

CAPÍTULO 8: DERIVADAS

1. CONCEPTO DE DERIVADA

1.1. Concepto de derivada de una función en un punto

Del curso pasado ya conoces la definición de derivada. Vamos a recordarla.

Recuerda que:

La derivada de una función en un punto responde al estudio de dos problemas aparentemente distintos: El primero es el estudio del ritmo de variación de la función en dicho punto. El segundo es de índole geométrica: la derivada de una función en un punto indica el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto.

El estudio de la tasa de variación media nos resultaba insuficiente para resolver determinados problemas.

Por ejemplo: Si un avión (o un coche) sufre un accidente, y los expertos quieren determinar las causas, no les interesa la velocidad media del avión, (o del coche) sino la velocidad instantánea en el momento del accidente.

Otro ejemplo más: Los bomberos utilizan lonas para recoger a las personas que deben saltar de un incendio. Para fabricar la lona y que resista deben conocer la velocidad en el momento del impacto, no la velocidad media de caída.

Definición:

Si X es un intervalo abierto, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $a \in X$, se dice que f es derivable en a si existe el límite:

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ y es un número real (es decir, no es infinito).

El valor del límite lo denominamos derivada de f en $x = a$, y lo representamos por $f'(a)$, $Df(a)$ o por $\frac{df}{dx}(a)$.

$$f'(a) = DF(a) = \frac{df}{dx}(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Actividades resueltas

 Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = \cos\sqrt{x}$ en $x = 0$.

Observa que la función no está definida para valores negativos de la variable. Si $x > 0$ $f'(x) = \frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, expresión que no está definida para $x = 0$. Para estudiar la derivabilidad de la función en $x = 0$, utilizamos la definición de derivada:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos\sqrt{h} - 1}{h} = \frac{-1}{2}.$$

Luego la función es derivable en $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Derivación y continuidad

Si f es derivable en un punto entonces la función es continua en dicho punto.

Demostración

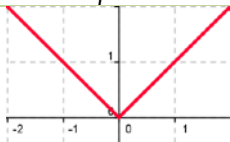
Recuerda que una función es continua en $x = a$, si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Entonces $f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a)$.

Suponemos que la función es derivable en a , es decir que existe $f'(a)$ y es un valor finito. Tomamos límites.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0. \text{ Por tanto } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Actividades resueltas

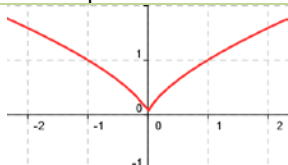
 Las funciones cuyas gráficas aparecen a continuación son continuas en todos los puntos, y derivables en todos los puntos excepto en $x = 0$. Observa el comportamiento de la gráfica en dicho punto.



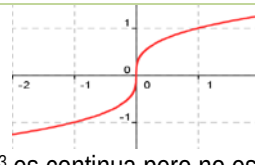
Los límites laterales existen, pero no coinciden, valen -1 y 1 respectivamente.



Los límites laterales existen, pero no coinciden, valen 0 y 1 respectivamente.



La función $y = x^{2/3}$ es continua pero no es derivable en $x = 0$.



La función $y = x^{1/3}$ es continua pero no es derivable en $x = 0$.

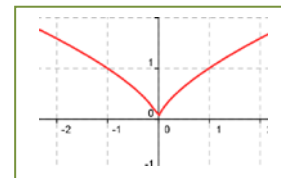
✚ Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = x^{2/3}$ en $x = 0$

La función es continua en todo $\mathbb{R}$ ya que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x^{2/3} = a^{2/3}$ y $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{2/3} = 0$.

Para estudiar la derivabilidad de la función en $x = 0$, utilizamos la definición de derivada:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{2/3} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1/3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{1/3}} = \infty.$$

El límite tiende a infinito. No es derivable en $x = 0$. Observa en la gráfica como la recta tangente en el origen es una recta vertical. La función es derivable en $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$.

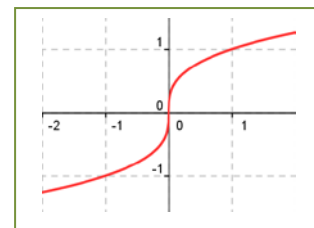


✚ Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = x^{1/3}$ en $x = 0$.

