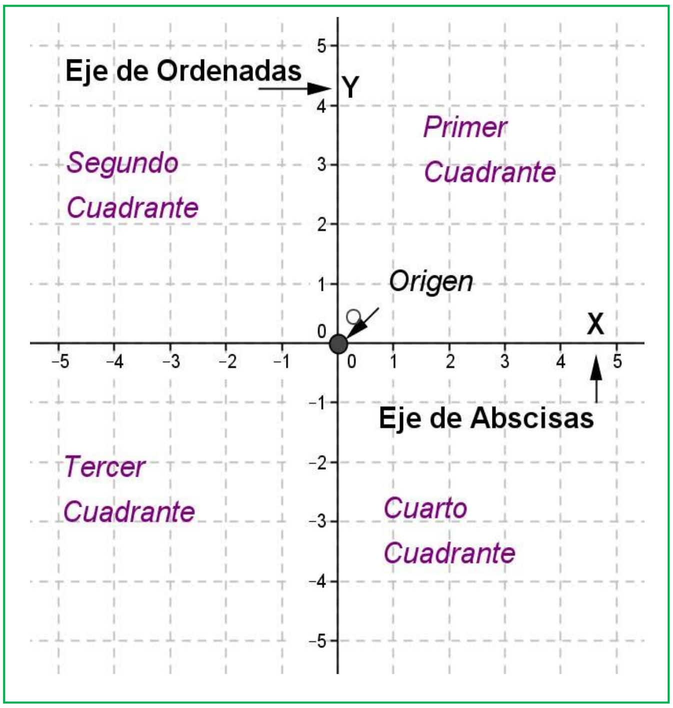
I. PUNTOS EN EL PLANO

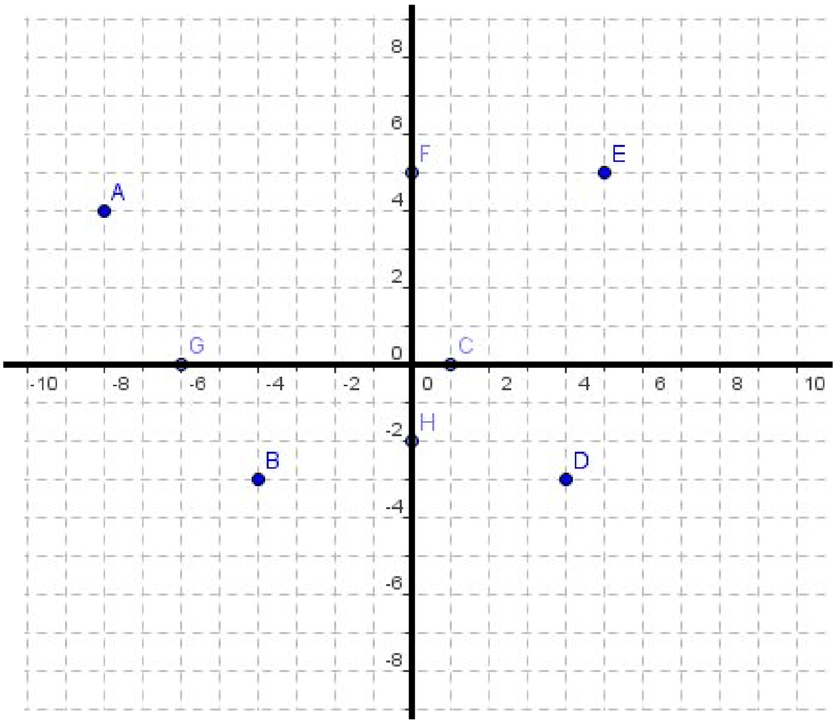
Los ejes de coordenadas en el plano son:
La recta horizontal, OX es el **eje de abscisas.**
La recta vertical, OY es el **eje de ordenadas**.
El punto de corte de las rectas es el **origen de coordenadas**. Las dos rectas dividen el plano en cuatro cuadrantes.
Cualquier punto en el plano se representa mediante una letra mayúscula y entre paréntesis su coordenada x y su coordenada y.

2º cuadrante 1º cuadrante

3º cuadrante 4º cuadrante



<u>Ejemplo</u>: Escribe las coordenadas de los siguientes puntos:



<u>Solución:</u>

$A(-9,4)$	$C(1,0)$	$E(5,5)$	$G(-7,0)$
$B(-4,-3)$	$D(4,-3)$	$F(0,5)$	$H(0,-2)$

II. CONCEPTO DE FUNCIÓN

Una **<u>función</u>** es una correspondencia numérica entre dos magnitudes según la cual a cada valor de la variable independiente, le corresponde un **único** valor de la variable dependiente.

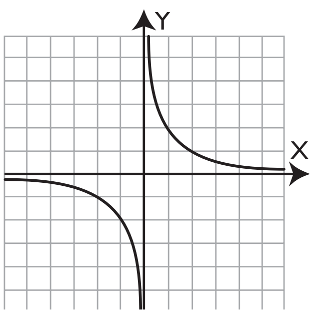
La x se llama variable independiente, es la que se fija previamente y toma valores arbitrarios.

La y, variable dependiente, es la que se deduce de la variable independiente a través de la función, y se suele mostrar con la letra y, aunque también como $f(x)$.

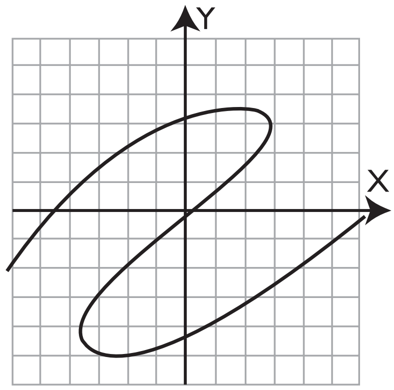
Con $f(x_0)$ se define la imagen de $x = x_0$ por f.

Una función se puede definir a través de una **gráfica**, a través de su **expresión analítica** o a través de una **tabla de valores**.

