

Nombre:			
Curso: 2º Bach – C	Fecha: 24 – 1 – 2025	Nº	

Examen 04 (Análisis)

1.- Estudia las asíntotas de las siguientes funciones:

a. $f_1(x) = \ln(x^2 - 1)$

Asíntotas verticales de $f_1(x) = \ln(x^2 - 1)$ Debemos estudiar los puntos de discontinuidad: $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

$f_1(x)$ no está definida en $[-1,1]$ por tanto sólo puede tener asíntotas verticales en $x = -1^-$ y en $x = 1^+$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln(x^2 - 1) : \ln 0 = -\infty$; y $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x^2 - 1) : \ln 0 = -\infty$

Por tanto tiene asíntotas verticales hacia $-\infty$ en $x = -1^-$ y en $x = 1^+$

Asíntotas horizontales de $f_1(x) = \ln(x^2 - 1)$ Debemos estudiar los límites hacia $\pm\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - 1) : \ln \infty = +\infty$; y $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x^2 - 1) : \ln \infty = \infty$ Por tanto no tiene asíntotas horizontales

Tampoco tiene asíntotas oblicuas por su construcción

b. $f_2(x) = \frac{x-1}{2x+1}$

Asíntotas verticales de $f_2(x) = \frac{x-1}{2x+1}$ Debemos estudiar los puntos de discontinuidad: $2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$f_2(x)$ no está definida en $x = -\frac{1}{2}$ por tanto sólo puede tener asíntotas verticales en $x = -\frac{1}{2}$

$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} \frac{x-1}{2x+1} : \frac{-3}{0^-} = +\infty$; y $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \frac{x-1}{2x+1} : \frac{-3}{0^+} = -\infty$

Por tanto tiene asíntotas verticales hacia $+\infty$ en $x = -\frac{1}{2}^-$ y hacia $-\infty$ en $x = -\frac{1}{2}^+$

Asíntotas horizontales de $f_2(x) = \frac{x-1}{2x+1}$ Debemos estudiar los límites hacia $\pm\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{2x+1} : \frac{\infty}{\infty}$; Indeterminación, como son polinomios del mismo grado se resuelve dividiendo por la variable de mayor grado en este caso x y nos da $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{2x+1} = \frac{1}{2}$ Por tanto tiene asíntota horizontal hacia $-\infty$ en $y = \frac{1}{2}$

Del modo análogo se obtiene que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2x+1} = \frac{1}{2}$ Por tanto tiene asíntota horizontal hacia ∞ en $y = \frac{1}{2}$

No tiene asíntotas oblicuas porque tiene 2 asíntotas horizontales

2.- Los beneficios (en cientos de miles de euros anuales) estimados de una pequeña empresa durante un periodo de 5 años se ajustan a la función $B(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, $0 \leq x \leq 5$, donde $B(x)$ representa los beneficios de la empresa después de x años. ($x = 0$ corresponde al año 2018)

a. ¿Durante algún año la empresa no tuvo beneficios?

Para responder a eso debemos resolver $B(x) = 0 \rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0$; $x(x^2 - 6x + 9) = 0$; $x(x - 3)^2 = 0$; $x = 0, x = 3$ Es decir no tuvo beneficios los años 2018 y 2021

b. Indica los períodos de tiempo en los que los beneficios aumentaron o disminuyeron. A partir de esos datos indica que años se obtuvieron los beneficios máximos y mínimos en esos 5 años y calcula su cuantía.

Estudiamos la monotonía a partir de la derivada de $B(x) \rightarrow B'(x) = 3x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x + 9$

$3x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow (x - 1)(x - 3) = 0$ Por tanto $B'(x) = 0$ para $x = 1, x = 3$

Dibujamos la recta real y distinguimos 3 intervalos; tomamos un valor en cada uno y estudiamos el signo de $B'(x)$



$B'(0) = 9 > 0$
 $B'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3 < 0$
 $B'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 > 0$

Por tanto $B(x)$ es creciente en $(0,1) \cup (3,5)$ y decreciente en $(1,3)$ Aumentaron los beneficios hasta el primer año (2019) y a partir del tercero (2021), y disminuyeron entre el primero (2019) y el tercer año (2021)

Puntuación máxima - Todos los ejercicios: 2 puntos cada uno.

Cualquier respuesta sin la justificación adecuada tendrá una calificación de 0 puntos

Nombre:			
Curso:	2º Bach – C	Fecha:	24 – 1 – 2025 N°

El punto $x = 1$ es un máximo y $x = 3$ es un mínimo

Calculamos el valor de $B(x)$ en esos puntos: $B(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4$ y $B(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0$

Pero también debemos calcular el valor de $B(x)$ en los extremos $x = 0$ y $x = 5$

$B(0) = 0$ y $B(5) = 5^3 - 6 \cdot 5^2 + 9 \cdot 5 = 125 - 150 + 45 = 20$

Por tanto el mínimo se alcanzó en 2018 y 2021 con un beneficio de 0€ y el máximo en 2023 con 1500000 €

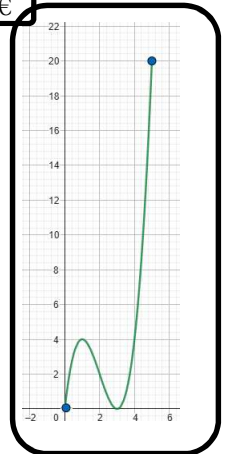
c. Calcula, si lo tiene, su punto de inflexión. Con toda la información anterior esboza una gráfica de la función $B(x)$

