7 APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

AUTOEVALUACIÓN

1 a) Escribe la ecuación de la tangente a la siguiente curva en su punto de inflexión:

$$f(x) = 3x^2 - (x + 2)^3$$

b) ¿Existe algún punto en el que la recta tangente sea paralela al eje X?

a) Hallamos el punto en el que se anula su segunda derivada:

$f'(x) = 6x - 3(x + 2)^2$

$f''(x) = 6 - 6(x + 2) = -6x - 6$

$f''(x) = 0 \;\to\; -6x - 6 = 0 \;\to\; x = -1$

Observamos que la función pasa de cóncava a convexa en el punto de abscisa $x = -1$ estudiando el signo de la derivada segunda. Luego en $x = -1$ hay un punto de inflexión.

$x = -1,\; f(-1) = 2,\; f'(-1) = -9$

La recta tangente en su punto de inflexión es $y = 2 - 9(x + 1)$.

b) Los valores de x en los que la recta tangente es paralela al eje X son aquellos en los que se anula la derivada de f.

$f'(x) = 0 \;\to\; 6x - 3(x + 2)^2 = 0 \;\to\; x^2 + 2x + 4 = 0 \;\to$ No tiene solución.

Por tanto, no hay puntos con tangente horizontal.

2 Dada la función $f(x) = \dfrac{-x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4x + 3}$ se pide:

a) Sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

b) Máximos y mínimos relativos.

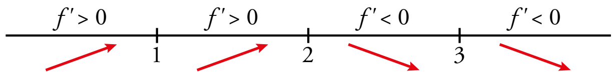
a) Calculamos el dominio de la función:

$x^2 - 4x + 3 = 0 \;\to\; x = 1,\; x = 3$

La función no está definida en $x = 1$ y $x = 3$. En estos valores no es continua ni derivable. El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{1, 3\}$.

$$f'(x) = \frac{-14x + 28}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; -14x + 28 = 0 \;\to\; x = 2$



Los intervalos de crecimiento son $(-\infty, 1)$ y $(1, 2)$.

Los intervalos de decrecimiento son $(2, 3)$ y $(3, +\infty)$.

b) $x = 2,\; f(2) = -8$

En el punto $(2, -8)$ hay un máximo relativo.

3 **Las funciones $f(x) = x^4 + ax^2 + bx$ y $g(x) = x - cx^2$ pasan por el punto (1, 0). Determina los coeficientes a, b y c para que tengan la misma recta tangente en dicho punto y calcúlala.**

- Pasan por (1, 0):

  $f(1) = 1 + a + b = 0 \qquad (1)$

  $g(1) = 1 - c = 0 \;\to\; c = 1$

- Tienen la misma recta tangente en ese punto:

  $f'(x) = 4x^3 + 2a + b$

  $g'(x) = 1 - 2cx = 1 - 2x$

  $f'(1) = g'(1) \;\to\; 4 + 2a + b = -1 \qquad (2)$

Resolvemos el sistema compuesto por las ecuaciones (1) y (2) y obtenemos:

$a = -4,\ b = 3$

La recta tangente es $y = -x + 1$.

4 **El número de personas ingresadas en un hospital por una infección después de t semanas viene dado por la función:**

$$N(t) = \frac{350t}{2t^2 - 3t + 8} \quad \text{siendo } t \ge 0$$

Calcula el máximo de personas ingresadas y la semana en que ocurre. ¿A partir de qué semana, después de alcanzar el máximo, el número de ingresados es menor que 25?

- Para calcular el máximo, derivamos e igualamos a cero:

$$N'(t) = \frac{350(2t^2 - 3t + 8) - 350t(4t - 3)}{(2t^2 - 3t + 8)^2} = \frac{350(-2t^2 + 8)}{(2t^2 - 3t + 8)^2} = 0 \;\to$$

$$\to\; -2t^2 + 8 = 0 \;\to\; t^2 = 4 \begin{cases} t = -2 \;\; (\text{no vale, pues } t \ge 0) \\ t = 2 \;\to\; N(2) = \dfrac{350 \cdot 2}{2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 8} = 70 \end{cases}$$

El número máximo de personas ingresadas es 70, y ocurre en la 2.ª semana.

- Hemos de ver cuándo $\dfrac{350t}{2t^2 - 3t + 8} < 25$.

$$350t < 50t^2 - 75t + 200 \;\to\; 50t^2 - 425t + 200 > 0 \;\to\; 2t^2 - 17t + 8 > 0$$

Resolvemos la inecuación:

$$f(t) = 2t^2 - 17t + 8 = 0 \begin{cases} t = 8 \\ t = 0,5 \end{cases}$$

$f(t) > 0$	0,5	$f(t) < 0$	8	$f(t) > 0$

$f(t) > 0$ para $t \in (0;\ 0,5) \cup (8,\ +\infty)$.