La función es continua en todo $\mathbb{R}$. Para estudiar la derivabilidad de la función en $x = 0$, utilizamos la definición de derivada:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{1/3} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-2/3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty.$$

El límite no existe. Tiende a infinito. No es derivable en $x = 0$. Observa en la gráfica como la recta tangente en el origen es una recta vertical. La función es derivable en $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$.



✚ Dada la función $f(x) = \begin{cases} a + \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, se pide:

a) Calcula el valor de a , para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Estudia la derivabilidad de f y calcular $f'(x)$ donde sea posible.

Selectividad.

a) Es una función definida a trozos por dos funciones continuas. Estudiamos la continuidad en $x = 0$.

$a + \ln(1-x)$ en $x = 0$ es igual a a . $a = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{-x} = 0$ en $x = 0$.

Por tanto, si $a = 0$ la función $f(x) = \begin{cases} \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Estudio de la derivabilidad: $f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ 2xe^{-x} + x^2 e^{-x}(-1) & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{-1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ (2x - x^2)e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

En $x = 0$, la rama de la izquierda tiende a -1 y la de la derecha a 0 , luego la función no es derivable.

Actividades propuestas

1. Haciendo uso de la definición de derivada comprueba que la derivada de $f(x) = \sec \frac{1}{x}$ en $x = a$ es igual a

$$f'(x) = \left(\frac{-1}{a^2} \right) \cos \frac{1}{a} \text{ si } a \text{ es distinto de } 0.$$

2. Utilizando la definición de derivada comprueba que las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados es el valor dado:

$$f(x) = x^3 \text{ en } x = 2 \Rightarrow f'(2) = 12.$$

$$g(x) = x + 2 \text{ en } x = a \Rightarrow g'(a) = 1.$$

$$h(x) = x^2 \cos x \text{ en } x = 0 \Rightarrow h'(0) = 0.$$

$$r(x) = \frac{3x+4}{2x-1} \text{ en } x = 1 \Rightarrow r'(1) = -11.$$

3. Estudia la derivabilidad en $x = 0$ de $f(x) = |x^3|$

Selectividad

1.2. Interpretación geométrica de la derivada. Recta tangente

Recuerda que:

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es igual a $f'(a)$. Por tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

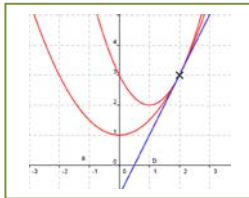
Ejemplo:

✚ Para encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 2x^3 + x$ en $x = 1$ buscamos la recta de pendiente $f'(1)$ que pase por el punto $(1, f(1))$: $f(1) = 2 \cdot 1^3 + 1 = 3$; $f'(x) = 6x^2 + 1$; $f'(1) = 6 \cdot 1^2 + 1 = 7$; Ecuación de una recta de pendiente 7 que pasa por el punto $(1, 3)$: $y = 3 + 7(x - 1) = 7x - 4$.

Actividades resueltas

✚ Se consideran las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = ax^2 + b$

a) Calcula a y b para que las gráficas de f y g sean tangentes en el punto de abscisa $x = 2$.



b) Para los valores de a y b calculados en el apartado anterior, dibuja las gráficas de ambas funciones y halla la ecuación de la recta tangente común.

Selectividad

a) Calculamos las derivadas en $x = 2 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2, g'(x) = 2ax \Rightarrow$

$$f'(2) = 2, g'(2) = 4a \Rightarrow 2 = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Para } x = 2 \Rightarrow f(2) = 3 = g(2) = \left(\frac{1}{2}\right)4 + b = 2 + b \Rightarrow b = 1.$$

b) Recta tangente en $(2, 3)$ de pendiente 2: $y = 3 + 2(x - 2) = 2x - 1.$

Las funciones son parábolas de vértices $(1, 2)$ y $(0, 1)$ respectivamente, que pasan por el punto $(2, 3)$.

Actividades propuestas

4. Dada la función $f(x) = \ln \frac{x^2}{x-1}$, donde $\ln$ significa logaritmo neperiano, definida para $x > 1$ halla un punto $(a, f(a))$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en ese punto sea paralela al eje OX .

Selectividad.

5. Dada la función $f(x) = 6x^2 - x^3$. Halla un valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ sea paralela a la recta $y = -15x$.

Selectividad.

6. Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde $m > 0$ es una constante. a) Para cada valor de m halla el valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas. b) Halla el valor de m para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$.

Selectividad.

Interpretación física de la derivada

Recuerda que:

La **velocidad** es la derivada del espacio respecto al tiempo, (en el caso en que la función indique, dado el tiempo, el espacio recorrido).

