

TEMA 7: PROBABILIDADE

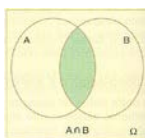
EXPERIMENTO ALEATORIO. SUCESOS

- ★ **Experimentos deterministas:** experimentos tales que os seus resultados se poden predicir con antelación. Por exemplo, cando deixei caer unha pedra, podemos determinar canto tempo tardará en chegar ao chan.
- ★ **Experimentos aleatorios:** experimentos nos que é imposible asegurar cal será o resultado de antemán, aínda que se coñecemos todos os posibles resultados. Por exemplo, o lanzamento dun dado, o sorteo da lotería, ...
- ★ O conxunto de todos os resultados que se poden obter ao realizar un experimento aleatorio recibe o nome de **espazo mostral**. Representase mediante a letra E ou Ω . (**Suceso seguro**)
- ★ **Sucesos elementais:** formados por un único resultado do experimento.
- ★ **Sucesos compostos:** formados por máis dun resultado do experimento aleatorio.
- ★ **Suceso imposible:** non se verifica nunca. Representase por $\emptyset$.
- ★ **Sucesos contrarios.** Dous sucesos son contrarios ou complementarios se a non verificación dun implica a verificación do outro. O contrario do suceso A representase por $\bar{A}$ ou A' .
- ★ **Sucesos incompatibles.** Dous sucesos son incompatibles se non se poden verificar os dous simultaneamente.
- ★ O conxunto de todos os sucesos dun experimento aleatorio recibe o nome de **espazo de sucesos** e represéntase mediante $P(E)$, $P(\Omega)$ ou S .

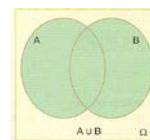
O número de sucesos asociados a un experimento aleatorio con n resultados distintos é 2^n .

OPERACIÓNS CON SUCESOS

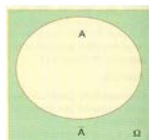
- ★ **Unión:** Chámase UNIÓN de dous sucesos A e B , $A \cup B$, ao suceso que contén todos os elementos que **están en A ou en B**



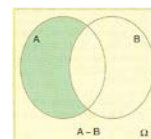
- ★ **Intersección:** Chámase INTERSECCIÓN de dous sucesos $A \cap B$, ao suceso que contén aos elementos que están en A e en B á vez.



- ★ **Diferenza:** Chámase DIFERENZA de dous sucesos A e B , $A - B$, ao suceso que contén aos elementos que están en A pero non en B .



- ★ **Complementario:** Chámase COMPLEMENTARIO ou CONTRARIO do suceso A , $\bar{A}$, ao suceso que contén todos os elementos de E que non están en A .



★ Propiedades das operacións con sucesos

PROPIEDAD	UNIÓN	INTERSECCIÓN
Asociativa	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Simplificativa	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$

Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Elemento ínfimo $\emptyset$	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
Elemento universal E	$A \cup E = E$	$A \cap E = A$
Complementario dun suceso	$A \cup \bar{A} = E$	$A \cap \bar{A} = \emptyset$

Outras propiedades son:

- $\overline{\bar{A}} = A$
- $\overline{\emptyset} = E$
- $\bar{E} = \emptyset$

- As leis de De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

PROBABILIDADE

★ Lei dos grandes números

En experimentos aleatorios é imposible predicir, por exemplo, o resultado do lanzamento dunha moeda. Non obstante, se lanzamos a moeda un número elevado de veces, si que cabe esperar que aproximadamente na metade das ocasións obteñamos como resultado cara, e na outra metade, cruz.

Dado un experimento aleatorio, chamamos A un suceso correspondente a este experimento. Ao realizar o experimento n veces, o suceso A verificarase en m ocasións ($m \leq n$). Este valor m é a **frecuencia absoluta** do suceso A : $f(A)$.

A **frecuencia relativa** do suceso A ($fr(A)$) é a frecuencia absoluta dividida entre o número total de veces que se realizou o experimento.

$$fr(A) = \frac{f(A)}{n}$$

Lei dos grandes números:

A frecuencia relativa dun suceso tende a estabilizarse a medida que aumenta o número de veces que se realiza o experimento.