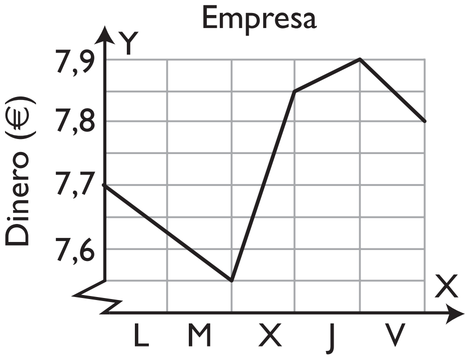
A. FUNCIÓN DADA POR SU GRÁFICA



Es una función porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y



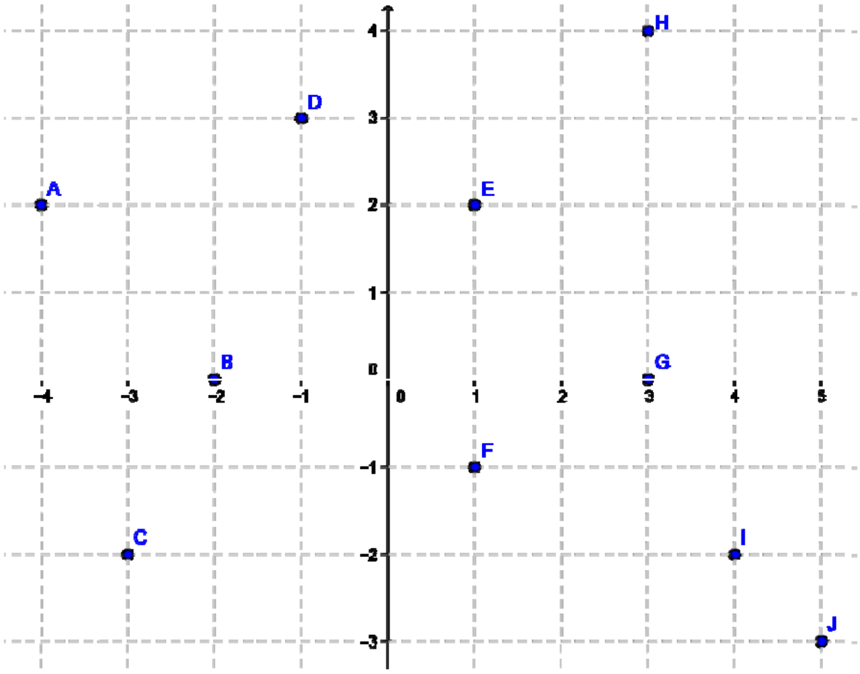
No es una función porque hay valores de x, por ejemplo el cero, para el cual hay varios valores de y: el cero, el tres y el -5.



Es una función pues a cada valor de x le corresponde solo un valor de y. Es decir, a cada día de la semana le corresponde un único valor en euros en la empresa.
La variable independiente es, en este caso, los días de la semana, y la variable dependiente es el dinero (en euros).

EJERCICIOS PARA PRACTICAR:

EJERCICIO 1: Da las coordenadas de los siguientes puntos e indica su cuadrante.

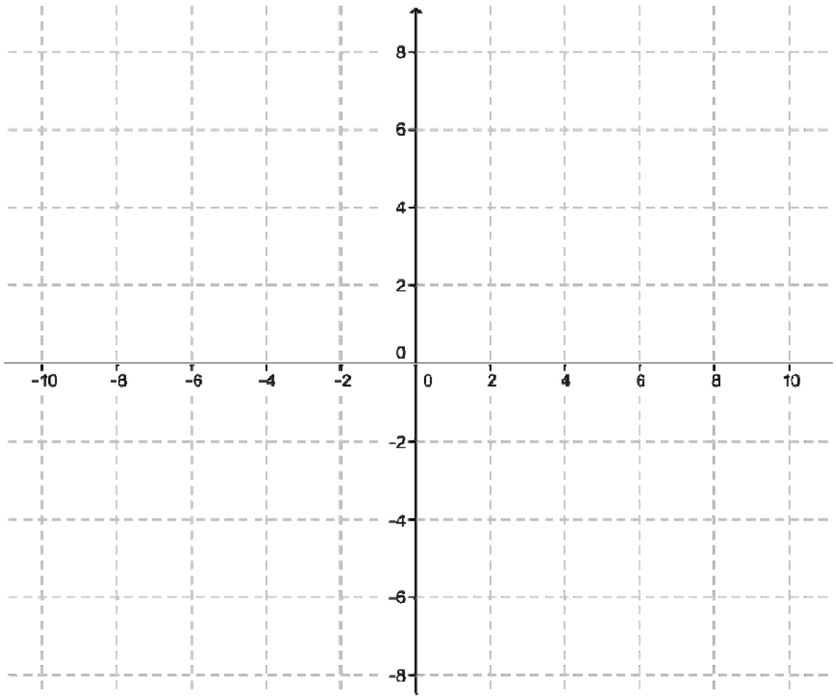


EJERCICIO 2:

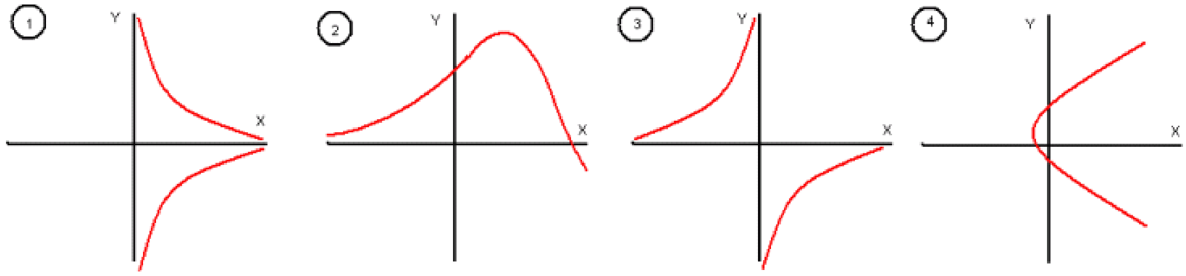
Representa los siguientes puntos en los ejes:

A (0, –2) *B* (–2, 0) *C* (4, 0) *D* (–6, 0) *E* (0, 6) *F* (1, 7) *G* (7, 1) *H* (–4, 8) *I* (–1, –4) *J* (–4, –1)

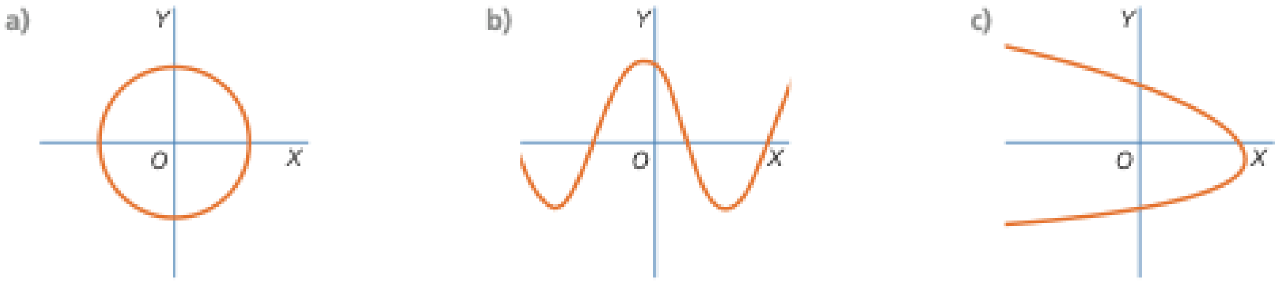
K (5, –3) *L* (9, 6) *M* (–2,1) *N* (7, –4) *Ñ* (–3, –3) *O(0, 0)* *P(–2, –1)* Q(2, 1) *R*(2, –1) *S*(–2, 2)



EJERCICIO 3:
Indica cuáles de las siguientes gráficas representan una función:



EJERCICIO 4:
Indica cuáles de las siguientes gráficas representan una función:



B. FUNCIÓN DADA POR UNA TABLA DE VALORES

A veces en vez de darnos la gráfica de la función nos dan una tabla de valores que representa dicha función. Por ejemplo:

Ejemplo: Las pulsaciones de un corredor de fondo vienen dadas por la siguiente tabla.