La **aceleración** es la derivada de la velocidad respecto del tiempo.

$$v = \frac{de}{dt}; \quad a = \frac{dv}{dt}$$

Ejemplo:

El espacio recorrido por un vehículo viene dado por $e = 1.3t + 0.07t^2$, donde e se mide en metros y t en segundos. Determina la velocidad para $t = 1$ segundos. Determina la función velocidad y la función aceleración.

Calculamos la derivada: $e' = 1.3 + 0.14t$. Para $t = 1$, $e'(1) = 1.44$ m/s $= v(1)$. La función velocidad es la derivada $v = e' = 1.3 + 0.14t$. Derivamos para obtener la aceleración: $a = v' = 0.14$ m/s².

Actividades propuestas

7. Un coche recorre una distancia e , en kilómetros, a las t horas, siendo $e = 22t + 0.4t^2$. Determina su función velocidad y su función aceleración. ¿Es constante la aceleración? Si sigue a esa velocidad, ¿en qué instante sobrepasa la velocidad máxima permitida de 120 km/h?

8. Al lanzar un objeto verticalmente hacia arriba la altura (en metros) y , que alcanza a los x segundos es: $y = 30x - 4x^2$. Calcula la velocidad a los $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$ y $x = 4$ segundos. Determina también la altura de la piedra a esos segundos. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el objeto?

9. Un coche recorre una distancia y , en kilómetros, en un tiempo x dado en horas, dada por la ecuación: $y = 0.1x^2 + 100x - 50$. Determina la velocidad que lleva el coche para $x = 1.5$ horas.

1.3. Función derivada. Propiedades

Recuerda que:

Si f es derivable en $X \subset \mathbb{R}$ se llama función derivada de f a la función que asocia a cada número real de X el valor de la derivada de f en dicho punto. A esta nueva función la designamos por f' , Df o $\frac{df}{dx}$.

Por ejemplo,

En el caso: $f(x) = x^3$ entonces $f'(a) = 3 \cdot a^2$. Por lo tanto, si $f(x) = x^3$ entonces $f'(x) = 3 \cdot x^2$. Pero a la función derivada podemos volverla a derivar, y obtener así la derivada segunda: $f''(x) = 6 \cdot x$. Y volver a derivar, obteniendo la derivada tercera: $f'''(x) = 6$. Y la cuarta: $f^{(4)}(x) = 0$. ¿Cuánto vale la derivada 28 de esa función? ¿Sabes hacerla? ¡Claro que sabes! A partir de la derivada tercera todas las derivadas valen cero.

Las derivadas sucesivas se pueden nombrar: $f', f'', f''', f^{(4)}, \dots, f^{(n)}$, o también $Df, D^2f, D^3f, \dots, D^n f$.

Actividad resuelta

Calcula la derivada n -ésima de $f(x) = \ln(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f'''(x) = \frac{(-1)(-2)}{x^3} \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

Actividades propuestas

10. Comprueba que la derivada n -ésima de las siguientes funciones es la indicada:

$f(x) = \frac{1}{x+a} \Rightarrow f^n(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$	$f(x) = \frac{3x+2}{x^2-4} = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-2} \Rightarrow f^n(x) = (-1)^n n! \left(\frac{1}{(x+2)^{n+1}} + \frac{1}{(x-2)^{n+1}} \right)$
$f(x) = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow f^n(x) = \frac{2 \cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$	$f(x) = \cos ax \Rightarrow f^n(x) = a^n \cos(ax + n\frac{\pi}{2})$
$f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f^n(x) = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{(1+x)^n}$	$f(x) = \cos^2 x \Rightarrow f^n(x) = 2^{n-1} \cos(2x + n\frac{\pi}{2})$

Notación diferencial

La tasa de variación media de una función $y = f(x)$ en el intervalo $(a, a+h)$ es: $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ siendo el numerador el

incremento de la función y el denominador el incremento de la variable. *Gottfried Wilhelm Leibniz* utilizó la notación: $\frac{dy}{dx}$ para

denotar la derivada de la función y respecto de la variable x , donde dy y dx no son numerador y denominador, sino un todo inseparable. Se lee, derivada de y respecto de x .

Esta notación es útil, sobre todo, si hay distintas variables.