É posible entón definir intuitivamente a **probabilidade** do suceso A como o límite da súa frecuencia relativa cando o número de veces que se repite o experimento é moi grande (tiende a ∞):

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} fr(A)$$

Da lei dos grandes números despréndese que as probabilidades dos sucesos dun experimento aleatorio só poden ser coñecidas despois de realizar o experimento un número elevado de veces. Estas probabilidades chámanse **probabilidades a posteriori**. En ocasións, este é o único método que permite o cálculo de probabilidades.

★ Definición clásica de probabilidade. Lei de Laplace

Se os sucesos elementais do experimento son **equiprobables**, é dicir, todos teñen a mesma probabilidade, ten que:

Lei de Laplace ou probabilidade a priori:

A probabilidade dun suceso A é o cociente entre o número de casos favorables ao suceso A e o número de casos posibles do experimento:

$$p(A) = \frac{\text{Nº de casos favorables al suceso } A}{\text{Nº de casos posibles}}$$

★ Definición axiomática de probabilidade

Sexa $P(E)$ o espazo de sucesos correspondente a un experimento aleatorio. Unha **probabilidade** é unha aplicación que asocia a cada suceso A un número entre 0 e 1,

$$p: P(E) \rightarrow [0,1]$$

$A \rightarrow p(A)$, cumpríndose:

- $p(E) = 1$
- $0 \leq p(A) \leq 1$
- Se A e B son incompatibles ($A \cap B = \emptyset$), entón: $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

PROPIEDADES DA PROBABILIDADE:

1. $p(A) + p(\bar{A}) = 1$
2. $p(\emptyset) = 0$
3. Xeneralizando o terceiro axioma, se os sucesos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, son incompatibles dous a dous, é dicir, $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j$, entón:

$$p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + \dots + p(A_n)$$

4. Se A e B son dous sucesos compatibles, é dicir, se $A \cap B \neq \emptyset$, entón:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

5. Se A , B e C son compatibles, a propiedade anterior pódese xeneralizar utilizando as propiedades da unión de sucesos:

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C).$$

PROBABILIDADE condicionada

Existen experimentos nos que o coñecemento dalgún aspecto do resultado pode modificar o valor da probabilidade asignada a un suceso.

Denomínase **probabilidade condicionada** de suceso A respecto de suceso B a probabilidade de suceso A sabendo que se cumpriu o suceso B , e represéntase mediante $p(A/B)$.

Calcúlase: $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ se $p(B) \neq 0$ e mide a proporción de veces que acontece

A entre as veces que acontece B .

Despexando na fórmula da probabilidade condicionada obtemos:

Regra do produto (para calcular a probabilidade dunha intersección)

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) \text{ ou } P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

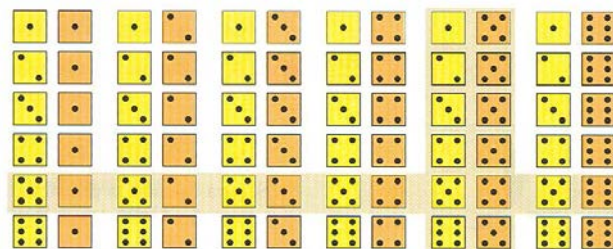
Xeneralizando: $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cap B)$

Exemplo. -

Experimento: "Lanzamento de dous dados"

Suceso A = obter algún 5.

Aplicando a Lei de Laplace: $p(A) = 11/36$.



Consideramos o suceso B = a suma das caras é 8.

Entón: $p(B) = 5/36$.

¿Cal é a probabilidade de que saíse algún 5, sabendo que a suma das caras é 8?

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}, \text{ onde:}$$

$A = \{(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (6,5)\}$
 $B = \{(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)\}$ e $A \cap B = \{(5,3), (3,5)\}$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

As probabilidades son: $p(A) = 11/36$, $p(B) = 5/36$ e $p(A \cap B) = p(B \cap A) = 2/36$, polo tanto:

$$p(A/B) = \frac{2/36}{5/36} = \frac{2}{5}$$

INDEPENDENCIA DE SUCESOS

Dous **sucesos**, A e B, son **independentes** cando a probabilidade dun deles non está condicionada pola verificación do outro.