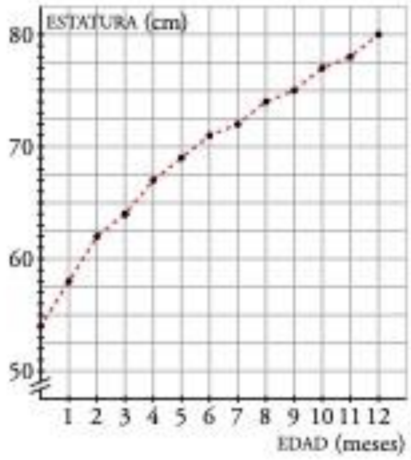
KM	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PULS./MIN	125	120	122	127	135	140	143	148	142	138

Fijaros que aquí nos está indicando que la variable independiente es la distancia que recorre cuya escala es km, y la variable dependiente su ritmo cardíaco medido en pulsaciones por minuto.
Se leería así: a 1 km, sus pulsaciones por minuto son 125, a los 2 km, 120, a los 3 km, 122…
Si f fuese el nombre de la función se escribiría que $f(1) = 125$, que $f(2) = 120$, y así sucesivamente. Y se diría que la imagen del 1 por la función es 125, que la imagen del 2 por f es 120, y así sucesivamente.
Si con esa tabla quisiésemos representar una gráfica sería:

Ejemplo: Se ha medido mes a mes, la estatura de un niño, desde que nace hasta que tiene un año. La tabla de valores es:

EDAD (meses)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ESTATURA (cm)	54	58	62	64	67	69	71	72	74	75	77	78	80

Fijaros que la variable independiente es la edad, medida en meses, y la dependiente la estatura medida en cm. Para que edad hay un único valor de la estatura.
Al nacer mide $54\ cm$, a los 7 meses $72\ cm$, a los 12 meses $80\ cm$, o lo que es lo mismo, la imagen del 0 es 54, la imagen del 7 es 72, la imagen del 12 es 80, o bien, lo mismo, se escribiría como $f(0)=54$, $f(7)=72$, $f(12)=80$.
Si representamos esta tabla en forma de gráfica nos daría:



C. FUNCIÓN DADA POR SU EXPRESIÓN ANALÍTICA

En este apartado es cuando la función nos viene dada mediante su expresión analítica o matemática y a partir de ella se construye una tabla de valores y después la gráfica.

Ejemplo:

Nos dan por ejemplo la siguiente función cuya expresión es: $f(x)=x^2$
Primero tendríamos que obtener una tabla de valores y a partir de la tabla se pintaría la gráfica.
Si nos pidiesen la imagen del 0, 1 y -7 sería:

$$f(0)=0^2=0$$
$$f(1)=1^2=1$$
$$f(-7)=(-7)^2=49$$

Ejemplo:

Dada la función que a cada valor le asigna su tercera parte más 4 unidades. Halla la imagen del 4 por dicha función.
La expresión analítica sería: $f(x)=\frac{x}{3}+4$
La imagen del 4, sería $f(4)=\frac{4}{3}+4=\frac{16}{3}$

Ejemplo:

La compañía de gas cobra una cuota fija mensual de 5,12 € más 0,034 € por $kilovatio-hora$ consumido.

a) Expresa el importe de la factura en función de la cantidad de $kilovatios-hora$ consumidos.
b) ¿Cuál es el importe de la factura si se consumieron $280\ kilovatios-hora$?

Solución:

a. $f(x) = 5{,}12 + 0{,}034x$

b. Nos pide la imagen de 280 , es decir, $f(280) = 5{,}12 + 0{,}034.280 = 14{,}64€$

EJERCICIOS PARA PRACTICAR:

EJERCICIO 5:

Para cada una de las siguientes funciones calcula las imágenes de: 2, -2 y -1

a) $f(x) = 5x^2 - 1$

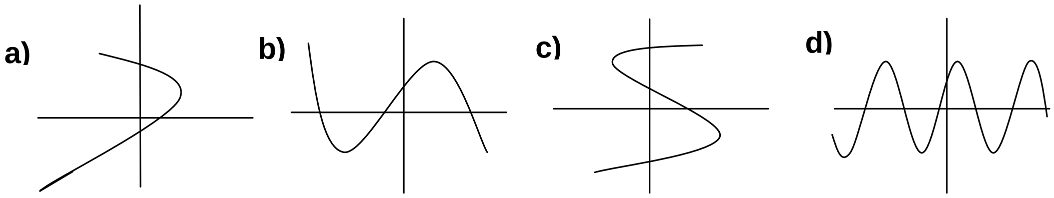
b) $f(x) = 2x^2 - x$

c) $f(x) = x^2 - x - 1$

d) $f(x) = -x^2 + 1$

EJERCICIO 6:

¿Cuáles representan una función?



EJERCICIO 7:

Representa la función dada por la siguiente tabla:

x	2	3	4	5	6	7	8
y	1	1	2	2	3	1	4

EJERCICIO 8:

Escribe la expresión analítica de la función que a cada valor le asigna su cubo menos 5 unidades. Halla la imagen del -1 y del 3 por dicha función.

EJERCICIO 9:

En esta tabla se recoge la medida del perímetro del cráneo de un niño durante sus primeros meses de vida:

a. Haz una gráfica de dicha función.

b. ¿Cuánto crees que medirá el perímetro craneal a los 3 años?

TIEMPO (meses)	0	3	9	15	21	27	33
PERÍMETRO (cm)	34	40	44	46	47	48	49

EJERCICIO 10:

Decide razonadamente si las siguientes correspondencias son funciones o no. En las que sí lo sean, indica cuál representa la variable independiente y cuál la dependiente.

1. A todo número natural se le hace corresponder su número natural siguiente.
2. A todo número natural se le asocian sus divisores.
3. A cada día del año se le asocia la cotización del euro frente al dólar.
4. A todo número fraccionario se le asocia su inverso.
5. A todo número se le asocia su raíz cuadrada.
6. A cada fase de la luna le asociamos la fecha en la que se da dicha fase.
7. A todo número se le asocia su doble más siete.

EJERCICIO 11:

Observa los siguientes datos que se dan en una tabla:

$x\ (horas)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y\ (miles)$	3	6	12	24	48	96	192	384	768

Corresponden al número aproximado de bacterias, en miles, de una colonia a lo largo del tiempo medido en horas.

a. ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la dependiente?
b. Hacer un esbozo de la gráfica de la función.

EJERCICIO 12:

El precio de un bolígrafo en la papelería es de 0,30 €.

a) Calcula y escribe en la tabla siguiente el precio de los bolígrafos que se indican.

$x\ (nº\ bolígrafos)$	1	2	3	5	7	8	9
$y\ (coste\ en\ €)$							

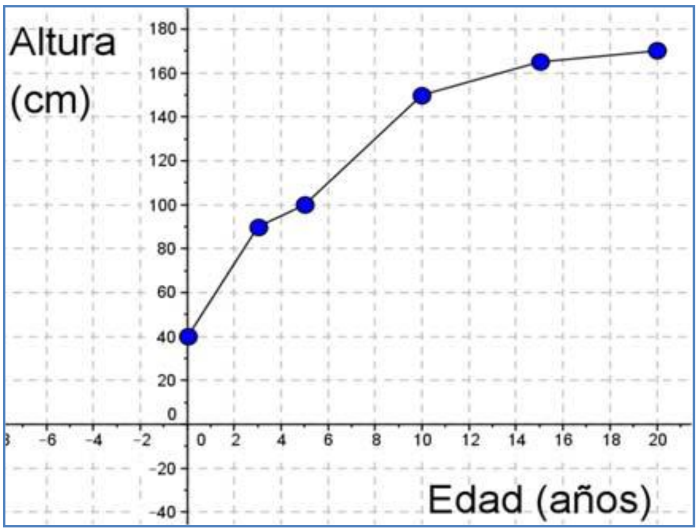
b) Representa gráficamente los puntos de la tabla.
c) Fijándote en la gráfica, ¿cuánto cuestan 16 bolígrafos? ¿Cuántos bolígrafos te dan por 3,60 €?
d) ¿Tiene sentido unir los puntos de la gráfica? ¿Por qué?

III. INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS

Ejemplo:

La gráfica siguiente nos muestra la variación de la estatura de Laura con relación a su edad. Observando la gráfica, contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿A qué edad medirá 1 metro?
b) ¿Cuánto medía al nacer?
c) ¿Cuánto medía a los 10 años? ¿Y a los 20?
d) ¿En qué período creció menos?



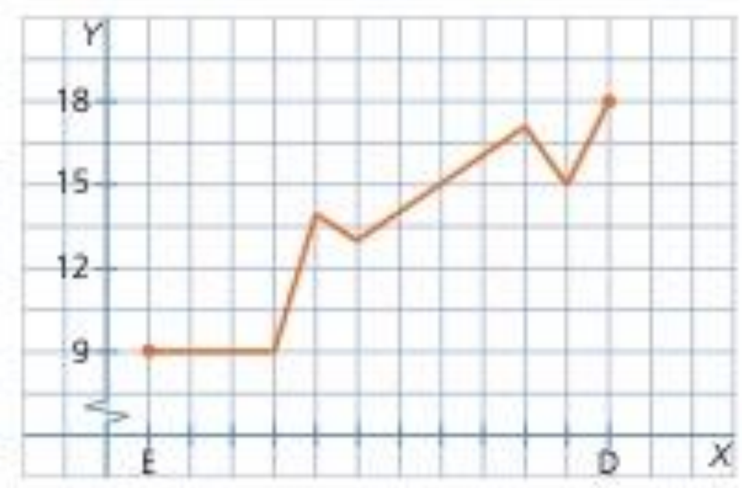
Solución:

a) Mirando a la gráfica observamos que el punto $(5{,}100)$ es el que nos piden, pues la ordenada es 100 $(1\ metro)$, luego Laura tenía 5 años.
b) El punto que representa el nacimiento es el $(0{,}40)$, luego midió $40\ centímetros$.
c) En la gráfica observamos que el tramo menos inclinado es el que va de los 15 a los 20 años, eso quiere decir que en ese tramo creció menos.

Ejemplo:

Esta gráfica refleja el precio, en $euros$, del kilo de merluza en un año de enero a diciembre.

a) ¿En qué mes se produjo la mayor subida del precio?
b) ¿Durante cuánto tiempo se mantuvo el precio sin subida?
c) ¿En qué mes alcanzo su máximo valor?
d) ¿Durante cuánto tiempo experimentó el precio un alza ininterrumpida?



Solución:

a) En abril
b) Desde enero hasta fin de marzo
c) En diciembre
d) Desde junio hasta octubre, cuatro meses

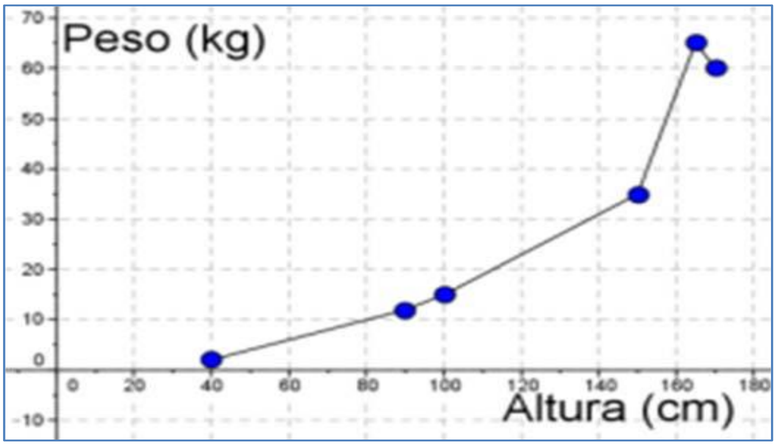
EJERCICIOS PARA PRACTICAR:

EJERCICIO 13:

La gráfica siguiente nos muestra la variación del peso de Laura con relación a su estatura a lo largo de su vida.

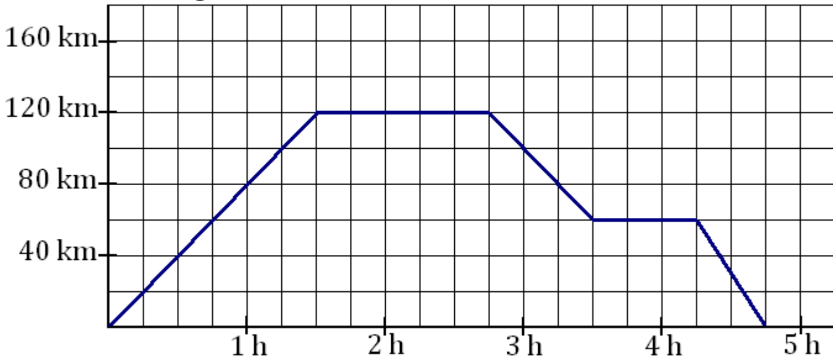
Analiza la gráfica, comenta la situación y responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto pesaba cuando medía un metro? ¿Y cuando medía $150\ cm$?
b) ¿Cuánto medía cuando pesaba $55\ kg$?
c) ¿A qué altura pesaba más? ¿Laura adelgazó en algún momento?



EJERCICIO 14:

A la vista de la gráfica:



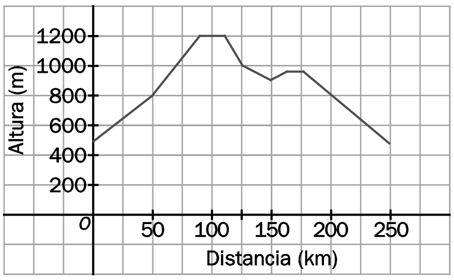
a) ¿Cuántos km recorre en la primera hora y media?

b) ¿Cuánto tiempo permanece parado?

c) ¿QA qué distancia del punto de partida se encuentra el lugar de la segunda parada?

EJERCICIO 15:

La gráfica representa una etapa ciclista. A cada distancia al punto de salida le corresponde una determinada altitud.



a) ¿Cuál es la variable independiente?

b) ¿Cuándo se alcanza la mayor altitud?

c) ¿Cuántos kilómetros se recorren en la etapa?