Ejemplo:

- Si $S = 4\pi r^2$ entonces $\frac{dS}{dr} = 8\pi r$.
- Si $V = \pi r^2 h$ entonces $\frac{dV}{dr} = 2\pi r \cdot h$ y $\frac{dV}{dh} = \pi r^2$.

La función derivada es lineal

Recuerda que:

La derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas de cada una. Es decir:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

La derivada de una función multiplicada por una constante es igual a la constante por la derivada de la función:

$$\text{Si } f(x) = c \cdot g(x) \text{ entonces } f'(x) = c \cdot g'(x).$$

Estas dos propiedades, que ya conoces del curso pasado, nos indican que el operador derivada, D , es lineal y permiten escribir:

$$D(f+g) = Df + Dg$$

$$D(cf) = cDf$$

Operaciones con derivadas

Recuerda que:

Pero también conoces el comportamiento de la derivada con otras operaciones, el producto, cociente, composición....

La derivada del producto de dos funciones es igual al producto de la derivada de la primera función por la segunda función sin derivar más el producto de la primera función sin derivar por la derivada de la segunda función:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

La derivada del cociente de dos funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, divididos por el cuadrado del denominador:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

La regla de la cadena expresa la derivada de la composición de funciones $(f \circ g)(x)$ en términos de las derivadas de f y g :

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

o escrito en notación de Leibniz: $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

Actividades resueltas

✚ Calcula la derivada de $y = (x^7 + 2)^5$.

Para aplicar bien la regla de la cadena es muy importante que comprendas bien la composición de funciones. En la derivada propuesta tenemos la función potencial "elevar a 5", cuya derivada conoces bien $5x^4$, y la función $x^7 + 2$ cuya derivada es $7x^6$. Aplicamos la regla de la cadena, primero la derivada de la función potencial en el punto $x^7 + 2$, y luego multiplicamos por la derivada de esta función: $y' = 5(x^7 + 2)^4 \cdot 7x^6$.

✚ **Calcula las derivadas de las funciones siguientes y comprueba el resultado:**

a) $y = \sin^2(x) \Rightarrow y' = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$	b) $y = \sin(x^2) \Rightarrow y' = \cos(x^2) \cdot 2x$
c) $f(x) = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{(2-x)\sqrt{4-x^2}}$	d) $f(x) = \frac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1+4x^2}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$
e) $f(x) = (3+x)\sqrt{3-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{3(1-x)}{2\sqrt{3-x}}$	f) $f(x) = \sqrt{x^2+9} \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

Actividades propuestas

11. Si f y g son dos funciones derivables en todo punto, y se sabe que $f(1) = 2$, $f(2) = 5$, $g(1) = 1$, $g(2) = 6$, $f'(1) = 3$, $f'(2) = 6$, $f'(6) = 4$, $g'(1) = 1$, $g'(2) = 3$, $g'(5) = 1$. Determina el valor de: a) $(f \circ g)'(2)$; b) $(g \circ f)'(1)$; c) $(g \circ f)'(2)$; d) $(f \circ f)'(1)$.

12. Sean $u(x)$ y $v(x)$ dos funciones derivables en un punto x . Pruébese que su producto $u(x) \cdot v(x)$ es derivable obteniendo la expresión de su derivada: $D[u(x) \cdot v(x)] = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$. Selectividad

2. CÁLCULO DE DERIVADAS

Recuerda que:

Del curso pasado ya conoces las reglas de derivación de funciones. Vamos a repasar algunas de ellas. Si ya sabes derivar con soltura, puedes saltarte este apartado, pero si no es tu caso, es importante que lo revises.

Derivada de la función potencial: La derivada de la función $f(x) = x^k$, para cualquier valor numérico de k , es $f'(x) = k \cdot x^{k-1}$.

Derivada de la función logaritmo: Si $f(x) = \log_a(x)$ entonces $f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$.

Derivada de la función exponencial: Si $y = a^x$ entonces $y' = a^x \cdot \ln(a)$.

Derivada de la función seno: Si $f(x) = \sin(x)$ entonces $f'(x) = \cos(x)$.

Derivada de la función coseno: Si $f(x) = \cos(x)$ entonces $f'(x) = -\sin(x)$.

