

ESTADÍSTICA E PROBABILIDADE**Exemplo 1.****CONTEXTO**

A partir de datos obtidos con máis de 100.000 traballadores, estableceuse que o tempo medio en España da duración do traxecto dende o domicilio ata o posto de traballo é de 36 minutos. Aínda que algunhas persoas aproveitan ditos desprazamentos para escoitar música ou ler, a maioría da poboación considera ditos desprazamentos como unha perda de tempo. Aqueles que empregan medios de transporte privados teñen maior probabilidade de sufrir un accidente, ademais de contribuír ao aumento da contaminación.

Os responsables dunha gran empresa fixeron un estudo sobre os modos de desprazamento dos seus traballadores, chegando á conclusión de que o 60% empregaban medios propios e o 40% restante fan os seus desprazamentos ao traballo en medios de transporte públicos. Para analizar se hai diferencias entre os tempos de desprazamento ata o traballo entre os dous grupos, se elixiron 100 persoas ao azar de cada un deles, medindo os seus tempos de desprazamento. Pódese supoñer que ditos tempos teñen distribución normal coa mesma varianza para os dous grupos. O intervalo de confianza, cun nivel de confianza do 95%, para o tempo medio de desprazamento dos que empregaron transporte privado foi (24,06;29,94). Para os que empregaron medios de transporte público, o tempo medio obtido coa mostra de 100 persoas foi de 24 minutos.

Responda estes tres apartados: 1.1., 1.2. e 1.3.

1.1. Supoñendo que o tempo medio de desprazamento para os traballadores da empresa que empregan medios propios é de 27 minutos, calcule a probabilidade de que un deses empregados tarde máis de 25 minutos en chegar dende o domicilio ata o lugar de traballo.

1.2. Supoñendo que o tempo medio de desprazamento do persoal que emprega medios públicos é de 25 minutos, se se elixe ao azar un dos traballadores da empresa, cal é a probabilidade de que empregue máis de 25 minutos en chegar dende o domicilio ata o posto de traballo?

1.3. Sen realizar o cálculo do correspondente intervalo, indique os motivos polo que os intervalos (19,27) e (22,26) non poderían corresponderse coa estimación por intervalo de confianza, cun nivel de confianza do 99%, do tempo medio de desprazamento daqueles empregados que fan os desprazamentos ao traballo en medios de transporte público. Xustifique as respostas.

Solucións Problemas Competenciais. Problema 1

1.1.

Temos a variable: X_{MP} = “Tempo medio de desprazamento para traballadores que empregan medios propios”. $X_{MP} \rightarrow N(27, \sigma)$

Para calcular a probabilidade solicitada, debemos calcular previamente o valor da desviación típica σ . Sabemos polos datos do exercicio que o intervalo de confianza con nivel de confianza do 95% para a media da variable X_{MP} foi (24,06 ; 29,94).

Tendo en conta a expresión do intervalo de confianza con nivel de confianza $1-\alpha$ para a media dunha variable con distribución normal, $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, podemos igualar dita expresión a (24,06; 29,94).

Como coñecemos $\bar{x} = 27$ que coincide co punto medio do intervalo, $z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$ e $\sqrt{n} = \sqrt{100} = 10$, temos que $24,06 = 27 - 1,96 \times \frac{\sigma}{10}$.

Despexando obtemos que $\sigma = 12$. Polo tanto, a probabilidade pedida é :

$$P(X_{MP} > 25) = P\left(Z > \frac{25-27}{12}\right) = P(Z > -0,17) = 0,5675.$$

1.2.

Consideremos os seguintes sucesos tendo en conta os medios de transporte empregados polos traballadores para acudir ao traballo:

MP=“Empregan medios propios”, e

TP=“Empregan transporte público”.

Sábese que $P(MP) = 0,6$, $P(TP) = 0,4$.

Pídese calcular a probabilidade do seguinte suceso T =“Un empregado elixido ao azar tarde máis de 25 minutos en chegar dende o domicilio ata o traballo”. Como temos unha partición (ou un sistema completo de sucesos) podemos empregar o Teorema da probabilidade total.

$$P(T) = P(T/MP)P(MP) + P(T/TP)P(TP).$$

Tendo en conta os datos do exercicio, que $P(T/MP) = P(X_{MP} > 25)$ e a simetría da variable con distribución normal (o que significa que $P(T/TP) = 0,5$ por ser a media 25) teríamos substituindo na expresión anterior o seguinte resultado:

$$P(T) = P(T/MP)P(MP) + P(T/TP)P(TP) = 0,5675 \times 0,6 + 0,5 \times 0,4 = 0,427.$$

1.3.

O primeiro intervalo (19; 27) non podería ser xa que está centrado en 23, e o punto medio tería que coincidir coa estimación da media que foi 24.

O segundo intervalo (22; 26) ten lonxitude igual a 4. Tendo en conta que os datos da desviación típica e o tamaño de mostra coinciden para os dous grupos, como agora o nivel de confianza é maior, a lonxitude do intervalo de confianza para a media do tempo de desprazamento dos que empregan transporte público con nivel de confianza do 99% tería que ser maior que a lonxitude do intervalo proporcionado para media da variable X_{MP} con nivel de confianza do 95%, que foi de 5,88.

ESTADÍSTICA E PROBABILIDADE

Exemplo 2.

CONTEXTO

Unha televisión privada que emite a nivel estatal puxo en marcha un concurso de televisión, para o que realizou unha campaña de publicidade previa coa finalidade de atopar participantes. Anotáronse máis de 4.000 persoas entre as que elixiron a 100 grupos de dous concursantes, tendo en conta que por motivos de lograr unha maior audiencia, seleccionaron diversos perfís de idades e representantes de tódalas comunidades autónomas. Son programas de curta duración para emitir xusto antes das noticias das 21:00.

Nunha primeira fase cada grupo de dous concursantes teñen que elixir unha de tres portas, sabendo que detrás dunha delas hai un premio en metálico de 1.000 euros. O primeiro concursante elixe unha porta, se está o premio gaña os 1.000 euros, pasa directamente á segunda fase e o segundo concursante xa non ten opcións de participar no concurso. De non elixir a porta co premio queda eliminado e o segundo concursante ten que seleccionar unha porta entre as dúas restantes. No caso de acertar coa porta co premio gaña os 1.000 euros e pasa á segunda fase. De non elixir dita porta, ningún concursante consegue o premio de 1.000 euros nin pasa á segunda fase.