EJERCICIO 16:

La siguiente gráfica muestra los datos de la glucosa de un niño diabético a primera hora de la mañana durante 15 días. A partir de su observación, responde a las siguientes preguntas:

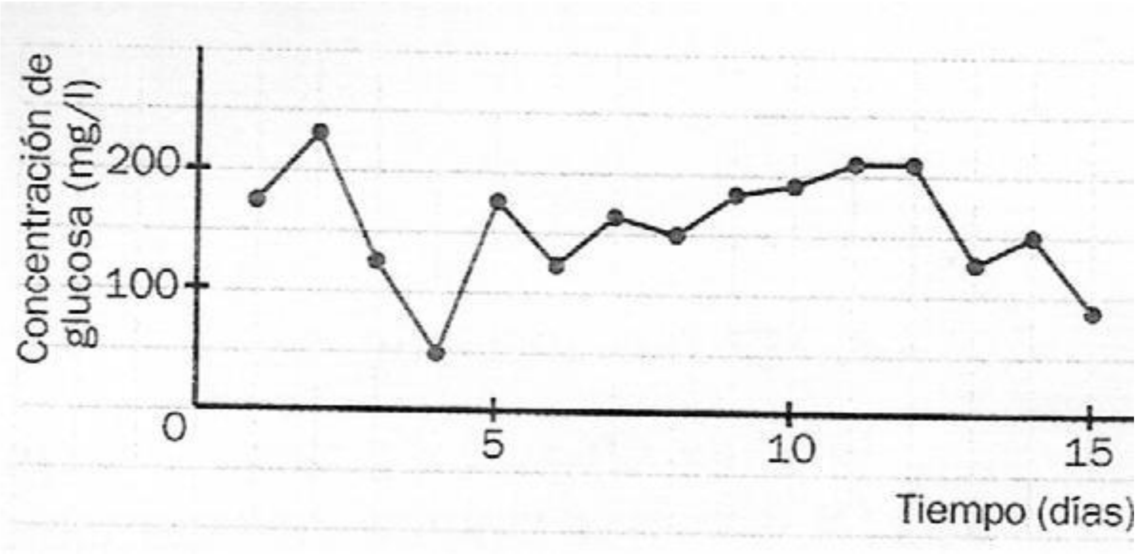
a. ¿Qué día tuvo la concentración más alta?. ¿Cuál fue dicha concentración?

b. ¿Qué día tuvo la concentración más baja?, ¿Y cuál fue dicha concentración?

c. ¿Qué concentración tuvo el día 15?

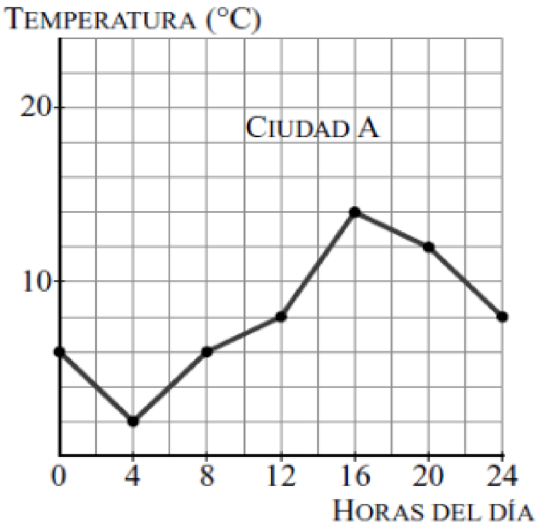
d. ¿Entre qué valores está durante esos 15 días la concentración de glucosa?

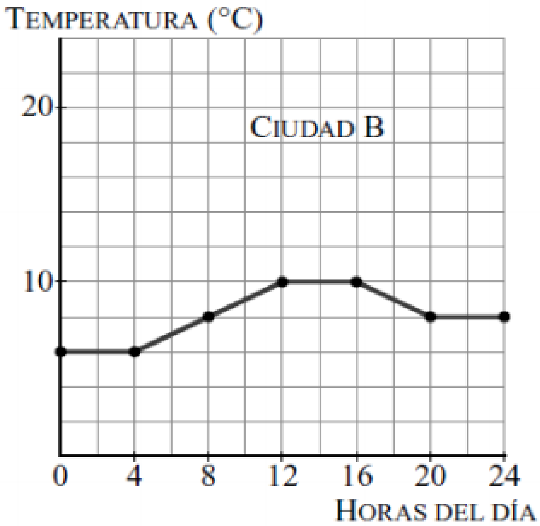
e. ¿Qué días la concentración fue inferior a 100 miligramos por litro?



EJERCICIO 17:

En las gráficas puedes observar las siete mediciones de la temperatura tomadas a lo largo de un día, en dos ciudades diferentes:





Observando las gráficas:

a) ¿En cuál de las dos ciudades baja más la temperatura?

b) ¿En cuál de las dos son más bruscas las variaciones de temperatura?

c) ¿Cuál de las dos tiene un clima más suave?

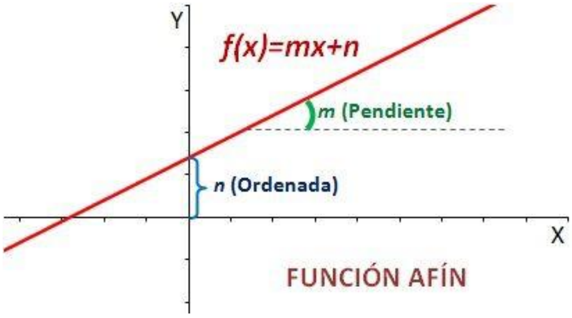
IV. FUNCIÓN AFÍN Y LINEAL

A. FUNCIÓN AFÍN

Una función afín es la que tiene por ecuación $f(x) = mx + n$, siendo m la pendiente de la recta y n la ordenada en el origen, es decir la coordenada y del punto donde la recta corta al eje OY. Su gráfica es una línea recta que pasa por el punto $(0, n)$.

La pendiente m indica la inclinación de la recta (recordad que las gráficas se miran de izquierda a derecha)

- Si $m > 0$, entonces la recta se dice que es creciente
- Si $m < 0$, entonces la recta se dice que decreciente



B. FUNCIÓN LINEAL

Una función lineal es de la forma $f(x) = mx$, también llamada de proporcionalidad directa, donde m es la pendiente de la recta.
Su gráfica es una recta que pasa por el $(0,0)$.
La pendiente m indica la inclinación de la recta

- Si $m > 0$, entonces la recta se dice que es creciente
- Si $m < 0$, entonces la recta se dice que decreciente

C. FUNCIÓN CONSTANTE

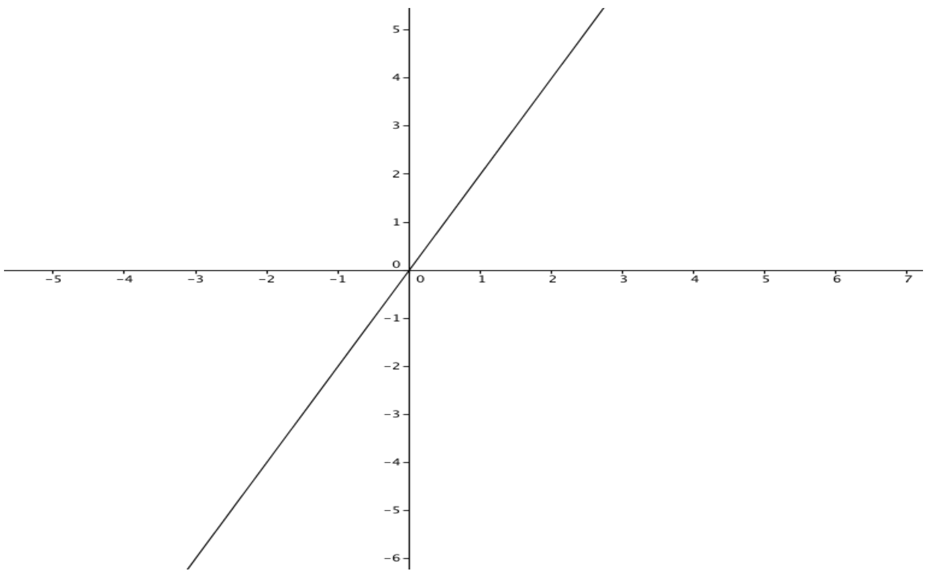
Una función se dice que es constante si es de la forma $f(x) = n$. Su gráfica es una recta paralela al eje OX, es decir de pendiente cero.