Actividades resueltas

✚ **Observa cómo se han obtenido las derivadas siguientes:**

Función	$f(x) = x^6$	$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$	$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$	$f(x) = 1/x = x^{-1}$	$f(x) = 1/x^2 = x^{-2}$
Derivada	$f'(x) = 6x^5$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x) = (1/n)x^{(1/n)-1} = (1/n)x^{-(n-1)/n} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$f'(x) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$	$f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

✚ **Calcula las siguientes derivadas y comprueba el resultado:**

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$	b) $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 4}{9} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{9}$
c) $f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	d) $f(x) = \ln(x^5 - 7x^8) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^5 - 7x^8} \cdot (5x^4 - 56x^7)$
e) $f(x) = \sqrt{4x} + \sqrt[3]{x} + \frac{5}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{5}{x^2}$	f) $f(x) = \frac{(x+1)^3}{\sqrt{x^3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3(x+1)^2(x-1)}{2x^2\sqrt{x}}$
g) $f(x) = (2x-1)(x^2-6x+3) \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 26x + 12$	h) $f(x) = \frac{(x+4)^2}{x+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}$

✚ **Calcula las siguientes derivadas y comprueba los resultados:**

a) $f(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+\cos(x)}$	b) $f(x) = \cos(\sin^2 5x) \Rightarrow f'(x) = -10\sin 5x \cdot \cos 5x \cdot \sin(\sin^2 5x)$
c) $f(x) = \tan(5x-7) \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{\cos^2(5x-7)}$	d) $f(x) = \cos(\sin 5x) \Rightarrow f'(x) = -5\cos 5x \cdot \sin(\sin 5x)$
e) $f(x) = 2\sqrt{\cos 3x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{6\sin 3x}{\sqrt{\cos 3x}}$	f) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos(x)}$
g) $f(x) = \ln(\sin^2(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{\tan(x)}$	h) $f(x) = \sin(\cos(x)) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x) \cdot \cos(\cos(x))$

i) $f(x) = \ln(\sin(x)) \Rightarrow f'(x) = \cotg(x)$

j) $f(x) = \ln(\cos(x)) \Rightarrow f'(x) = -\tg(x)$

Técnica de la derivación logarítmica

Aunque suponemos que ya la conoces vamos a repasar esta técnica que, en ocasiones, facilita los cálculos. Consiste en aplicar logaritmos a los dos miembros de la función, y a continuación, derivar.

Actividades resueltas

✚ Utilizando derivación logarítmica halla la derivada de $f(x) = e^{(x^5 - 7x^3)}$

1) Aplicamos logaritmos neperianos: $\ln(f(x)) = \ln(e^{(x^5 - 7x^3)})$

2) Utilizamos propiedades de los logaritmos para simplificar el segundo miembro (en este ejemplo, el logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base):

$$\ln(f(x)) = \ln(e^{(x^5 - 7x^3)}) = (x^5 - 7x^3) \cdot \ln(e) = (x^5 - 7x^3)$$

3) Derivamos los dos miembros de la igualdad: $\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = 5x^4 - 21x^2$

4) Despejamos $f'(x)$: $f'(x) = f(x) \cdot (5x^4 - 21x^2) = e^{(x^5 - 7x^3)} \cdot (5x^4 - 21x^2)$.

Derivando la función exponencial llegamos al mismo resultado. Compruébalo.

✚ Calcula las siguientes derivadas utilizando la técnica de derivación logarítmica y comprueba los resultados:

a) $f(x) = g(x)^{h(x)} \Rightarrow f'(x) = g(x)^{h(x)} (h'(x) \ln(g(x)) + \frac{h(x)g'(x)}{g(x)})$	b) $f(x) = x^x \Rightarrow f'(x) = x^x (\ln(x) + 1)$
c) $f(x) = x^{\sin(x)} \Rightarrow f'(x) = x^{\sin(x)} (\cos(x) \cdot \ln(x) + \frac{\sin(x)}{x})$	d) $f(x) = \sqrt{x}^{\tg(x)} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{x}^{\tg(x)} \left(\frac{\sin(x)\cos(x) - \ln(x)}{x \cos^2(x) \sin^2(x)} \right)$

Derivada de la función inversa**Recuerda que:**

La función inversa de la función $y = f(x)$ se define como:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

Por este motivo, recuerda que la gráfica de una función y su inversa son simétricas respecto de la diagonal del primer cuadrante.

