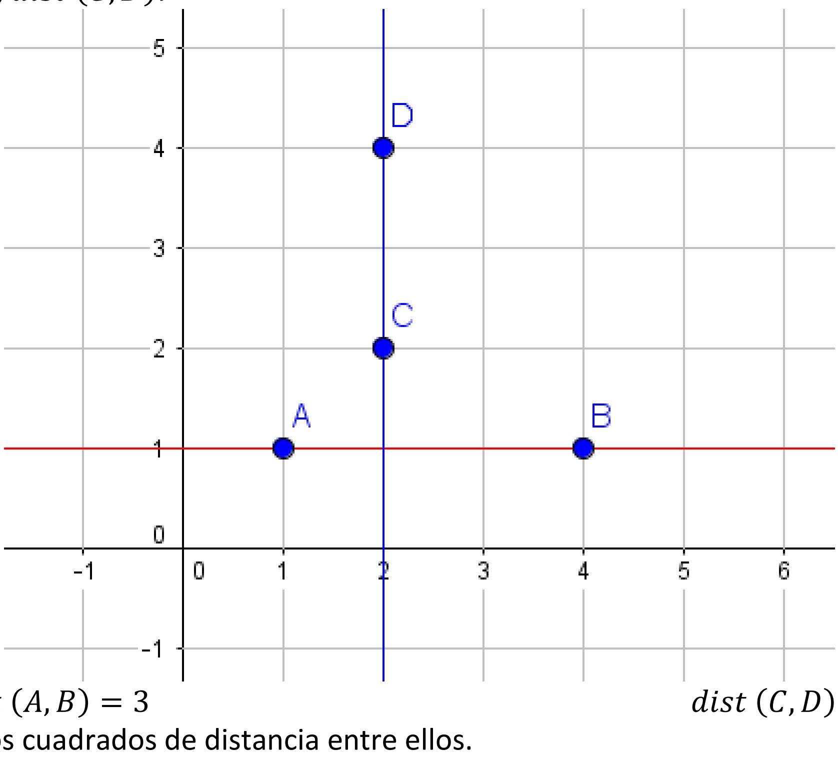
a) Halla la ecuación de la recta, r, paralela a $2x-3t+4=0$ que pasa por $(-1,2)$
b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a $y-1=0$ que pasa por $(3,2)$

MATERIA DE AMPLIACIÓN:
Lo escrito en adelante, aun siendo esencial en esta unidad didáctica, ya se trata de materia novedosa para vosotros.
Por ello, tiene carácter <u>voluntario</u>.
Cualquier cuestión, duda, material extra, etc. que necesitéis al respecto, sabéis que estoy a vuestra disposición.
Recomiendo a todo aquel que vaya a realizar algún tipo de Bachillerato con matemáticas el próximo curso que, al menos, lea los siguientes apartados. Veréis que son sencillos.

X. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Cuando tenemos dos puntos con igual abscisa o igual ordenada, y los dibujamos en los ejes cartesianos, es fácil hallar la distancia entre ellos, sin más que contar los "cuadraditos" que los separan.

Ejemplo 19:
Dados los puntos $A(1,1)$, $B(4,1)$, $C(2,2)$ y $D(2,4)$, es fácil hallar la distancia entre A y B, $dist\ (A,B)$, o la distancia entre C y D, $dist\ (C,D)$:



$dist\ (A,B)=3$ $\qquad$ $dist\ (C,D)=2$

Sin más que contar los cuadrados de distancia entre ellos.

De forma general, dados dos puntos cualesquiera $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$, calcularemos el vector que los une y la **distancia entre $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{dist\ (A,B)}$**, se obtiene como el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$:

$$dist\ (A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Ejemplo 20:
Halla la distancia entre $A(-7,4)$ y $B(6,4)$.

$$dist\ (A,B)=\sqrt{\left(6-(-7)\right)^2+(4-4)^2}=\sqrt{13^2}=13$$

Ejemplo 21:
Halla la distancia entre $A(-5, 11)$ y $B(0, -1)$.

$$dist\ (A, B) = \sqrt{\left(0-(-5)\right)^2 + (-1-11)^2} = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13$$