É dicir, dous sucesos **A e B son independentes** se $P(B/A) = P(B)$ e $P(A/B) = P(A)$

- ✓ Se A e B son independentes entón: $p(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- ✓ Esta fórmula pódese xeneralizar para máis de dous sucesos sempre e cando todos os sucesos sexan independentes dous a dous, é dicir, $p(A_i \cap A_j) = p(A_i) \cdot p(A_j) \quad \forall i, j; i \neq j$

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3) \cdot \dots \cdot p(A_n)$$

PROBABILIDADE TOTAL

Un **sistema completo de sucesos** é un conxunto de sucesos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ tales que:

- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$
- Son sucesos incompatibles dous a dous, é dicir, $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i, j; i \neq j$.

Neste caso, a probabilidade dun suceso calquera, S, pode calcularse:

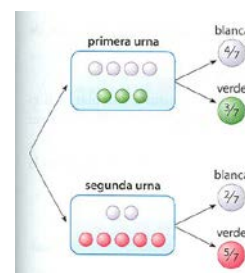
$$P(S) = P(S/A_1) \cdot P(A_1) + P(S/A_2) \cdot P(A_2) + \dots + P(S/A_n) \cdot P(A_n)$$

Esta expresión chámase **regra das probabilidades totais**.

Exemplo. - Temos dúas urnas: a primeira con 3 bólas verdes e 4 brancas, e a segunda con 2 bólas brancas e 5 verdes. Escólese unha das urnas ao chou e extráese unha bóla, ¿cal é a probabilidade de que sexa branca?

$$p(\text{blanca}) = p(1^{\text{a}} \text{ urna}) \cdot p(\text{blanca} | 1^{\text{a}} \text{ urna}) + p(2^{\text{a}} \text{ urna}) \cdot p(\text{blanca} | 2^{\text{a}} \text{ urna})$$

$$= 1/2 \cdot 4/7 + 1/2 \cdot 1/7 = 3/7$$



CÁLCULO DE PROBABILIDADES

★ Cálculo de probabilidades en experiencias sucesivas

Exemplo. - Dunha urna, que ten 3 bólas negras e 4 azuis, extraénsen 2 bólas. ¿Cal é a probabilidade de que as dúas sexan negras?

A formulación do problema será distinta dependendo de como se faga a extracción:

- Opción A. - Extraemos as bólas con relocalización.

Entón os dous **sucesos son independentes** (a primeira extracción e a segunda), pois o resultado da segunda extracción non garda relación con primeira:

$$p(1^{\text{a}} \text{ negra e } 2^{\text{a}} \text{ negra}) = p(1^{\text{a}} \text{ negra}) \cdot p(2^{\text{a}} \text{ negra}) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49} = 0,1837.$$

- Opción B.- Extraemos as bólas sen relocalización.

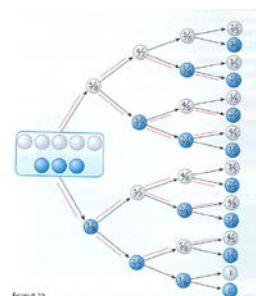
Neste caso, trátase de **sucesos dependentes**, xa que a segunda extracción está condicionada polo resultado que se obtén na primeira:

$$p(1^{\text{a}} \text{ negra e } 2^{\text{a}} \text{ negra}) = p(1^{\text{a}} \text{ negra}) \cdot p(2^{\text{a}} \text{ negra} / 1^{\text{a}} \text{ negra}) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7} = 0,1429.$$

★ Utilización de diagramas en árbore

Exemplo. - Nunha bolsa hai 5 bólas brancas e 3 azuis. Se extraemos 4 bólas consecutivamente sen devolución, ¿cal é a probabilidade de que saian 2 de cada cor?