Si conocemos la derivada de una función podemos calcular la derivada de su función inversa, pues:

Si f es una función derivable y biyectiva en X con $0 \notin f'(X)$ entonces f^{-1} es derivable en $f(X)$ y $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$

Demostración:

Para comprobar que f^{-1} es derivable y calcular su derivada debemos calcular el límite: $(f^{-1})'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$

Pero $x = f^{-1}(y)$ y sea $a = f^{-1}(b)$. Además, por definición de función inversa: $y = f(x)$ y $b = f(a)$. Por ser continua, cuando $y \rightarrow b$, entonces $x \rightarrow a$, por lo que el límite anterior es equivalente a:

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)}$$

Por tanto $(f^{-1})'(b) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{1}{f'(a)}$.

Por tanto, existe el límite y su valor es: $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}$, c.q.d.

Derivada de las funciones inversas de las funciones trigonométricas

La función arco seno es la función inversa de la función seno y se define por tanto como:

$$y = \arcsen(x) \Leftrightarrow x = \sen(y)$$

Si la definimos en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ es biyectiva. ¡Compruébalo!

Entonces su derivada es:

$$y = \arcsen(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Demostración:

Aplicamos la derivada de la función inversa: $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}(x) = \frac{1}{\cos(\arcsen(x))}$

Sabemos que $\sen^2(x) + \cos^2(x) = 1$, por tanto: $\cos(x) = \sqrt{1 - \sen^2(x)}$

$$\frac{1}{\cos(\arcsen(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sen^2(\arcsen(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ c.q.d.}$$

De forma similar se demuestran las derivadas de la función arco coseno y arco tangente.

Recuerda que:

$f(x) = \arcsen(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsen(f(x)) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$	$y = \arcsen(e^x) \Rightarrow y' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$
$f(x) = \arccos(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos(f(x)) \Rightarrow y' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$	$y = \arccos(x^2) \Rightarrow y' = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$
$f(x) = \arctg(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \arctg(f(x)) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$	$y = \arctg(x^3) \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{1+x^6}$

Actividades resueltas

 **Calcula las siguientes derivadas y comprueba los resultados:**

a) $f(x) = e^{\ln(\arctg \sqrt{x})} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$	b) $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$
c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsen \frac{3\cos x + 2}{3 + 2\cos x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{3 + 2\cos x}$	d) $f(x) = \arctg \frac{3\sen x}{4 + 5\cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{5 + 4\cos x}$

Derivada de las funciones inversas de las funciones hiperbólicas

La función argumento seno hiperbólico es la función inversa de la función seno hiperbólico y se define por tanto como:

$$y = \argsh(x) \Leftrightarrow x = sh(y)$$

Entonces su derivada es:

$$y = \argsh(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Utilizaremos esta derivada cuando estudiemos las integrales, pues nos permitirá obtener algunas.

Demostración:

Aplicamos la derivada de la función inversa: $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}(x) = \frac{1}{ch(\arg sh(x))}$

Sabemos que $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$, por tanto: $ch(x) = \sqrt{1 + sh^2(x)}$

$$\frac{1}{ch(\arg sh(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 + sh^2(\arg sh(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \text{ c.q.d.}$$

De forma similar se demuestran las derivadas de la función argumento coseno y argumento tangente.

Recuerda que:

$f(x) = \argsh(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$y = \argsh(f(x)) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f(x)^2}}$	$y = \argsh(e^x) \Rightarrow y' = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$
$f(x) = \argch(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$y = \argch(f(x)) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)^2-1}}$	$y = \argch(x^2) \Rightarrow y' = \frac{2x}{\sqrt{x^4-1}}$
$f(x) = \argth(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$	$y = \argth(f(x)) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{1-f(x)^2}$	$y = \argth(x^3) \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{1-x^6}$

Actividades propuestas

13. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt[6]{5x^{11}};$

b) $y = \frac{\sqrt[4]{3x^2} \cdot \sqrt{x}}{3x^3 + 7};$

c) $y = \frac{(3x^4 - 4) \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[3]{7x^5}};$

d) $y = \frac{\sqrt[3]{x^7}}{2x + 5}.$

14. Calcula las derivadas de las siguientes funciones: a) $y = \sqrt{\frac{2x^3 - 7x^9}{4x^5 + 6}} (3x^7 - 5x^5)^3$

b) $y = \sqrt{\frac{(x^3 + 5x)(4x^3 - 6x)}{2x^4 - 5x}}$ c) $y = \sqrt{\left(\frac{3x^4 + 5x^2}{4x^2 - 6x^5}\right)^4}$ d) $y = \sqrt[3]{5 + \sqrt{5x - \frac{5}{x^5}}}$