Ejemplo 22:
Calcula el valor de c para que el punto $A(10, c)$ diste 13 unidades del punto $B(-2, 5)$.
Calculamos primero el vector que une A y B:

$$\overrightarrow{AB} = (-2-10, 5-c) = (-12, 5-c)$$

Como queremos que ambos puntos disten 13 unidades, calculamos el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ y lo igualamos a 13:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-12)^2 + (5-c)^2} = 13$$

Ahora resta resolver una ecuación radical, para lo cual (recordemos) elevamos al cuadrado cada uno de los miembros, y resolvemos la ecuación que nos quede:

$$\left(\sqrt{(-12)^2 + (5-c)^2}\right)^2 = 13^2 \;\Rightarrow\; 144 + 25 - 2c + c^2 = 169 \;\Rightarrow\; c^2 - 2c = 0$$

$$\Rightarrow\; c \cdot (c-2) = 0 \;\Rightarrow \begin{matrix} c = 0 \\ c = 2 \end{matrix}$$

Por lo que el valor de c puede ser: $c = 0$ o $c = 2$. Pero recordemos que debemos comprobar. Si comprobamos, vemos que el único valor que nos da la solución es $c = 0$.

EJERCICIOS PARA PRACTICAR:

Ejercicio 24:
Calcula la distancia que hay entre los puntos $A(8, 10)$ y $B(-2, -14)$.

Ejercicio 25:
Halla la distancia entre los puntos $P(6, -2)$ y $Q(0, 6)$

Ejercicio 26:
Halla el valor de d para que los puntos $A(d, 6)$ y $B(6, -6)$ disten 13 unidades.

XI. ECUACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA

La característica común de los puntos de una circunferencia, es que todos están a la misma distancia de un punto, llamado centro. Esa distancia que los separa es el radio.
Uniendo lo que ya sabemos sobre las circunferencias, con lo que acabamos de aprender sobre distancias entre puntos, vamos a llamar $\boldsymbol{C(a, b)}$ al **centro** de una circunferencia de **radio $\boldsymbol{r}$**. Para un **punto genérico** de la circunferencia, $\boldsymbol{P(x, y)}$, ha de cumplirse que:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

Esto quiere decir que la distancia entre P y C sea el valor del radio.
Se puede utilizar, equivalentemente, la expresión elevada al cuadrado:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Que es a la que denominamos **ecuación de la circunferencia.**

Ejemplo 23:
Escribe la ecuación de la circunferencia de centro $C(7, 1)$ y radio $r = 5$.
La ecuación de la circunferencia es: $(x-7)^2 + (y-1)^2 = 25$

Ejemplo 24:
Di el centro y el radio de la circunferencia: $(x+2)^2 + y^2 = 1$
El centro de la circunferencia será el punto $C(-2, 0)$ y el radio $r = 1$

Ejemplo 25:
Halla la ecuación de la circunferencia de centro $C(4, -2)$ que pasa por $P(5, 7)$
Como el punto P pertenece a la circunferencia, debe cumplir la ecuación de la circunferencia. Por lo que sustituimos x e y por las correspondientes coordenadas de P, y calculamos el radio:

$$(5-4)^2 + \left(7-(-2)\right)^2 = r^2 \;\Rightarrow\; 1 + 9^2 = r^2 \;\Rightarrow\; r = \sqrt{82}$$

Tomamos solamente la raíz positiva, ya que no tiene sentido que el radio sea un valor negativo.
Así bien, una vez calculado el radio, podemos escribir la ecuación de la circunferencia:

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 82$$

EJERCICIOS PARA PRACTICAR:

Ejercicio 27:

Halla la ecuación de la circunferencia de centro $C(4,-2)$ y radio $r=5$.

Ejercicio 28:

Escribe la ecuación de la circunferencia de centro $C(3,-4)$ y radio $r=4$.

Ejercicio 29:

Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto de intersección de las rectas $r: x+3y+3=0$ y $s: x+y+1=0$, y su radio es igual a 5.

Ejercicio 30:

Decide si el punto $P(1,6)$ pertenece a la circunferencia $(x-2)^2+(y-4)^2=9$, y halla los puntos de corte con los ejes.