No caso de que un concursante logre superar a primeira fase, na segunda repítese o proceso da primeira pero cun maior importe e coa posibilidade de cambiar a súa elección. De novo, o concursante ten que elixir unha porta entre tres, aínda que neste caso o importe do premio que está detrás dunha única porta é de 10.000 euros. Unha vez elixida a porta, o presentador, que coñece en que porta está o premio, amósalle ao concursante unha porta entre as dúas que non seleccionou e na que non está o premio, e ofrécelle ao concursante a posibilidade de cambiar de porta.

Nota: A segunda fase do concurso correspóndese co coñecido coma o problema de Monty Hall, baseado no concurso estadounidense *Let's Make a Deal*.

Responda estes catro apartados: 2.1., 2.2., 2.3. e 2.4

2.1. Un concursante ao coñecer as regras do concurso e tendo en conta que se o primeiro en elixir acerta coa porta correcta o segundo concursante xa non tería opción de participar, pide elixir en primeiro lugar porque dese xeito cre que tería maior probabilidade de gañar. É certa a súa suposición ou é indiferente elixir en primeiro ou segundo lugar?

2.2. Tendo en conta só a primeira fase, os acontecementos “gaña o primeiro en elixir” e “gaña o segundo en elixir”, son incompatibles?, son independentes?

2.3. A partir da resposta do apartado anterior, indique unha norma xeral que relacione sucesos independentes e incompatibles. Xustifique a resposta.

2.4. Sábese que a estratexia óptima para gañar o premio da segunda fase é aceptar a opción do presentador, é dicir, cambiar a elección da porta inicial pola porta que o presentador non amosa entre as dúas non elixidas. Demostre que ao cambiar a elección inicial a probabilidade de gañar o premio duplícase.

Solucións Problemas Competenciais. Problema 2

2.1.

Consideremos os seguintes sucesos:

P_1 ="Gañar na primeira fase xogando en primeiro lugar", e

S_1 ="Gañar na primeira fase xogando de segundo"

Como hai 3 portas e o premio está nunha delas, é evidente que $P(P_1) = 1/3$. Do anterior tamén temos que $P(\overline{P_1}) = 2/3$, e sabemos que os sucesos P_1 e $\overline{P_1}$ forman unha partición. Para calcular a probabilidade de gañar xogando de segundo, debemos ter en conta: i) que o primeiro xogador non elixiu a porta premiada; ii) entre as dúas portas que quedan debe elixirse a premiada. Así, aplicando o Teorema da probabilidade total:

$$P(S_1) = P(S_1/P_1) \times P(P_1) + P(S_1/\overline{P_1}) \times P(\overline{P_1}) = 0 \times 1/3 + 1/2 \times 2/3 = 1/3.$$

Polo tanto, é indiferente para gañar na primeira fase xogar en primeiro ou en segundo lugar.

2.2.

Para que gañe o segundo xogador ten que perder o primeiro, entón non poden ocorrer os dous conxuntamente, é dicir, son sucesos incompatibles, e temos que $P_1 \cap S_1 = \emptyset$.

Tendo en conta que $P(P_1 \cap S_1) = P(\emptyset) = 0 \neq 1/9 = 1/3 \times 1/3 = P(P_1)P(S_1)$, os sucesos P e S non son independentes.

2.3.

Dous sucesos incompatibles con probabilidade positivas non poden ser independentes. A probabilidade da intersección é 0, mentres que o produto das probabilidades individuais será maior que 0 por ser as dúas positivas, polo que serán diferentes.

Supoñamos dous sucesos incompatibles, A e B con probabilidade positivas, se fosen independentes a ocorrencia dun deles non daría información sobre a probabilidade da ocorrencia do outro. E isto non é certo, xa que se o suceso A ocorre, está proporcionando información sobre a ocorrencia de B , xa que B non podería ocorrer, por ser incompatibles.

2.4.

Consideremos os seguintes sucesos:

G_2 ="Gañar na segunda fase se non cambia de porta"

H_2 ="Gañar na segunda fase cambiando de porta"

En relación á segunda fase, temos a seguinte partición (ou sistema completo de sucesos) formada polos sucesos:

A ="O premio está na porta elixida en primeiro lugar", e

$\bar{A}$ ="O premio non está na porta elixida en primeiro lugar"

Como hai 3 portas e o premio está nunha delas, é evidente que $P(A) = 1/3$ e $P(\bar{A}) = 2/3$

Aplicando o Teorema da probabilidade total, temos que:

$$\begin{aligned} P(G_2) &= P(G_2/A)P(A) + P(G_2/\bar{A})P(\bar{A}) = 1 \times 1/3 + 0 \times 2/3 = 1/3, \text{ e} \\ P(H_2) &= P(H_2/A)P(A) + P(H_2/\bar{A})P(\bar{A}) = 0 \times 1/3 + 1 \times 2/3 = 2/3. \end{aligned}$$

Deste xeito, a probabilidade de gañar duplícase se o concursante decide cambiar de porta.

ESTADÍSTICA E PROBABILIDADE**Exemplo 3.****CONTEXTO**

Os responsables municipais da poboación na que reside levaron a cabo o ano pasado un plan de renovación dos contedores de lixo, instalando novos contedores de recollida selectiva. A súa capacidade variará entre os 1.800 litros para os contedores de materia orgánica e os 2.900 litros para os contedores destinados á recollida de envases lixeiros, papel e cartón, vidro e fracción restante. Os contedores, ademais de contar con sensores intelixentes que medirán o seu volume para optimizar o tráfico de camiós, integraranse no mobiliario urbano para reducir o impacto estético. Cando se iniciou o citado plan, tívose en conta que en ocasións son necesarias reparacións ou substitucións por diferentes motivos: desgaste polo uso, rotura por fenómenos meteorolóxicos adversos, actos vandálicos, etc.