15. Calcula las derivadas de las siguientes funciones: a) $f(x) = tg \frac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}}$

b) $f(x) = (2-3x)sh(2-3x)$ c) $f(x) = tg \frac{\sqrt{4-9senx}}{3+2cosx}$ d) $f(x) = \frac{senx - x cos x}{cos x + x senx}$

16. Ya sabes que la función tangente se define como el cociente entre el seno y el coseno, las funciones hiperbólicas se definen utilizando la función exponencial. Comprueba las derivadas de la tabla siguiente de $tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$,

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad y \text{ de } th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}.$$

$f(x) = tg(x) \Rightarrow f'(x) = 1 + tg^2(x)$	$y = tg(f(x)) \Rightarrow y' = (1 + tg^2(f(x))) \cdot f'(x)$	$y = tg(x^3) \Rightarrow y' = (1 + tg^2(x^3)) \cdot (3x^2)$
$f(x) = sh(x) \Rightarrow f'(x) = ch(x)$	$y = sh(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot ch(f(x))$	$y = sh(\sqrt{x}) \Rightarrow y' = \frac{ch\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = ch(x) \Rightarrow f'(x) = sh(x)$	$y = ch(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot sh(f(x))$	$y = ch(\ln(x)) \Rightarrow y' = \frac{sh(\ln(x))}{x}$
$f(x) = th(x) \Rightarrow f'(x) = 1 - th^2(x)$	$y = th(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot (1 - th^2(f(x)))$	$y = th(x^4) \Rightarrow y' = (4x^3) \cdot (1 - th^2(x^4))$

17. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (3x)^{x^5 - 9x^3}$ b) $y = ((2x+7)^{5x^3 - 6x^2})$ c) $y = (x + e)^{(4x^5 - 8x^3)^5}$ d) $f(x) = (x^x)^x$

18. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \arcsen \sqrt{\frac{4 + senx}{4 - senx}}$ b) $y = e^{\arccos \sqrt{6x+8}}$ c) $y = sen(\arctg \frac{7x}{\sqrt{1-2x^2}})$ d) $y = \arccos \frac{5x}{\sqrt{16-x^2}}$

19. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \arg sh \sqrt{\frac{5+shx}{5-shx}}$ b) $y = \sqrt{2e^{\arg ch \sqrt{7x+3}}}$ c) $y = sh(\arg th \frac{2x+6}{\sqrt{25-16x^2}})$ d) $y = \arg ch \frac{senx}{\sqrt{5-3sen^2x^2}}$

3. APLICACIONES DE LA DERIVADA

3.1. Teoremas de Rolle y del valor medio

Teorema de Rolle

El teorema de Rolle nos indica bajo qué condiciones podemos asegurar que hay un punto con tangente horizontal.

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b) . Si $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto c del intervalo abierto (a, b) en el que $f'(c) = 0$.

Demostración

Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza un valor máximo y un valor mínimo absolutos en dicho intervalo. Pueden ocurrir dos casos:

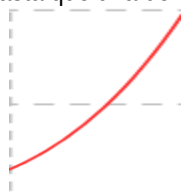
1.- Estos valores máximos y mínimos no se alcancen en el interior del intervalo. Entonces se alcanzan en los extremos a y b . Pero al ser por hipótesis $f(a) = f(b)$ entonces el valor máximo coincide con el valor mínimo y la función es constante. Por tanto, $f'(c) = 0$ para todo $c \in (a, b)$.

2.- En caso contrario el máximo o el mínimo o ambos pertenecen al interior del intervalo. Sea por ejemplo $\alpha \in (a, b)$ el valor máximo. Al ser la función derivable en (a, b) , existe $f'(\alpha)$. Por ser α un máximo, la función es creciente para valores x menores a α por lo que $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geq 0$. Y es decreciente para valores x mayores a α por lo que

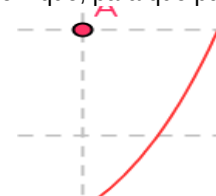
$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq 0. \text{ Al existir la derivada ambos límites deben coincidir y para ello: } f'(\alpha) = 0.$$

Análisis de las condiciones

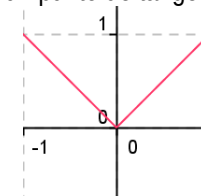
Basta que una de las condiciones no se verifique, para que pueda la función no tener un punto de tangente horizontal.