Buscamos el punto de inflexión a partir de la segunda derivada de $B(x) \rightarrow B''(x) = (3x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x + 9)' = 6x - 12$

$B''(x) = 0; 6x - 12 = 0; x = 2$ **Tiene un punto de inflexión en $x = 2$**

Para esbozar la gráfica calculamos la imagen de todos los puntos que estudiamos:

- $B(0) = 0$
- $B(1) = 4$
- $B(3) = 0$
- $B(5) = 20$



3.- Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a. $g_1(x) = 250 - |x^2 - 1|$; Para derivar esta función primero debemos expresarla como función definida a trozos: $|x^2 - 1| = 0 \rightarrow x = \pm 1, g_1(x) = \begin{cases} 250 - (x^2 - 1) & \text{si } x < -1 \\ 250 + (x^2 - 1) & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 250 - (x^2 - 1) & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Por tanto $g_1'(x) = \begin{cases} -(2x) & \text{si } x < -1 \\ 2x & \text{si } -1 < x < 1 \\ -(2x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$ entonces **$g_1'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < -1 \\ 2x & \text{si } -1 < x < 1 \\ -2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$**

b. $g_2(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 - 1}$; $g_2'(x) = \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x^2 - 1}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' + (\sqrt{x^2 - 1})' = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}}(x^2 - 1)' = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} 2x = \frac{-1}{x^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{-1}{x^2} + \frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 1} = \frac{-(x^2 - 1) + x^2 \cdot x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}{x^2(x^2 - 1)} = \frac{x^3 \sqrt{x^2 - 1} - x^2 + 1}{x^2(x^2 - 1)}$

4.- Dada la función $c(x) = x^3 - ax^2 + 8x$ calcula el valor del parámetro a sabiendo que presenta un punto de inflexión en $x = 2$.

Para conocer el valor del parámetro a calculamos la segunda derivada de $c(x) \rightarrow$

$c'(x) = (x^3 - ax^2 + 8x)' = 3x^2 - 2ax + 8; c''(x) = (3x^2 - 2ax + 8)' = 6x - 2a$

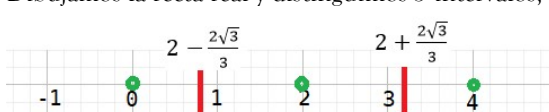
Como en $x = 2$ tiene un punto de inflexión $\rightarrow c''(2) = 0$ por tanto $6 \cdot 2 - 2a = 0$ con lo que **$a = 6$**

Estudia la monotonía de $c(x)$ para $a = 6$

Estudiamos la monotonía a partir de la derivada de $c(x) \rightarrow c'(x) = 3x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x + 8$

$3x^2 - 12x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 96}}{6} = 2 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$, aproximadamente $x_1 \cong 3'1547$ y $x_2 \cong 0'8453$

Dibujamos la recta real y distinguimos 3 intervalos; tomamos un valor en cada uno y estudiamos el signo de $c'(x)$



$c'(0) = 8 > 0$
 $c'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 8 = -4 < 0$
 $c'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 8 > 0$

Por tanto $c(x)$ es creciente en $(-\infty, 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}) \cup (2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}, \infty)$ y decreciente en $(2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}, \infty)$

Puntuación máxima - Todos los ejercicios: 2 puntos cada uno.

Cualquier respuesta sin la justificación adecuada tendrá una calificación de 0 puntos

Nombre:			
Curso: 2º Bach – C	Fecha: 24 – 1 – 2025	Nº	

5.- Calcula los siguientes límites:

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{5x^2 - 2x} - x \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{5x^2 - 2x} - x : [\infty - \infty]$ Indeterminación del tipo $\infty - \infty$, Multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{5x^2 - 2x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{5x^2 - 2x} - x)(\sqrt{5x^2 - 2x} + x)}{\sqrt{5x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x^2 - 2x) - x^2}{\sqrt{5x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 2x}{\sqrt{5x^2 - 2x} + x} : \frac{\infty}{\infty}$$

Esta indeterminación se resuelve por el grado de los polinomios (numerador de grado 2 y denominador de grado 1) por tanto $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{5x^2 - 2x} - x = +\infty$

b. $\lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{x^2}{x^2 - 9} - \frac{x+1}{x-3} \right] \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{x^2}{x^2 - 9} - \frac{x+1}{x-3} \right] : \left[\frac{9}{0} - \frac{4}{0} \right]$ Indeterminación del tipo $\infty - \infty$, Operamos:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{x^2}{x^2 - 9} - \frac{x+1}{x-3} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{(x^2) - (x+1)(x+3)}{x^2 - 9} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{x^2 - x^2 - 4x - 3}{x^2 - 9} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{-4x - 3}{x^2 - 9} \right] : \frac{-15}{0} : \pm \infty$$

Calculamos límites laterales: $\lim_{x \rightarrow 3^-} \left[\frac{-4x-3}{x^2-9} \right] = \frac{-15}{0^-} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left[\frac{-4x-3}{x^2-9} \right] = \frac{-15}{0^+} = -\infty$

No existe límite porque los límites laterales son diferentes