Ejemplo:

$y = 2x$ es función lineal, con pendiente 2, y es función creciente
Hacemos una tabla de valores para representarla, los valores de x se dan los que queráis, (dar mejor valores pequeños), y los valores de y se calculan sustituyendo el valor de x correspondiente en la función. A partir de la tabla de valores se representa la gráfica.

Tabla de valores:

x	y
0	0
1	2
-1	-2
2	4

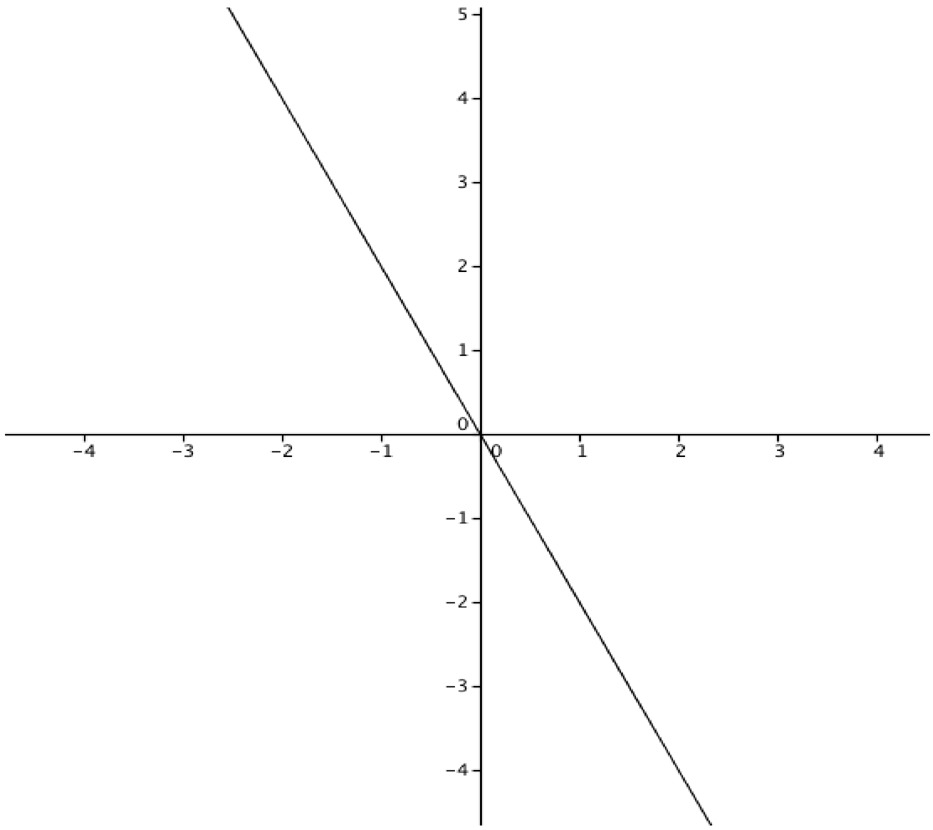


Ejemplo:

$y = -2x$ es función lineal, con pendiente -2 , y es función decreciente

Tabla de valores:

x	y
0	0
1	-2
-1	2
2	-4

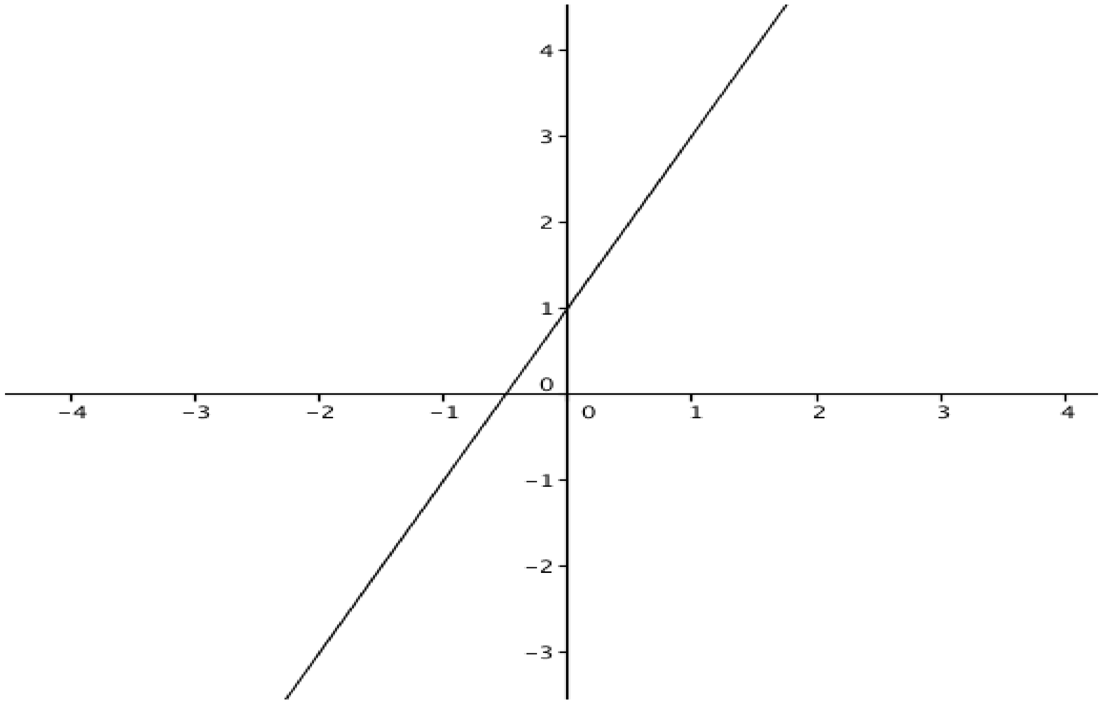


Ejemplo:

$y = 2x + 1$ es función afín, con pendiente 2, y es función creciente

Tabla de valores:

