Autoevaluación

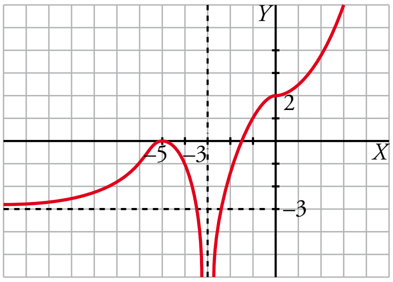
Página 217

1 Dibuja la gráfica de una función f de la que sabemos:

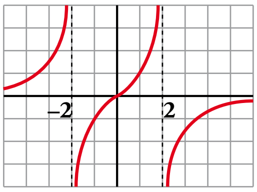
$$\mathop{\text{lím}}_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \mathop{\text{lím}}_{x \to -\infty} f(x) = -3, \quad \mathop{\text{lím}}_{x \to -3} f(x) = -\infty$$

$$f'(-5) = 0; \; f'(0) = 0; \; f(-5) = 0; \; f(0) = 2$$

Tiene tangente horizontal en los puntos (–5, 0) y (0, 2). En el primero tiene un máximo, y en el segundo, un punto de inflexión.



2 Describe la gráfica de la siguiente función:



- El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

  Es una función impar, continua y derivable en su dominio.

- Tiene dos asíntotas verticales: las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

  $\mathop{\text{lím}}_{x \to -2^-} f(x) = +\infty; \quad \mathop{\text{lím}}_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

  $\mathop{\text{lím}}_{x \to 2^-} f(x) = +\infty; \quad \mathop{\text{lím}}_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

  La recta $y = 0$ es la asíntota horizontal de la función cuando $x \to \pm\infty$.

- Es creciente en los intervalos $(-\infty, 2)$, $(-2, 2)$ y $(2, +\infty)$.

3 ¿Tiene $f(x) = x^3 + 2x + 4$ máximos y/o mínimos? ¿Y algún punto de inflexión? Estudia su curvatura y represéntala.

$f(x) = x^3 + 2x + 4$

- $f'(x) = 3x^2 + 2$

  $f'(x) = 0 \;\to\; 3x^2 = -2 \;\to\;$ no tiene solución.

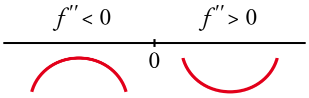
  $f'(x) > 0$ para todo $x \;\to\; f(x)$ es creciente.

  No tiene máximos ni mínimos.

- $f''(x) = 6x$

  $f''(x) = 0 \;\to\; 6x = 0 \;\to\; x = 6$

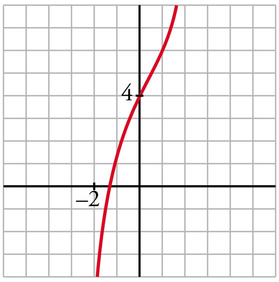
Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en (0, 4).

- Además, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- Gráfica:



4 **Estudia las asíntotas y los puntos singulares de cada una de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:**

a) $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+4}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2-6x+5}{x-3}$

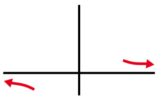
a) • Dominio: $\mathbb{R}$

- Asíntotas:

  No tiene asíntotas verticales, ya que $x^2 + 4 \neq 0$.

  Horizontales: $y = 0$, ya que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{6x}{x^2+4} = 0$.

  Posición
  Si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$
  Si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$

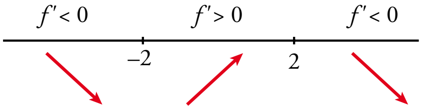


- Puntos singulares:

  $$f'(x) = \frac{6(x^2+4) - 6x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-6x^2+24}{(x^2+4)^2}$$

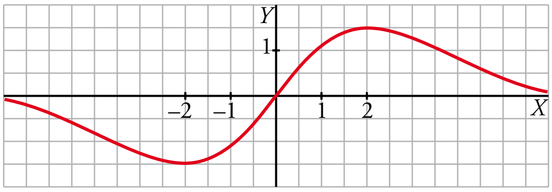
  $f'(x) = 0 \to -6x^2 + 24 = 0$
  $x = -2$, $f(-2) = -3/2$
  $x = 2$, $f(2) = 3/2$

  Signo de $f'(x)$:



  Mínimo: $\left(-2, -\dfrac{3}{2}\right)$. Máximo: $\left(2, \dfrac{3}{2}\right)$.