Estableceuse que nun mes determinado a probabilidade de reparar ou substituír polo menos dous contedores de papel e cartón é 0,1; ademais, que a probabilidade de reparar ou substituír polo menos dous contedores de envases lixeiros, tendo reparados ou substituídos polo menos dous contedores de papel e cartón, é de 0,4. Sábese que a probabilidade de que nun mes determinado sexa necesario reparar como máximo un contedor de papel e cartón e como máximo un de envases lixeiros é de 0,72.

Responda estes tres apartados: 3.1., 3.2. e 3.3.

3.1. Calcule a probabilidade de que nun mes determinado sexa necesario reparar ou substituír máis dun contedor dos dous tipos considerados no parágrafo anterior.

3.2. Se se sabe que nun mes foi necesario reparar ou substituír menos de dous contedores de papel e cartón, cal é a probabilidade de que nese mesmo mes sexa necesario reparar ou substituír dous ou máis contedores de envases lixeiros?

3.3. Sen realizar operacións adicionais, indique se os acontecementos “reparar ou substituír polo menos dous contedores de papel e cartón” e “reparar ou substituír polo menos dous contedores de envases lixeiros” son ou non independentes. Parécelle razoable? Xustifique a resposta.

Solucións Problemas Competenciais. Problema 3

3.1.

Consideremos os seguintes sucesos:

C ="É necesario reparar ou substituír polo menos dous contedores de papel e cartón", e
 E ="É necesario reparar ou substituír polo menos dous contedores de envases lixeiros".

Polo que teríamos que os sucesos complementarios ou contrarios serían:

$\bar{C}$ ="É necesario reparar ou substituír un ou ningún contedor de papel e cartón", e
 $\bar{E}$ ="É necesario reparar o substituír uno o ningún contedor de envases lixeiros".

A partir da información do enunciado coñecemos os seguintes datos:

$$P(C) = 0,1, P(E/C) = 0,4 \text{ e } P(\bar{E} \cap \bar{C}) = 0,72.$$

Temos que calcular $P(E \cap C)$. Empregando a fórmula da probabilidade da intersección de dous sucesos

$$P(E \cap C) = P(C)P(E/C),$$

obtemos que $P(E \cap C) = 0,04$.

3.2.

Temos que calcular $P(E/\bar{C})$. Empregando a fórmula da probabilidade condicionada

$$P(E|\bar{C}) = \frac{P(E \cap \bar{C})}{P(\bar{C})}.$$

A partir de $P(\bar{E} \cap \bar{C}) = 0,72$ pode calcularse $P(E \cup C) = 1 - P(\bar{E} \cap \bar{C}) = 0,28$.

Coma $P(E \cap \bar{C}) = P(E) - P(E \cap C) = P(E \cup C) - P(C) = 0,18$.

Por outra parte $P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 0,9$.

Co que temos que $P(E|\bar{C}) = \frac{0,18}{0,9} = 0,2$.

3.3.

Coma $P(E/C) = 0,4 > P(E|\bar{C}) = 0,2$, os sucesos E e C non son independentes.

Segundo os valores obtidos, dispoñer da información de que sexa necesario reparar ou substituír dous o máis contedores de papel e cartón, duplica a probabilidade de que sexa necesario reparar ou substituír dous o máis contedores de envases lixeiros, con relación a aquelas situacións nas que, como moito sexa necesario reparar ou substituír un ou ningún contedor de papel e cartón.

Parece razoable que sexa así xa que a ocorrencia dun deles aporta información sobre a ocorrencia do outro. Se houbo que cambiar varios contedores dun tipo (por cuestións meteorolóxicas, actos vandálicos,...) é mais probable que haxa que cambiar contedores doutro tipo.

ESTADÍSTICA E PROBABILIDADE

Exemplo 4.

CONTEXTO

Algunhas probas médicas resultan ser «positivas» ou «negativas». Se a proba fose infalible, «positiva» indicaría que a persoa examinada ten a enfermidade en cuestión; «negativa» indicaría que non a ten. Unha guionista está escribindo, para unha coñecida plataforma de *streaming*, unha historia que ten lugar nun país imaxinario. Explica no seu guión que, para detectar unha rara enfermidade que afecta a 1 de cada 10000 persoas, unha empresa farmacéutica logra desenvolver unha proba que resulta ser moi fiable, pois soamente 1 de cada 100 persoas libres da enfermidade obtén un resultado positivo, e soamente 2 de cada 100 persoas que padecen a enfermidade obteñen resultados negativos. Di tamén que os detalles que revelan o deseño da proba están protexidos por varios sistemas de seguridade, e que, o 9 de agosto de 2024, a clave que permite abrir o último deses sistemas é o número 219, que se calculou, especificamente para ese día, do seguinte xeito:

clave = n.º de ríos cuxa lonxitude en metros comeza co dígito 9,
de entre os 2000 máis longos do país = 219.

Pouco antes de entregar o seu guión, xórdenlle dúbidas acerca da verosimilitude das súas cifras, conque decide compartilas cunha amiga matemática. Esta dille que lle responderá despois de ter calculado as seguintes probabilidades:

- P_1 = a probabilidade de que unha persoa cunha proba positiva teña a enfermidade.
- P_2 = a probabilidade de que unha persoa cunha proba negativa teña a enfermidade.
- P_3 = a probabilidade de que 219 ríos ou máis teñan unha lonxitude en metros cuxo primeiro dígito sexa o 9. Con relación a este punto, a amiga matemática observa que, en moitos conxuntos de datos reais, os primeiros díxitos non se distribúen de xeito uniforme, senón que seguen a chamada *lei de Benford*, a cal afirma que a probabilidade de que un número comece co dígito d é $p = \log_{10}(1 + 1/d)$. Por elo, suporá que a probabilidade de que un río teña unha lonxitude en m cuxo primeiro dígito sexa o 9 é $p = 0.0458$.

Responda estes tres apartados: 4.1., 4.2. e 4.3.

4.1. Calcule P_1 e P_2 . Entenda que os únicos resultados posibles da proba son «positivo» ou «negativo».

4.2. Calcule P_3 .

4.3. En función dos valores de P_1 , P_2 e P_3 , dea ao menos un motivo polo cal a guionista debería modificar algunha das súas cifras. Non é necesario que diga cales deberían ser esas modificacións nin como deberían ser efectuadas.

Solucións Problemas Competenciais. Problema 4

4.1

Consideremos os sucesos E = «ter a enfermidade» e Pos = «obter un resultado positivo na proba». Sábese que:

$$P(Pos|\bar{E}) = \frac{P(Pos \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{1}{100} = 10^{-2},$$

$$P(\overline{Pos}|E) = \frac{P(\overline{Pos} \cap E)}{P(E)} = \frac{2}{100} = 2 \times 10^{-2},$$

$$P(E) = \frac{1}{10000} = 10^{-4}.$$

Pídense os valores de $P_1 = P(E|Pos)$ e de $P_2 = P(E|\overline{Pos})$.

➤ Cálculo de $P_1 = P(E|Pos) = P(E \cap Pos)/P(Pos)$:

○ Posto que $P(E) = P(E \cap Pos) + P(E \cap \overline{Pos})$, tense

$$\begin{aligned} P(E \cap Pos) &= P(E) - P(E \cap \overline{Pos}) = P(E) - P(\overline{Pos}|E)P(E) \\ &= 10^{-4} - 2 \times 10^{-2} \times 10^{-4} = 10^{-4} - 2 \times 10^{-6} \\ &= (100 - 2) \times 10^{-6} = 98 \times 10^{-6} = 9.8 \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

○ $P(Pos) = P(Pos \cap E) + P(Pos \cap \bar{E}) = P(Pos \cap E) + P(Pos|\bar{E})P(\bar{E}) = 9.8 \times 10^{-5} + 10^{-2} \times (1 - 10^{-4}) = 9.8 \times 10^{-5} + 9.999 \times 10^{-3} = 1.0097 \times 10^{-2}$.

Finalmente,

$$P_1 = P(E|Pos) = \frac{P(E \cap Pos)}{P(Pos)} = \frac{9.8 \times 10^{-5}}{1.0097 \times 10^{-2}} \approx 9.7059 \times 10^{-3}.$$

➤ Cálculo de $P_2 = P(E|\overline{Pos})$:

Como se viu arriba, $P(E \cap \overline{Pos}) = P(\overline{Pos}|E)P(E) = 2 \times 10^{-2} \times 10^{-4} = 2 \times 10^{-6}$ e $P(Pos) = 1.0097 \times 10^{-2}$ de onde

$$P_2 = P(E|\overline{Pos}) = \frac{P(E \cap \overline{Pos})}{P(\overline{Pos})} = \frac{2 \times 10^{-6}}{1 - 1.0097 \times 10^{-2}} \approx 2.0204 \times 10^{-6}.$$

SOLUCIÓN ALTERNATIVA PARA 4.1:

É posible completar a seguinte táboa de continxencia (en negriña, as porcentaxes que se deducen inmediatamente dos datos do enunciado):

	Pos	$\overline{Pos}$	
E	0.0098	$100 \times P(E \cap \overline{Pos}) = 0.0002$	$100 \times P(E) = 0.01$
$\bar{E}$	$100 \times P(Pos \cap \bar{E}) = 0.9999$	98.9901	99.99
	1.0097	98.9903	100

Agora calcúlanse facilmente

$$P_1 = P(E|Pos) = \frac{0.0098}{1.0097} \approx 9.7059 \times 10^{-3}$$

e

$$P_2 = P(E|\overline{Pos}) = \frac{0.0002}{98.9903} \approx 2.0204 \times 10^{-6}.$$

4.2.

Sexa $X = \text{«n.º de ríos cuxas lonxitudes en metros comezan cun 9, de entre os 2000»}$.

$X \rightarrow B(n, p)$, con $n = 2000$ e $p = 0.0458$. Tense logo $q = 1 - p = 0.9542$. Pídese $P_3 = P(X \geq 219)$.

$np = 91.6$, $nq = 1908.4$, $\sqrt{npq} \approx 9.3490$. Como $np > 5$ e $nq > 5$, X pode aproximarse por $\tilde{X} \rightarrow N(91.6, 9.349)$.

$$Z = \frac{\tilde{X} - 91.6}{9.349} \rightarrow N(0,1).$$

Aplicando a corrección de Yates ou de medio punto,

$$\begin{aligned} P_3 = P(X \geq 219) &\approx P(\tilde{X} \geq 218.5) = P\left(Z \geq \frac{218.5 - 91.6}{9.349}\right) \approx P(Z \geq 13.57) \\ &= 1 - P(Z < 13.57) \approx 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

4.3.

A guionista di que a proba «resulta ser moi fiable» para detectar a enfermidade, pero, segundo o valor de P_1 , soamente o 0.97% das persoas cun positivo padece realmente a enfermidade, polo que a proba non é boa para ese fin. Si o é, non obstante, para descartala, pois, de acordo co valor de P_2 , soamente o 0.0002% das persoas cun negativo padece a enfermidade. A guionista podería modificar as súas cifras buscando que a proba sexa fiable para detectar a enfermidade.

Por outra banda, o valor de P_3 dinos que é practicamente imposible que haxa 219 ríos cuxa lonxitude empece co díxito 9. A guionista podería modificar as súas cifras para corrixir este defecto.

ESTADÍSTICA E PROBABILIDADE

Exemplo 5.

CONTEXTO

A crise climática non vai parar, e a comunidade internacional rexeita o compromiso necesario para revertela. O período comprendido entre 2010 e 2019 foi a década máis cálida que se ten rexistrada, provocando incendios forestais, furacáns, secas, inundacións e outros grandes desastres naturais a todos os continentes. A nosa Comunidade Autónoma sofre numerosos incendios ao longo do ano. Queremos analizar diferentes propostas que nos axuden a combatelas e tentar minimizar o seu impacto no medio ambiente.

Para extinguir ou mitigar o lume emprégase auga transportada en avións anfibios, de distintos modelos. O avión anfíbio tipo 2 (ALFA) ten unha capacidade de 2.000 litros de auga, e o modelo máis empregado é o Air Tractor AT-802FB. Tamén empregan avións anfíbio tipo 1 (FOCA), tanto os Canadair CL-215T como os Bombardier 415, con capacidades de 5.000 e 6.000 litros, respectivamente.