Después de alcanzar el máximo en $t = 2$, a partir de $t = 8$, el número de personas ingresadas es menor que 25.

5 Sea $B(x) = ax + b\sqrt{x}$ la función de beneficios de una empresa. Sabemos que el beneficio máximo es 50 000 euros y se obtiene si $x = 100$ unidades producidas. Calcula a y b.

$B(x) = ax + b\sqrt{x}$

Sabemos que $B(100) = 50$ y $B'(100) = 0$

$$B(100) = 100a + 10b = 50$$

$$B'(x) = a + \frac{b}{2\sqrt{x}} \to B'(100) = a + \frac{b}{20} = 0$$

Resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 100a + 10b = 50 \\ a + \dfrac{b}{20} = 0 \to a = -\dfrac{b}{20} \end{cases}$$

$$100\left(-\frac{b}{20}\right) + 10b = 50 \to \frac{-b}{2} + b = 5 \to -b + 2b = 10 \to b = 10;\ a = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, $B(x) = -\frac{x}{2} + 10\sqrt{x}$.

6 En un parque natural, el tamaño de una población de aves se ajusta a la función:

$$N(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50, & 0 \le t \le 10 \\ 95 - \dfrac{250}{t}, & t > 10 \end{cases}$$

con $N(t)$ en cientos y t, en años.

a) ¿A partir de qué año crecerá el número de aves?

b) ¿Es mínima esa población algún año?

c) ¿A qué valor tiende la población con el paso del tiempo?

d) Calcula el intervalo de tiempo en el que la población se mantiene entre 5 000 y 7 500 aves.

a) La función está definida por intervalos mediante funciones continuas en sus respectivos intervalos de definición.

En $t = 10$ también es continua, ya que $\lim_{t \to 10^-} (t^2 - 8t + 50) = \lim_{t \to 10^+} \left(95 - \frac{250}{t}\right) = N(10) = 70$

$$N'(t) = \begin{cases} 2t - 8 & \text{si } 0 < t < 10 \\ \dfrac{250}{t^2} & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

La derivada solo se anula cuando $2t - 8 = 0 \to t = 4$.

A partir de ese instante, la derivada es positiva cuando $4 < t < 10$ y cuando $t > 10$. Por tanto, la población crecerá a partir del cuarto año.

b) La población es mínima cuando $t = 4$ y es $N(4) = 34$, es decir, 3 400 aves. Esto es debido a que la función decrece cuando $0 < t < 4$ y a lo comentado en el apartado anterior.

c) Para hallar ese valor calculamos:

$$\lim_{t \to +\infty} \left(95 - \frac{250}{t}\right) = 95$$

Es decir, con el paso del tiempo la población tiende a ser de 9 500 aves.

d) Como $N(0) = 50$, la población empieza siendo de 5 000 aves. Desciende hasta las 3 400 cuando $t = 4$ y a partir de ahí crece. Cuando $t = 10$, la población es de 7 000 aves, como se ha visto en el apartado a). Para que alcance las 7 500 debe cumplirse que:

$$75 = 95 - \frac{250}{t} \to t = \frac{25}{2} = 12{,}5$$

Por tanto, la población se mantiene entre 5 000 y 7 500 aves cuando $0 \le t \le 12{,}5$.

7 Se quiere construir una caja con tapa que tenga el máximo volumen y que sea el doble de ancha que de larga. Se dispone de 30 m^2 de chapa. ¿Qué medidas de largo y de ancho debe tener la caja?

Llamamos x al largo e y al alto. Entonces, el ancho es $2x$.

Por tanto, la cantidad de chapa usada es $6xy + 4x^2 = 30$.

Queremos que la función volumen sea máxima $\rightarrow$ $V = 2x \cdot x \cdot y = 2x^2y$ máxima.

Despejamos y en la primera igualdad: $6xy + 4x^2 = 30 \rightarrow y = \dfrac{30 - 4x^2}{6x} = \dfrac{15 - 2x^2}{3x}$

y sustituimos en la función volumen: $V = 2x^2 \cdot \dfrac{15 - 2x^2}{3x} = \dfrac{2x(15 - 2x^2)}{3} = \dfrac{30x - 4x^3}{3}$

Derivamos e igualamos a cero:

$$V' = 10 - 4x^2; \; V' = 0 \rightarrow 10 - 4x^2 = 0 \rightarrow x = -\sqrt{\frac{5}{2}} \text{ (no válida)}, \; x = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Como $V'' = -8x$ es negativa en $x = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$, en este valor hay un máximo relativo.

Las dimensiones pedidas son: largo $= \sqrt{\dfrac{5}{2}}$ m; ancho $= 2\sqrt{\dfrac{5}{2}} = \sqrt{10}$ m; alto $= \dfrac{10}{3\sqrt{\dfrac{5}{2}}} = \dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ m