Dos importantes teoremas

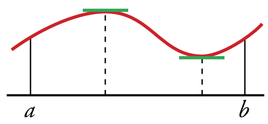
Lo que dicen estos teoremas es muy sencillo y natural. Con ellos se simplifican notablemente las demostraciones de varios resultados que hemos enunciado y utilizado, sin demostrar, en esta unidad. Recordemos dos de ellos:

$$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ es creciente en } x_0$$

$$f'(x_0) = 0 \text{ y } f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ tiene un mínimo relativo en } x_0$$

Teorema de Rolle

La idea del teorema de Rolle es que una curva continua y sin puntos angulosos que toma los mismos valores en los extremos de un intervalo necesariamente tiene algún punto con tangente horizontal.



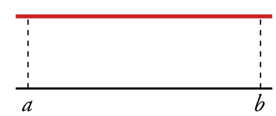
f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b).
Si $f(a) = f(b)$, existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demostración

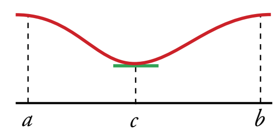
HIPÓTESIS		TESIS
• f continua en $[a, b]$ • f derivable en (a, b) • $f(a) = f(b)$	$\Rightarrow$	Existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

Puesto que f es continua en $[a, b]$, alcanza en dicho intervalo un valor máximo y un valor mínimo (teorema de Weierstrass, unidad 8). Distingamos dos casos:

I. El máximo y el mínimo están uno en a y otro en b. Como $f(a) = f(b)$, el máximo y el mínimo coinciden. La función es constante en todo el intervalo y su derivada es cero no solo en algún punto, sino en todos.



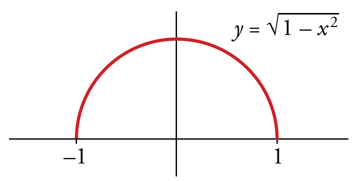
II. f alcanza el máximo o el mínimo en un punto c distinto de los extremo del intervalo. Como f es derivable en c, se cumple que $f'(c) = 0$. (Estamos aplicando lo que ya demostramos en el epígrafe 3: si f tiene máximo o mínimo en x_0 y es derivable en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$).



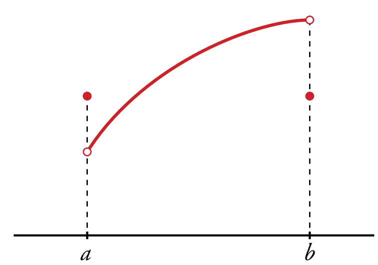
Observaciones: ¿Por qué se exigen estas hipótesis?

- La condición «f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b)» puede resultar chocante. ¿Por qué no poner, simplemente, derivable en $[a, b]$, con lo cual exigiríamos la existencia de derivadas laterales? Porque hay funciones con tangente vertical y, por tanto, no derivables en alguno de los extremos que quedarían injustamente separadas de los beneficios de este teorema.

  Por ejemplo, la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, continua en $[-1, 1]$, derivable en $(-1, 1)$ pero no derivable en $[-1, 1]$. Fíjate en que $f(1) = f(-1) = 0$ y que $f'(0) = 0$.



- ¿Y por qué no exigimos, simplemente, que «f sea derivable en (a, b)»? Pues porque si no exigiéramos que f sea continua en los extremos del intervalo se nos «colarían» funciones como la del margen, que, evidentemente, no es buena candidata para pretender que cumpla la tesis.



$f(a) = f(b)$ pero no existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$ porque f no es continua en $[a, b]$.

En definitiva: es necesario exigir la continuidad en $[a, b]$, y es conveniente conformarse con la derivabilidad en (a, b).

Ejercicios resueltos

1 *Comprobar que la función:*

$$y = x^3 - 4x + 3$$

cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 2]. ¿En qué punto cumple la tesis?

La función es derivable y, por tanto, continua en todo $\mathbb{R}$.

Además, $f(0) = f(2) = 3$. Cumple las hipótesis. Por tanto, cumplirá la tesis; es decir, tendrá un punto de derivada nula entre 0 y 2.

$$f'(x) = 3x^2 - 4 \;\rightarrow\; 3x^2 - 4 = 0 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Efectivamente, $c = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}15 \in (0, 2)$ y $f'(c) = 0$.

2 *Aplicando el teorema de Rolle, demostrar que la ecuación $x^4 - 8x^2 + k = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo [0, 2], cualquiera que sea el valor de k.*

Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo: supondremos que tiene dos raíces, r y s, en el intervalo [0, 2] y llegaremos a una contradicción.

Si r y s son raíces de la ecuación, $0 \le r < s \le 2$, entonces $P(x) = x^4 - 8x^2 + k$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[r, s]$, pues por ser polinómica es derivable, y por tanto continua, y además $P(r) = P(s) = 0$.

Se cumple, pues, la tesis: hay un número $c \in (r, s)$ para el cual $P'(c) = 0$. Como $c \in (r, s)$, entonces $0 < c < 2$.

Pero $P'(x) = 4x^3 - 16x$ solo tiene tres raíces: –2, 0, 2, ninguna de ellas está contenida en el intervalo (0, 2). Llegamos, pues, a una contradicción. Conclusión: la ecuación no tiene dos raíces en (0, 2). (Es decir, tiene una o ninguna).

3 *Calcular p, m y n para que:*

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + px & si\ \ -1 \le x \le 3 \\ mx + n & si\ \ \ 3 < x \le 5 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [–1, 5]. ¿Dónde cumple la tesis?

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -9 + 3p \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3m + n \end{array}\right\} \text{Para que } f \text{ sea continua, ha de ser } \boxed{-9 + 3p = 3m + n}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f'(x) = -2 \cdot 3 + p \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f'(x) = m \end{array}\right\} \text{Para que } f \text{ sea derivable, ha de ser } \boxed{-6 + p = m}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = -1 - p \\ f(5) = 5m + n \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que } f \text{ tome el mismo valor en} \\ \text{los dos extremos del intervalo } [-1, 5] \end{array} \rightarrow \boxed{-1 - p = 5m + n}$$

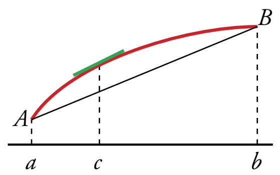
El sistema formado por las tres ecuaciones señaladas tiene como solución $p = 10/3$, $m = -8/3$, $n = 9$. Para estos valores se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 10/3 & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ -8/3 & \text{si } 3 < x \le 5 \end{cases} \qquad f'(x) = 0 \iff x = \frac{5}{3}$$

La tesis del teorema de Rolle se cumple en $c = \dfrac{5}{3}$, pues $f'\left(\dfrac{5}{3}\right) = 0$.

Teorema del valor medio

La idea del teorema del valor medio (T.V.M.) es que en una curva continua y sin puntos angulosos que va de A a B habrá algún punto intermedio en el que su tangente sea paralela al segmento AB.



f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces, existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

HIPÓTESIS

- f continua en $[a, b]$
- f derivable en (a, b)

$\Downarrow$

TESIS

Existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración

Vamos a estudiar la función $\psi(x)$, que se obtiene al restar de la ordenada de la curva, $f(x)$, la ordenada de la recta r que pasa por $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$.

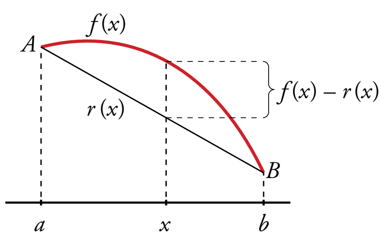
(ψ es una letra del alfabeto griego. Se llama *psi*).

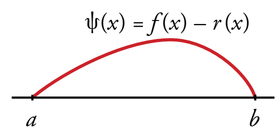
La ecuación de la recta r es:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Es decir:

$$r(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$





Por tanto:

$$\psi(x) = f(x) - r(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Esta función cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[a, b]$, pues, además de ser continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), verifica que $\psi(a) = \psi(b)$.

Veámoslo:

$$\left.\begin{array}{l} \psi(b) = f(b) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0 \\[2ex] \psi(a) = f(a) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0 \end{array}\right\} \to \psi(b) = \psi(a)$$

Por tanto, $\psi(x)$ cumple la tesis del teorema de Rolle: existe $c \in (a, b)$ tal que $\psi'(c) = 0$.

Como $\psi'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$:

$$\psi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Es decir, existe un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

TEN EN CUENTA

$\psi(x) = f(x) - r(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) porque $f(x)$ y $r(x)$ lo son.

Ejercicios resueltos

1 *Comprobar que $y = \sqrt{x}$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 9].*

¿Dónde cumple la tesis?

$\sqrt{x}$ es continua en [0, 9] y derivable en (0, 9). Cumple, pues, las hipótesis del T.V.M. Por tanto, cumple la tesis. Veamos dónde:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{f(9)-f(0)}{9-0} = \dfrac{\sqrt{9}-\sqrt{0}}{9-0} = \dfrac{1}{3} \\ f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{array}\right\} \dfrac{1}{2\sqrt{c}} = \dfrac{1}{3} \ \to \ c = \dfrac{9}{4}$$

Como $\dfrac{9}{4} \in (0,9)$ y $f'\left(\dfrac{9}{4}\right) = \dfrac{f(9)-f(0)}{9-0} = \dfrac{1}{3}$, en $c = \dfrac{9}{4}$ se cumple la tesis.

2 *Calcular a y b para que la función*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x < 1 \\ 2x + 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del T.V.M. en el intervalo [–1, 5].

¿Dónde cumple la tesis?

Para que sea continua en $x_0 = 1$: $1 + a + b = 2 + 1 \ \to \ a + b = 2$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a, & x < 1 \\ 2, & x \ge 1 \end{cases}$$

Para que sea derivable en $x_0 = 1$, ha de ser $2 \cdot 1 + a = 2 \ \to \ a = 0$

$(a + b = 2$ y $a = 0) \ \Rightarrow \ b = 2$

La función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 1 \\ 2x + 1, & x \ge 1 \end{cases}$ es continua en [–1, 5] y derivable en (–1, 5).

Por tanto, cumple las hipótesis del T.V.M.

Veamos dónde cumple la tesis:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(5)-f(-1)}{5-(-1)} = \frac{11-3}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ 2, & x \ge 1 \end{cases} \ \to \ 2c = \frac{4}{3} \ \to \ c = \frac{2}{3}$$

La tesis se cumple en el punto $c = \dfrac{2}{3} \in (-1, 5)$.

3 *Si $f(x) = mx^2 + nx + p$, comprobar que en esta parábola se tiene que el punto c para el cual*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

es, precisamente, la media aritmética de a y b:

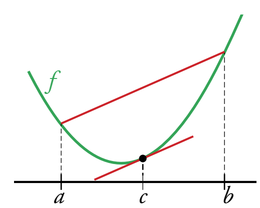
$$c = (a + b)/2$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{(mb^2+nb+p)-(ma^2+na+p)}{b-a} =$$

$$= \frac{m(b^2-a^2)+n(b-a)}{b-a} = m(b + a) + n$$

$f'(c) = 2mc + n$

Por tanto: $2mc + n = m(b + a) + n \ \to \ 2c = b + a \ \to \ c = \dfrac{b+a}{2}$



Punto medio de (*a*, *b*)