Por datos recollidos de varios anos, pódese afirmar que os bombeiros/as conseguen apagar en menos de dous días o 80 % dos lumes que afectan a máis dunha hectárea. Nun mes no que se produciron 150 lumes de máis dunha hectárea en Galicia.

Responda estes catro apartados: 5.1., 5.2., 5.3. e 5.4

5.1. Calcule o valor esperado e a desviación típica do número de lumes de máis dunha hectárea que nese mes os/as bombeiros/as consigan apagar en menos de dous días.

5.2. Calcule a probabilidade de que nese mes os/as bombeiros/as consigan apagar entre 115 e 125 (ambos os dous incluídos) lumes de máis dunha hectárea en menos de dous días.

5.3. Considere os sucesos A ="Empregar avións tipo 2", B ="Empregar avións tipo 1" e C ="Empregar avións tipo 1 e tipo 2". Escriba a relación entre os sucesos A , B e C . Escriba o valor da probabilidade do suceso C en función da probabilidade dos sucesos A e B no caso de que A e B sexan independentes. Escriba o valor da probabilidade do suceso C en función da probabilidade dos sucesos A e B no caso de que A e B sexan incompatibles.

5.4. Proporcione unha interpretación do que quere dicir que os sucesos A e B do apartado anterior sexan incompatibles. Proporcione unha interpretación do que quere dicir que os sucesos A e B do apartado anterior sexan independentes.

Solucións Problemas Competenciais. Problema 5

5.1

Sexa X = “n.º de lumes dese mes e de máis dunha hectárea que os/as bombeiros/as conseguen apagar en menos de dous días”.

$X \rightarrow B(n, p)$, con $n = 150$ e $p = 0,8$. Tense $q = 1 - p = 0,2$. Temos entón que a media e a desviación típica da variable X son iguais a $\mu = np = 120$ e $\sigma = \sqrt{npq} \approx 4,9$.

5.2

Temos entón que $np = 120$ e $nq = 30$. Como $np > 5$ e $nq > 5$, X pode aproximarse por $\tilde{X} \rightarrow N(120; 4,9)$ de onde $Z = \frac{\tilde{X}-1}{4,9} \rightarrow N(0,1)$.

Aplicando a corrección de Yates ou de medio punto,

$$P(115 \leq X \leq 125) \approx P(114,5 \leq \tilde{X} \leq 125,5) \approx P(-1,12 \leq Z \leq 1,12) \approx 0,7372.$$

5.3

Temos os sucesos

A = “Empregar avións tipo 2”,

B = “Empregar avións tipo 1”, e

C = “Empregar avións tipo 1 e tipo 2”

Se ocorren conxuntamente os sucesos A e B , temos que ocorre o suceso C , entón o suceso C coincide co suceso intersección de A e B , é dicir, $C = A \cap B$.

No caso de que A e B sexan incompatibles teríamos que $C = A \cap B = \emptyset$, e entón $P(C) = 0$.

No caso de que A e B sexan independentes teríamos que $P(C) = P(A) \times P(B)$.

5.4

Se os sucesos A e B son incompatibles entón non poderían empregarse os dous tipos de avións conxuntamente para apagar un lume.

Se os sucesos A e B son independentes quere dicir que saber que se emprega un avión dun dos dous tipos para apagar un lume, non aporta ningunha información para coñecer se nese mesmo lume emprégase un avión doutro tipo.

ESTADÍSTICA E PROBABILIDADE**Exemplo 6.****CONTEXTO**

Nunha facultade dun campus galego, os estudantes para entrar nunha clase da materia Estatística Aplicada deben subir ata o segundo piso. Para subir poden empregar o ascensor ou unha escaleira, aínda que algúns deles, o 5%, deciden ir á cafetería. A clase de Estatística Aplicada é de 11:00 a 12:00, e ás 12:00 moitos deles (o 99% dos matriculados) teñen clase de Física.

A porcentaxe de estudantes que teñen pensado subir polo ascensor para ir a clase é o 50%, mentres que a porcentaxe que dos que empregan as escaleiras é o restante 45%. Sen embargo, algúns estudantes cando van cara o ascensor cambian de idea e deciden ir á cafetería, isto ocorre cunha probabilidade igual a 0,05. Dos que van cara a escaleira, o 15% cambian de idea e deciden non ir a clase para ir á cafetería. Aínda que son menos, o 1% dos estudantes que se dirixían á cafetería deciden finalmente ir a clase, para o que collen unhas escaleiras exteriores polas que tamén poden chegar ao segundo piso.

Responda estes catro apartados: 6.1., 6.2., 6.3 e 6.4

- 6.1.** Calcule a probabilidade de que un estudante entre en clase da materia Estatística Aplicada.
- 6.2.** Calcule a probabilidade de que un estudante dos matriculados na materia Estatística Aplicada atópese na cafetería na hora de clase.
- 6.3.** Calcule a probabilidade de que un estudante que entre na clase decidira inicialmente ir á cafetería.
- 6.4.** Razoe o motivo polo que non poden ser incompatibles os sucesos “ter clase de Física ás 12:00” e “ir á cafetería na hora da clase de Estatística Aplicada”?

Solucións Problemas Competenciais. Problema 6

6.1.

Consideremos os seguintes sucesos para os estudantes matriculados na materia Estatística Aplicada antes da hora de clase:

A ="Un estudante sube as escaleiras",

B ="Un estudante colle o ascensor", e

C ="Un estudante vai cara a cafetería".

Sábese que $P(A) = 0,45$, $P(B) = 0,5$ e $P(C) = 0,05$.

Pídese calcular a probabilidade do seguinte suceso E ="Un estudante asiste finalmente á clase". Como temos unha partición disxunta (ou un sistema completo de sucesos con intersección dous a dous baleira) podemos empregar o Teorema da probabilidade total.

$$P(E) = P(E/A)P(A) + P(E/B)P(B) + P(E/C)P(C).$$

Segundo os datos do exercicio, $P(E/A) = 0,85$, $P(E/B) = 0,95$ e $P(E/C) = 0,01$, polo que:

$$P(E) = P(E/A)P(A) + P(E/B)P(B) + P(E/C)P(C) = 0,85 \times 0,45 + 0,95 \times 0,5 + 0,01 \times 0,05 = 0,858.$$

6.2.