x	Y
0	1
1	3
-1	-1
2	5

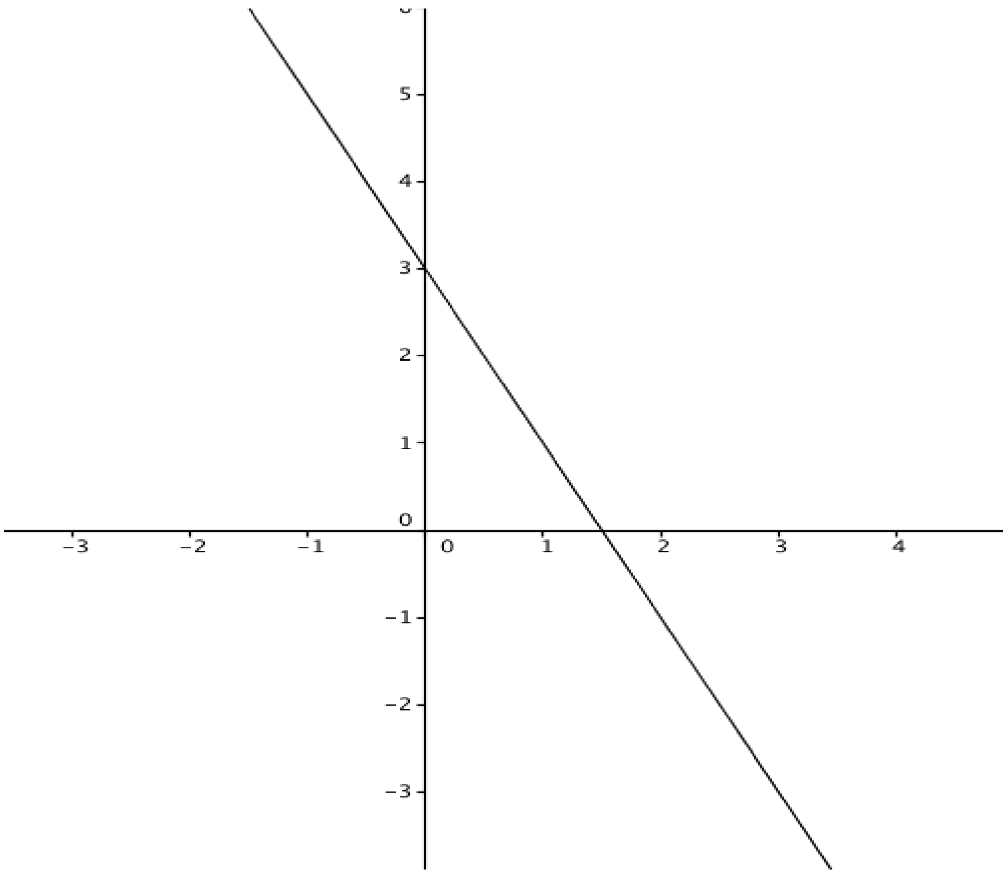


Ejemplo:

$y = -2x + 3$ es función afín , con pendiente -2, y es función decreciente

Tabla de valores:

x	y
0	1
1	3
-1	-1
2	5



EJERCICIOS PARA PRACTICAR:

EJERCICIO 18:

Una compañía de telefonía móvil cobra a sus clientes una cantidad fija al mes de 10 € más $0{,}1$ € por cada minuto de llamada. Construir una tabla que relacione el tiempo consumido y el coste de la factura. ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente? Representa gráficamente.

V. CÁLCULO DE ECUACIONES DE RECTAS

A. CÁLCULO DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS:

Ejemplo:

Recta que pasa por los puntos $A(2,-5)$ y $B(6,1)$.

La recta es de la forma $y = mx + n$, y hay que calcular los valores de m y n.

Como la recta pasa por $A(2,-5)$ entonces, la x vale 2, la y vale -5; es decir,

$$-5 = m \cdot 2 + n$$

Como la recta pasa por $B(6,1)$ entonces, la x vale 6, la y vale 1; es decir,

$$1 = m \cdot 6 + n$$

Entonces vamos a resolver el sistema de ecuaciones con incógnitas m y n

$$\begin{cases} 2m + n = -5 \\ 6m + n = 1 \end{cases}$$

Resolveis por el método que queráis y se obtienen los valores $m = \frac{3}{2}$, $n = -8$

La recta $y = \frac{3}{2}x - 8$

B. CÁLCULO DE LA RECTA QUE PASA POR UN PUNTO CONOCIDA LA PENDIENTE:

Ejemplo:

Recta que pasa por $A(1,-2)$ y de pendiente $m = 3$.

La recta es de la forma $y = mx + n$, entonces como $m = 3$, $y = 3x + n$

Como la recta pasa por $A(1,-2)$, entonces , la x vale 1, la y vale -2; es decir ,

$-2 = 3 \cdot 1 + n$, despejando n se obtiene $n = -5$.

Por tanto la recta es $y = 3x - 5$.

EJERCICIOS PARA PRACTICAR:

EJERCICIO 19:

Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2,-1)$ y $B(-3,-4)$, y represéntala.

EJERCICIO 20:

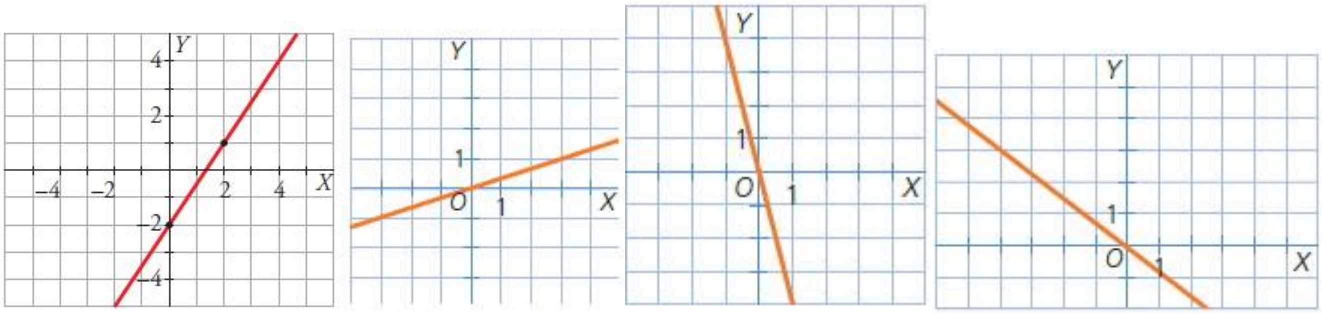
Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2,-1)$ y tiene de pendiente $m = -2$. Haz una tabla de valores y represéntala.

EJERCICIO 21:

Obtén la ecuación de la recta que pasa por los puntos: $A\ (2,-1), B(\ 5,2)$

EJERCICIO 22:

Halla la ecuación de las rectas siguientes:



EJERCICIO 23:

Indica la pendiente y representa las siguientes rectas:

a. $y = -3x - 4$
b. $y = 4$
c. $y = 3x + 2$

VI. POSICIÓN RELATIVA DE 2 RECTAS EN EL PLANO.PUNTOS DE CORTE ENTRE RECTAS

Dos rectas en el plano pueden ser: secantes en un punto (es decir se cortan en un punto), paralelas o coincidentes.

Dos rectas en el plano se **cortan en un punto** cuando tienen distintas pendientes. Para calcularlo se resuelve el sistema lineal formado por ellas.

Ejemplo:

$$y = 5x + 1$$
$$y = 3x + 3$$

Se cortan en un punto porque sus pendientes son distintas. Calculamos el punto de corte resolviendo el sistema lineal formado por ellas:

$$\begin{cases} y = 5x + 1 \\ y = 3x + 3 \end{cases}$$

$5x + 1 = 3x + 3$, entonces, $5x - 3x = 3 - 1$, entonces, $2x = 2$; por tanto $x = 1$. Por lo que, $y = 3.1 + 3 = 6$.

Con lo cual punto de corte es $(1,6)$

Ejemplo:

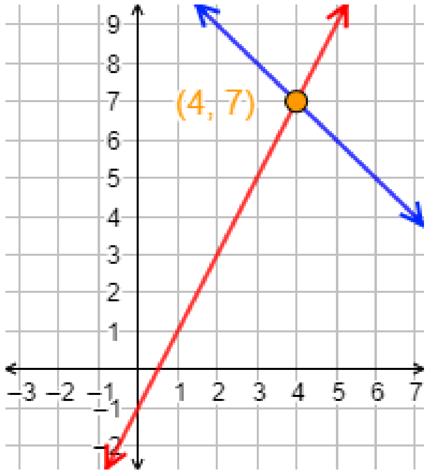
Calculamos el punto de corte de las rectas:

$$y = 11 - x$$
$$y = 2x - 1$$

Resolvemos el sistema formado por ellas, como están despejadas las y, es fácil resolver por igualación

$$11 - x = 2x - 1 \Rightarrow 11 + 1 = 2x + x \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{3} = 4 \Rightarrow y = 11 - 4 = 7$$

Si lo representamos:



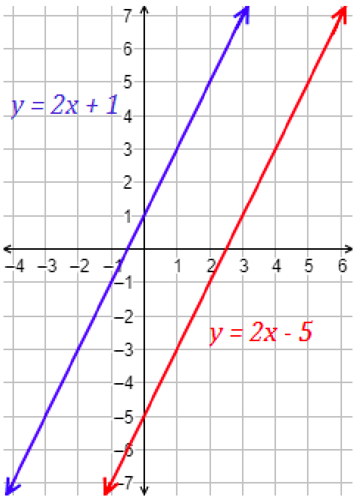
Dos rectas son **paralelas** cuando tienen la misma pendiente y distinta ordenada en el origen.

Ejemplo:

$y = 2x + 1, y = 2x - 5$. Son paralelas por tener ambas pendiente $m = 2$

$\boldsymbol{y = 2x + 1}$

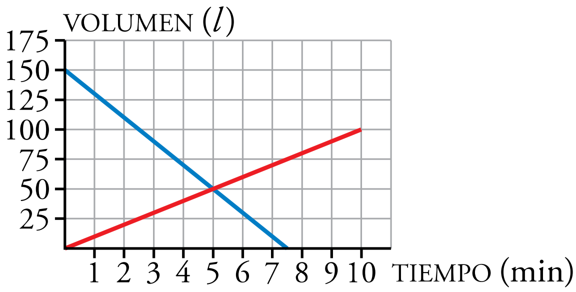
$\boldsymbol{y = 2x - 5}$



Dos rectas son **coincidentes** cuando tienen la misma pendiente e igual ordenada en el origen.

EJEMPLO:

Dos depósitos A y B funcionan de la siguiente forma, a medida que A se vacía, B se llena



a) Indica cuál es la gráfica de A, cuál la de B y escribe sus ecuaciones.
b) ¿Cuáles son las velocidades de entrada y de salida del agua?
c) ¿En qué momento los dos depósitos tienen igual cantidad de agua?

Solución:

a) Como A se vacía, su gráfica debe ser decreciente y como B se llena, su gráfica debe ser creciente. Por lo tanto, la gráfica azul corresponde al depósito A y la roja al B.

Ecuación de A: $y = -20x + 150$

Ecuación de B: $y = 10x$

Para calcular A tomamos por ejemplo los puntos $(0{,}150)$ y $(5{,}50)$

Como la expresión de una recta es $y = mx + n$:

- Por pasar la recta por $(0{,}150)$, tenemos $150 = m \cdot 0 + n$, entonces $n = 150$
- Por pasar la recta por $(5{,}50)$, tenemos $50 = m \cdot 5 + 150$, despejando m se obtiene, $m = -20$, y por tanto $y = -20x + 150$

Para calcular B tomamos los puntos $(0{,}0)$ y $(5{,}50)$

- Por pasar la recta por $(0{,}0)$, entonces $n = 0$
- Por pasar la recta por $(5{,}50)$, tenemos $50 = m \cdot 5$, entonces $m = 10$, y por tanto $y = 10x$

b) El agua sale a una velocidad de $20\ l/min$ y entra a $10\ l/min$.

c) En el minuto 5.

Para saber en qué momento se cortan las dos rectas, es decir su punto de corte , se resuelve el sistema formado por ellas:

$$\begin{cases} y = -20x + 150 \\ y = 10x \end{cases}$$

Resolviendo por el método que queramos, se obtiene que $-20x + 150 = 10x$, entonces $-30x = -150$, y por tanto $x = 5$

Como $x = 5$, entonces $y = 10 \cdot 5 = 50$

Punto de corte $(5{,}50)$

EJERCICIOS PARA PRACTICAR:

EJERCICIO 24:

Hallar, si existe, el punto de corte de las siguientes rectas:

$$y = \frac{x}{2} + 3$$
$$y = 2x - 3$$

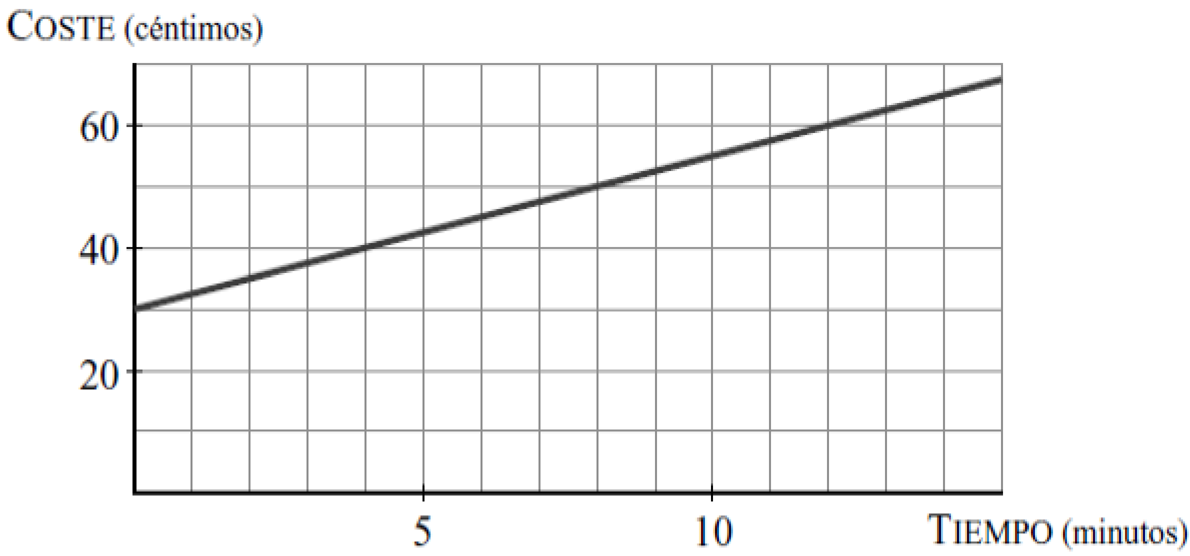
EJERCICIO 25:

Halla, si existe, el punto de corte de las siguientes rectas:

$$y = \frac{x+5}{3}$$
$$y = \frac{x}{3} - 1$$

EJERCICIO 26:

La gráfica representa el coste de las llamadas telefónicas en la operadora Telefón, S.L. en función del tiempo transcurrido:



Una segunda operadora, Baratel,S.A., se anuncia como más competitiva, ofreciendo "coste cero en establecimiento de llamada y una cuota de 5 céntimos por minuto".

a) ¿Cuál es el coste por establecimiento de llamada en la primera compañía? ¿Y la cuota por minuto?
b) Representa, sobre los mismos ejes, la gráfica de los costes en la segunda compañía.
c) Expresa, con una ecuación, el coste de una llamada en cada operadora en función del tiempo transcurrido.
d) Haz un estudio comparativo de los costes, indicando en qué circunstancias interesa contratar una u otra operadora.