Observa que para obter a probabilidade final, p, abonda con desprazarse polas ramas favorables do diagrama:



$$P = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = 0,47$$

★ Utilización de táboas de continxencia (SELECTIVIDADE!!!)

Seguíuse a pista a 100 000 coches, durante un ano, de tres marcas distintas A, B e C. Uns tiveron algún accidente serio (AC) e outros non (NON AC).

Repártense do seguinte modo:

	A	B	C
AC	400	200	400
NON AC	49 600	19 800	29 600

- Calcula a probabilidade de que un coche que tivo accidente sexa de tipo A
- Calcula a probabilidade de que un coche de tipo C tivese accidente.
- Calcula a probabilidade de que un coche de tipo B non tivese accidente.

Empezamos completando a táboa coas sumas parciais e a suma total:

	A	B	C	TOTAL
AC	400	200	400	1 000
NON AC	49 600	19 800	29 600	99 000
TOTAL	50 000	20 000	30 000	100 000

- É unha probabilidade condicionada: $p(A / AC) = \frac{400}{1000} = 0,4$
- É unha probabilidade condicionada: $p(AC / C) = \frac{400}{30000} = 0,0133$
- É unha probabilidade condicionada: $p(NO AC / B) = \frac{19800}{20000} = 0,99$

★ **Cálculo de probabilidades a partir do suceso contrario.**

Esta estratexia permite aforrar moitos pasos no cálculo de probabilidades.

Exemplo. - Nun parto, a probabilidade de que un recém nacido sexa neno é de 0,52. Se unha familia ten tres fillos, ¿é a probabilidade de cál que teñan **polo menos** unha nena?

Nacer polo menos unha nena é o suceso contrario de nacer tres nenos, entón podemos escribir: $p(\text{al menos unha nena}) = 1 - p(3 \text{ nenos})$:

$$p(\text{niño}) = 1 - p(\text{niña}) = 1 - 0,52 = 0,48.$$

$$p(3 \text{ nenos}) = 0,48 \cdot 0,48 \cdot 0,48 = 0,1106. \text{ (son independentes)}$$

$$p(\text{al menos unha nena}) = 1 - 0,1106 = 0,8894$$

TEOREMA DE BAYES

O teorema de Bayes inverte a formulación e permite calcular cal é a probabilidade da causa da que provén un determinado suceso, unha vez coñecida a da súa verificación.

Sexan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ un sistema completo de sucesos, (son independentes dous a dous e a súa unión dá o total E) e sexa S outro suceso calquera.

Entón o **teorema de Bayes** di (teorema das probabilidades totais + probabilidade condicionada):

$$p(A_i / S) = \frac{p(A_i) \cdot p(S / A_i)}{p(A_1) \cdot p(S / A_1) + p(A_2) \cdot p(S / A_2) + \dots + p(A_n) \cdot p(S / A_n)}$$

Exemplo. - Nun centro educativo, o 30% dos alumnos que realizan o Bacharelato cursan a modalidade de Tecnoloxía, o 25%, a de Ciencias da Natureza e da Saúde, o 42%, a de Humanidades e Ciencias Sociais, e o 3%, a de Artes. A porcentaxe de aprobados nestas modalidades é do 70%, do 69%, do 80% e do 95%, respectivamente. ¿Cal é a probabilidade de que un alumno determinado, do que sabemos que aprobou, cursase o Bacharelato na modalidade de Tecnoloxía?

Temos que calcular $p(T/ap)$:

Aplicando Bayes:

$$p(T / ap) = \frac{p(T) \cdot p(ap / T)}{p(T) \cdot p(ap / T) + p(C) \cdot p(ap / C) + p(H) \cdot p(ap / H) + p(A) \cdot p(ap / T)} =$$

$$= \frac{\frac{30}{100} \cdot \frac{70}{100}}{\frac{30}{100} \cdot \frac{70}{100} + \frac{25}{100} \cdot \frac{69}{100} + \frac{42}{100} \cdot \frac{80}{100} + \frac{3}{100} \cdot \frac{95}{100}} = 0,28$$