- Representación:



b) • Dominio: $\mathbb{R} - \{3\}$

• Asíntotas verticales: $x = 3$, porque $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = \pm\infty$.

Posición $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = -\infty \end{cases}$

• Asíntotas horizontales:

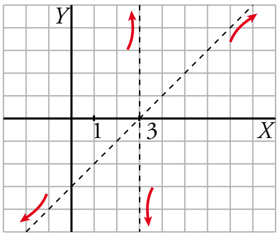
No tiene, porque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = -\infty$.

• Asíntotas oblicuas:

Expresamos la función de la forma $\dfrac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}} = \text{cociente} + \dfrac{\text{resto}}{\text{divisor}}$

$\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = x - 3 + \dfrac{-4}{x - 3} \to y = x - 3$ es asíntota oblicua.

Posición $\begin{cases} \text{Si } x \to +\infty, \; f(x) < x - 3 \\ \text{Si } x \to -\infty, \; f(x) > x - 3 \end{cases}$



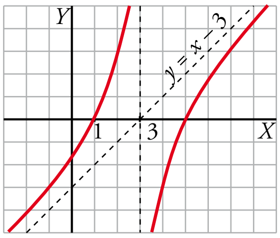
• Puntos singulares:

$$y' = \frac{(2x - 6)(x - 3) - (x^2 - 6x + 5)}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 13}{(x - 3)^2}$$

$y' = 0 \to x^2 - 6x + 13 = 0 \to x = \dfrac{6 \pm \sqrt{-16}}{2}$ (no tiene solución).

Signo de y': la derivada es positiva en todo el dominio. La función es creciente. No tiene máximos ni mínimos.

Corta a los ejes en los puntos $\left(0, -\dfrac{5}{3}\right)$, $(1, 0)$ y $(5, 0)$.



5 **Representa la función $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$. Indica sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus extremos.**

Para $x < 2$, la gráfica es una parábola con vértice en $(0, 4)$.

Para $x > 2$, es una recta.

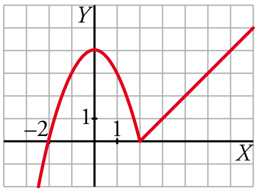
$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ No es derivable en $x = 2$.

$f'(x) = 0 \to -2x = 0 \to x = 0$

$f(0) = 2 \begin{cases} f(x) \text{ es creciente en } (-\infty, 0) \cup (2, +\infty). \\ \text{Es decreciente en } (0, 2). \end{cases}$

Tiene un máximo en el punto (0, 4) y un mínimo en (2, 0).

Representación:



6 **Halla los máximos y los mínimos de $f(x) = x\sqrt{x+3}$. Indica si tiene asíntotas y represéntala gráficamente.**

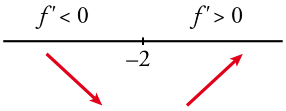
$f(x) = x\sqrt{x+3}$. Dominio = $(-3, +\infty)$

- Hallamos los puntos singulares:

$$f'(x) = \sqrt{x+3} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+3}} = \frac{2(x+3)+x}{2\sqrt{x+3}} = \frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x + 6 = 0 \rightarrow x = -2,\ f(-2) = -2$$

Signo de f':

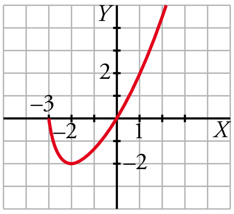


La función tiene un mínimo en (–2, –2).