Coma o suceso D ="Atoparse na cafetería na hora de clase" coincide co suceso $\bar{E}$ temos que $P(D) = 1 - P(E) = 0,142$.

6.3.

Pídese calcular a probabilidade do suceso, $P(C/E)$. Empregando a fórmula da probabilidade condicionada obtemos o seguinte:

$$P(C|E) = \frac{P(E \cap C)}{P(E)} = \frac{P(E/C)P(C)}{P(E)} = \frac{0,01 \times 0,05}{0,858} = 0,00058.$$

6.4.

Se consideramos o suceso F ="Ter clase de Física ás 12:00", para que F e D sexan incompatibles tería que ocorrer que $F \cap D = \emptyset$. De ser así, teríamos que

$$P(F \cup D) = P(F) + P(D) = 0,99 + 0,142 = 1,132.$$

Coma chegamos a unha contradición, xa que unha probabilidade non pode ser maior que 1, teríamos que $F \cap D \neq \emptyset$, polo que os sucesos non son incompatibles.

ESTADÍSTICA E PROBABILIDADE**Exemplo 7.****CONTEXTO**

Segundo información de diversos estudos, mais de 2.000 millóns de persoas viven no mundo con escaseza de auga, situación que posiblemente empeorará nos vindeiros anos, por diversas causas como o incremento da poboación ou problemas derivados do cambio climático. Calculouse, a partir dunha mostra aleatoria, un intervalo de confianza para o consumo medio de auga por día e por persoa na poboación española cun nivel de confianza do 90%, dito intervalo foi igual a (133,142) litros por día. Nunha certa rexión da costa española tensionada polo turismo quérese comprobar se o aumento de poboación no verán repercute sobre o consumo por persoa e día, xa que se pensa que os turistas non están tan concienciados co aforro de auga como a poboación autóctona. Para iso no mes de Agosto escóllese unha mostra aleatoria de 200 persoas que resultan ter un consumo medio de 145 litros. Considere que o consumo de auga segue unha distribución normal con desviación típica igual a 20 litros.

Responda estes tres apartados: 7.1., 7.2. e 7.3

7.1. Calcule un intervalo de confianza ao 90% para o consumo medio desa rexión no verán. É acertada a suposición do enunciado sobre o consumo de auga dos turistas?

7.2. Deséxase afinar o dato do consumo estival, calculando un intervalo de lonxitude máis pequeno, que opcións temos para iso?

7.3. Se se decide considerar a mesma mostra, pero tomando un nivel de confianza do 92%, cal sería a amplitude do intervalo no que se atoparía o consumo medio de litros de auga por persoa e día no verán?

Solucións Problemas Competenciais. Problema 7

7.1.

Temos a variable: $X = \text{"Consumo de auga na poboación no verán"}$. $X \rightarrow N(\mu, 20)$

A expresión do intervalo de confianza con nivel de confianza $1-\alpha$ para a media dunha variable con distribución normal é $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

A partir desa expresión, como $\bar{x} = 145$, $n = 200$, $z_{\alpha/2} = z_{0,05} = 1,645$ e $\sigma = 20$ teríamos o seguinte intervalo de confianza

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(145 - 1,645 \times \frac{20}{\sqrt{200}}, 145 + 1,645 \times \frac{20}{\sqrt{200}}\right) = (142,67; 147,33).$$

O intervalo para a media do consumo da poboación española é (133; 142), polo que a suposición de que o consumo medio por persoa é maior en verán parece acertada, xa que o intervalo calculado ten extremos superiores a 142 litros.

7.2.

Tendo en conta a expresión do intervalo de confianza con nivel de confianza $1-\alpha$ para a media dunha variable con distribución normal $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$,

para ter un intervalo de lonxitude máis pequena, deberíamos diminuír o valor de $z_{\alpha/2}$, é dicir, considerar un menor nivel de confianza ou aumentar o tamaño da mostra n .

7.3.

A amplitude do intervalo de confianza é $2 \times z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Tomando un nivel de confianza do 92%, teríamos que $z_{\alpha/2} = z_{0,04} = 1,75$, polo que temos que dita amplitude é igual a

$$2 \times z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \times 1,75 \times \frac{20}{\sqrt{200}} = 4,95.$$

ESTADÍSTICA E PROBABILIDADE

Exemplo 8.

CONTEXTO

Unha persoa viaxa regularmente a Madrid utilizando tres tipos de medios de transporte distintos: tren, avión e coche particular. A probabilidade de que utilice cada un dos medios de transporte nunha viaxe depende unicamente do medio de transporte que utilizou na viaxe anterior. En matemáticas isto coñécese como cadea de Markov, que leva asociada unha matriz (denominada matriz de transición), cuxos elementos son probabilidades, de maneira que a suma de cada fila vale 1. A probabilidade de que o viaxeiro use cada medio de transporte vén dada pola seguinte matriz de transición onde o subíndice 0 indica o transporte da viaxe anterior e o subíndice 1 en transporte da viaxe actual.

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} T_1 & A_1 & C_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} T_0 \\ A_0 \\ C_0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

O 75% das veces que fai a viaxe en tren chega con atraso, se viaxa en avión atrasase unha de cada dez veces e se utiliza o seu coche particular chega con atraso na metade das ocasións. Esta persoa vai viaxar de novo e sabemos que a última vez desprazouse en avión.

A compañía ferroviaria propónse reformar a súa política de indemnizacións por atraso, xa que nalgúns ocasións provocan o colapso da súa páxina web. Decidiu devolver o importe do billete aos viaxeiros que sufrisen o 5% de maiores atrasos. A compañía, mediante técnicas estatísticas, concluíu que o seu tempo de atraso é unha variable aleatoria normal de media 20 minutos e desviación típica 8 minutos e así o publicou na súa páxina web.

Responda estes catro apartados: 8.1., 8.2., 8.3. e 8.4.

8.1. Cal é a probabilidade de que chegue a Madrid con atraso?

8.2. Se sabemos que chegou con atraso, Cal é a probabilidade de que utilizase o tren?

8.3. Tería o viaxeiro dereito á devolución do importe do seu billete se chegou a Madrid con 30 minutos de atraso? Xustifique a súa resposta.

8.4. O viaxeiro decidiu que deixará de usar o tren se ao calcular a probabilidade de que o atraso medio de 9 viaxes sexa superior a 15 minutos, dita probabilidade é superior a 0,9. Continuará viaxando en tren este usuario? Xustifique a súa resposta.

Solucións Problemas Competenciais. Problema 8

8.1.

Consideremos os seguintes sucesos:

T = "O viaxeiro viaxa en tren",

A = "O viaxeiro viaxa en avión",

C = "O viaxeiro viaxa en coche", e

R = "O viaxeiro chega a Madrid con retraso".

Pídese calcular a probabilidade do suceso R . Como temos unha partición (ou un sistema completo de sucesos) formada polos tres primeiros sucesos, podemos empregar o Teorema da probabilidade total.

$$\begin{aligned} P(R) &= P(R/T)P(T) + P(R/A)P(A) + P(R/C)P(C) = \\ &= 0,75 \times 0,25 + 0,1 \times 0,5 + 0,5 \times 0,25 = 0,36. \end{aligned}$$

8.2.

Pídese calcular a probabilidade do suceso, $P(T/R)$. Empregando a fórmula da probabilidade condicionada obtemos o seguinte:

$$P(T|R) = \frac{P(R \cap T)}{P(R)} = \frac{P(R/T)P(T)}{P(R)} = \frac{0,75 \times 0,25}{0,36} = 0,52.$$

8.3.

Definimos a variable: X = "Tempo de retraso respecto á hora de chegada". $X \rightarrow N(20; 8)$

Se consideramos A = "Tempo de retraso mínimo (en minutos) que da dereito á devolución do importe do billete", teríamos que:

$$P(X \geq A) = 0,05 \rightarrow P\left(\frac{X - 20}{8} \geq \frac{A - 20}{8}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{A - 20}{8}\right) = 0,05,$$

de onde obtemos que $\frac{A - 20}{8} = 1,645 \rightarrow A = 33,16$. Polo tanto, non terá dereito á devolución xa que $30 < 33,16$.

8.4.

$\bar{X}$ = "Tempo de retraso medio de 9 viaxes en tren". $\bar{X} \rightarrow N\left(20; \frac{8}{\sqrt{9}}\right) = N(20; 2,67)$.

$$P(\bar{X} \geq 15) = P\left(Z \geq \frac{15 - 20}{2,67}\right) = 1 - P(Z \leq -1,87) = P(Z \leq 1,87) = 0,97.$$

Como a probabilidade é 0,97, polo tanto superior a 0,9, o viaxeiro deixará de empregar o tren.

ESTADÍSTICA E PROBABILIDADE

Exemplo 9.

CONTEXTO

Unha consultaría técnica, líder en promover a paridade entre os seus enxeñeiros, afronta os seus plans de expansión tendo en conta o seu principio fundacional de que a porcentaxe de mulleres en todos os seus departamentos debe ser de polo menos o 40%.

Na actualidade o seu departamento de proxectos está integrado por 10 mulleres e 14 homes. Desexa contratar a un enxeñeiro ou enxeñeira dunha lista de candidatos na que hai 2 mulleres e 3 homes, que en diante denominaremos M_1 , M_2 , H_1 , H_2 e H_3 . Todos eles foron baremados con respecto aos méritos que presentan de forma que as probabilidades de que sexan contratados son as da seguinte táboa:

M_1	H_1	M_2	H_2	H_3
1/5	1/10	3/10	1/5	1/5

Definimos os seguintes sucesos:

C_1 = “A nova contratación é unha muller”.

C_2 = “A nova contratación é un home”.

Responda estes tres apartados: 9.1., 9.2. e 9.3.

9.1. Mantería a empresa o seu principio fundacional coa nova contratación?

9.2. Calcule a porcentaxe esperada de mulleres no departamento de proxectos unha vez feita a nova contratación.

9.3. O Goberno incentiva a contratación de mulleres enxeñeiras con rebaixas fiscais á empresa contratante se a porcentaxe de mulleres nos distintos departamentos da empresa é de polo menos o 45%. Sería posible acceder ás rebaixas fiscais se as probabilidades de contratación de cada un dos candidatos son as seguintes?:

M_1	H_1	M_2	H_2	H_3
x	y	x	y	y

Xustifique a súa resposta.

Solucións Problemas Competenciais. Problema 9

9.1.

Se contratan a unha muller manterían o principio fundacional xa que $\frac{11}{25} = 0,44$ (44%).

Se contratan a un home tamén manterían o principio fundacional xa que $\frac{10}{25} = 0,40$ (40%).
Polo que coa nova contratación a empresa mantería o principio fundacional.

9.2.

Considerando:

C_1 ="A nova contratación é un home", e

C_2 ="A nova contratación é unha muller".

Tendo en conta os datos da táboa sabemos que $P(C_1) = P(C_2) = 0,5$. Como temos unha partición (ou un sistema completo de sucesos) formada polos dous sucesos anteriores, a porcentaxe esperada de mulleres pódese calcular empregando o Teorema da probabilidade total.

$$P(M) = P(M/C_1)P(C_1) + P(M/C_2)P(C_2) = \frac{11}{25} \times \frac{1}{2} + \frac{10}{25} \times \frac{1}{2} = 0,42,$$

polo que a porcentaxe esperada de mulleres é do 42%.

9.3.

É imposible poder acceder ás vantaxes fiscais. Aínda que se contrate a unha muller, a proporción sería do 44%, inferior ao 45% requirido.

ESTADÍSTICA E PROBABILIDADE**Exemplo 10.****CONTEXTO**

As últimas rebaixas dos tipos de interese no segundo semestre de 2024 están a provocar que as familias se estean aforrando uns 200 euros ao mes do que viñan pagando ata o de agora nas facturas das súas hipotecas e préstamos. Un aforro que pode supoñer deixar de pagar máis de 2.000 euros ao ano. Con esta situación, as entidades bancarias están a ofrecer condicións moito máis atractivas aos clientes para captalos, xerando unha batalla entre entidades. Nunha delas vanse a presentar novos produtos para ofertar aos seus clientes: Préstamo 24 horas, Préstamo Auto e Préstamo Estuda.

Por política de empresa preténdese conceder un 45% de Préstamos 24 horas, 40% de Préstamos Auto e un 15% de Préstamos Estuda. Ademais, realízase un estudo sobre a falta de pagamentos nestes tres tipos de préstamos resultando sen pagar o 20% dos Préstamos 24 horas, o 30% dos Préstamos Auto e o 25% dos Préstamos Estuda:

Responda estes catro apartados: 10.1., 10.2., 10.3. e 10.4

10.1. Seleccionado un préstamo ao azar calcule a probabilidade de que non se pague.

10.2. Sabendo que non se pagou un préstamo, calcular a probabilidade de que sexa un Préstamo Auto.

10.3. Se se pagou o préstamo, calcular a probabilidade de que sexa un Préstamo Estuda.

10.4. Segundo os datos proporcionados polo enunciado, indica dous sucesos relacionados co enunciado que son incompatibles. Xustifica a resposta.

Solucións Problemas Competenciais. Problema 10

10.1.

Consideremos os seguintes sucesos:

H =" Concesión dun préstamo 24 horas",

A =" Concesión dun préstamo Auto",

E =" Concesión dun préstamo Estuda", e

F =" Falta de pagamento dun préstamo".

Pídese calcular a probabilidade do suceso F . Como temos unha partición (ou un sistema completo de sucesos) formada polos tres primeiros sucesos, podemos empregar o Teorema da probabilidade total.

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F/H)P(H) + P(F/A)P(A) + P(F/E)P(E) = \\ &= 0,2 \times 0,45 + 0,3 \times 0,4 + 0,25 \times 0,15 = 0,2475. \end{aligned}$$

10.2.

Pídese calcular a probabilidade do suceso, $P(A/F)$. Empregando a fórmula da probabilidade condicionada obtemos o seguinte:

$$P(A|F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F/A)P(A)}{P(F)} = \frac{0,3 \times 0,4}{0,2475} = 0,485.$$

10.3.

Pídese calcular a probabilidade do suceso, $P(E/\bar{F})$. Empregando a fórmula da probabilidade condicionada obtemos o seguinte:

$$P(E|\bar{F}) = \frac{P(E \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{P(\bar{F}/E)P(E)}{P(\bar{F})} = \frac{(1 - 0,25) \times 0,15}{1 - 0,2475} = 0,1495.$$

10.4.

Tendo en conta dos datos do enunciado, enténdese que só se pode conceder un tipo de préstamo. Entón, por exemplo, serían incompatibles os sucesos H e A .

ESTADÍSTICA E PROBABILIDADE**Exemplo 11.****CONTEXTO**

Os fogares con animais domésticos aumentaron considerablemente nos últimos 5 anos, sendo aproximadamente o 49% do total no ano 2024. Unha compañía de seguros líder no mercado quere poñerse ao día na normativa para que os cidadáns que teñan unha mascota contraten un seguro, para cubrir posibles incidencias, sobre todo en caso de cans potencialmente perigosos. Para iso fai unha campaña de publicidade onde se contrasta a posibilidade de que o cliente teña contratado tamén o seguro de fogar. Despois dun tempo, a compañía de seguros afirma que o 60% da poboación do estudo ten contratado un seguro de fogar, o 30% ten contratado un seguro de mascota e un seguro de fogar. Ademais, 3 de cada 5 persoas con seguro de mascota, ten contratado un seguro de fogar.

Responda estes cinco apartados: 11.1., 11.2., 11.3, 11.4 e 11.5.

- 11.1.** Calcule a probabilidade de que a poboación teña un seguro de mascota.
- 11.2.** Calcule a porcentaxe da poboación que teña algún destes dous seguros.
- 11.3.** Elixida unha persoa ao azar, calcule a probabilidade de ter seguro de mascota e non ter seguro de fogar.
- 11.4.** Son independentes os sucesos “ter seguro de mascota” e “ter seguro de fogar”?
- 11.5.** Considérense os sucesos “ter seguro de mascota” e “ter mascota”, sen facer operacións, razoe se estes sucesos poden considerarse independentes”.

Solucións Problemas Competenciais. Problema 11

11.1.

Consideremos os seguintes sucesos:

M =" Ter contratado un seguro de mascotas", e

F =" Ter contratado un seguro de fogar".

Os datos que proporciona o enunciado do exercicio son: $P(F) = 0,6$, $P(F \cap M) = 0,3$ e $P(F|M) = 0,6$.

Temos que calcular $P(M)$. Empregando a fórmula da probabilidade condicionada

$$P(F|M) = \frac{P(F \cap M)}{P(M)}$$

Polo que

$$P(M) = \frac{P(F \cap M)}{P(F|M)} = \frac{0,3}{0,6} = 0,5.$$

11.2.

Débese calcular a probabilidade do suceso, $P(F \cup M)$. Empregando a fórmula da probabilidade da unión de dous sucesos, temos que:

$$P(F \cup M) = P(F) + P(M) - P(F \cap M) = 0,6 + 0,5 - 0,3 = 0,8.$$

11.3.

Pídese calcular a probabilidade do suceso, $P(M \cap \bar{F})$. A partir dos datos calculados:

$$P(M \cap \bar{F}) = P(M) - P(M \cap F) = 0,5 - 0,3 = 0,2.$$

11.4.

Como $P(F|M) = P(F) = 0,6$ os sucesos son independentes. Outra forma de demostrar que son independentes é vendo que $P(F \cap M) = 0,3 = P(F) \times P(M) = 0,6 \times 0,5$.

11.5.

Os sucesos "Ter mascota" e "Ter seguro de mascota" non poden considerarse independentes, xa que se ocorre o suceso "Ter mascota" aporta información para que ocorra o suceso "Ter seguro de mascota".