- La función no tiene asíntotas:

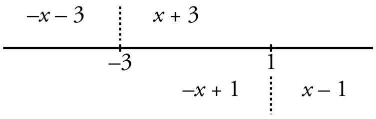
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

- Gráfica:



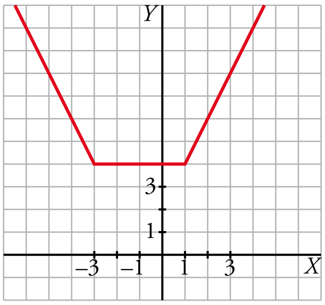
7 **Dibuja la gráfica de $f(x) = |x+3| + |x-1|$.**

$f(x) = |x+3| + |x-1|$



- Si $x < -3$: $-x - 3 - x + 1 = -2x - 2$
- Si $-3 \le x < 1$: $x + 3 - x + 1 = 4$
- Si $x \ge 1$: $x + 3 + x - 1 = 2x + 2$

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } x < -3 \\ 4 & \text{si } -3 \le x < 1 \\ 2x + 2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$



8 **Calcula los puntos de corte con los ejes y los puntos singulares de la función $y = ln(-x^2 + 1)$. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y esboza la gráfica.**

- *Dominio* = $(-1, 1) \to y$ es una función par.

- $f(x) = 0 \to f(x) = -x^2 + 1 = 1 \to x = 0$

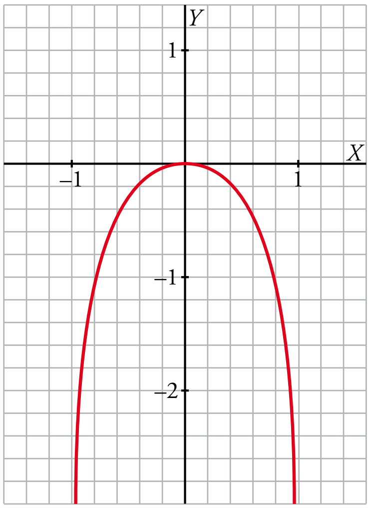
  El único punto de corte con los ejes es (0, 0).

- $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1} = 0 \to x = 0$

  $f''(x) = -\dfrac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2} < 0$ para todo x.

  Por tanto, (0, 0) es un máximo.

- f tiene dos asíntotas verticales en $x = -1$ y $x = 1$.



9 **Representa la función $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$.**

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$$

- Dominio = $\mathbb{R}$.
- No tiene asíntotas verticales, porque $e^x \neq 0$ para todo x.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x+1)^2}{e^x} = 0 \to y = 0$ es asíntota horizontal hacia $+\infty \to f(x) > 0$

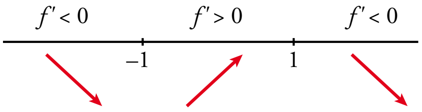
  $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x+1)^2}{e^x} = +\infty \to$ No tiene asíntota horizontal hacia $-\infty$.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2(x+1)e^x - (x+1)^2 e^x}{(e^x)^2} = \frac{2x + 2 - (x+1)^2}{e^x} = \frac{-x^2+1}{e^x}$$

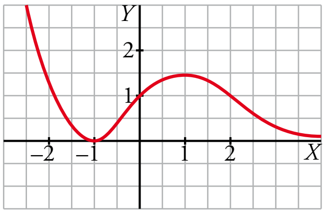
$$f'(x) = 0 \to -x^2 + 1 = 0 \begin{cases} x = 1, \ f(1) = \dfrac{4}{e} \\ x = -1, \ f(-1) = 0 \end{cases}$$

Signo de f':

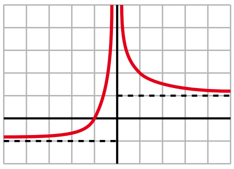


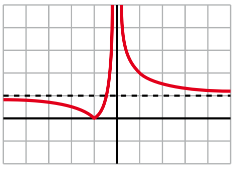
Mínimo: $(-1, 0)$. Máximo: $\left(1, \dfrac{4}{e}\right)$

- Gráfica:



10 **¿Qué gráfica corresponde a $f(x) = \dfrac{x+1}{|x|}$?**





$$f(x) = \frac{x+1}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{x+1}{-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x+1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{-x} = -1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1 \end{array}\right\}$$

- Asíntota vertical: $x = 0$
- Asíntotas horizontales: $y = -1$ e $y = 1$

La gráfica de f es la primera.