Si $f(a) \neq f(b)$ no tiene que tener un punto de tangente horizontal

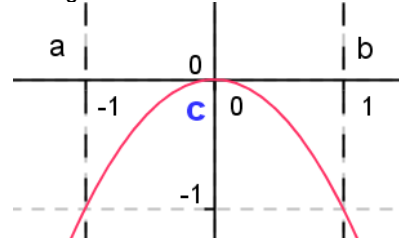
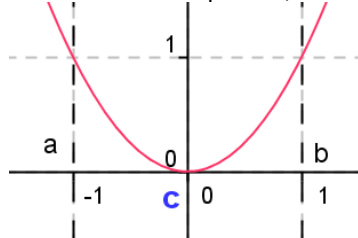


Si no es continua en $[a, b]$ no tiene que tener un punto de tangente horizontal



Si no es derivable en (a, b) no tiene que tener un punto de tangente horizontal

Sin embargo, si se verifican las hipótesis, entonces existe un punto en el que la tangente es horizontal.



Actividades resueltas

- ✚ Dos coches de carreras parten al mismo tiempo y del mismo lugar y llegan a la meta empatados. Demuestra que en algún momento llevaron la misma velocidad.

Llamamos f y g a las funciones que indican el espacio recorrido por cada coche, y sean a el instante de partida y b el de llegada. Las funciones f y g son continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) . Definimos una función $h(x) = f(x) - g(x)$ que verifica las condiciones del teorema de Rolle, es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $h(a) = f(a) - g(a) = 0 = h(b) = f(b) - g(b)$. Por tanto, existe un instante c en el que $h'(c) = 0$, luego $f'(c) - g'(c) = 0$, y $f'(c) = g'(c)$.

- ✚ Determina el valor de b para que la función $f(x) = x^2 - 3x + 5$ verifique el teorema de Rolle en el intervalo $[1, b]$ e indica dónde se verifica la tesis.

La función es continua y derivable en toda la recta real luego lo es en cualquier intervalo $[1, b]$. Queremos que $f(1) = f(b)$, por tanto $f(1) = 3 = b^2 - 3b + 5$, por lo que $b = 2$. $f'(x) = 2x - 3 = 0$, por lo que el punto c donde se anula la derivada es $c = 3/2 \in [1, 2]$.

Teorema del valor medio

Sean $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivables en el intervalo abierto (a, b) . Existe un punto c del intervalo abierto (a, b) en el que:

$$(f(b) - f(a)) g'(c) = (g(b) - g(a)) f'(c).$$

Demostración

Construimos la función $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$; $h(x) = (f(b) - f(a)) g(x) - (g(b) - g(a)) f(x)$. La función h es continua en $[a, b]$ pues es suma de funciones continuas, f y g , multiplicadas por números, $(f(b) - f(a))$ y $(g(b) - g(a))$ que existen. La función h es derivable en (a, b) pues está formada por funciones derivables. Además, $h(a) = h(b)$. En efecto: $h(a) = (f(b) - f(a)) g(a) - (g(b) - g(a)) f(a) = f(b) g(a) - g(b) f(a)$, y $h(b) = (f(b) - f(a)) g(b) - (g(b) - g(a)) f(b) = -g(b) f(a) + f(b) g(a)$, por lo que son iguales.

La función h verifica las condiciones del teorema de Rolle, por lo que existe un punto c de (a, b) en el que

$$h'(c) = 0 = (f(b) - f(a)) g'(c) - (g(b) - g(a)) f'(c).$$

Corolario (Teorema del valor medio)

Una consecuencia del teorema anterior es este corolario, que también recibe el nombre de teorema del valor medio.

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b) . Existe un punto c del intervalo abierto (a, b) en el que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Nos garantiza bajo qué condiciones existe un punto en el que la recta tangente es paralela a la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

Demostración

En el teorema anterior tomamos como función $g(x) = x$, que es continua y derivable en toda la recta real. Como $g'(x) = 1$, sustituimos:

$$0 = (f(b) - f(a)) g'(c) - (g(b) - g(a)) f'(c) = (f(b) - f(a)) 1 - (b - a) f'(c). \text{ De donde: } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Actividades resueltas

- ✚ Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 + nx & \text{si } x < -2 \\ x^3 + m & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$. a) Determina m y n para que se cumplan las hipótesis del

teorema del valor medio en el intervalo $[-4, 2]$. b) Hallar los puntos del intervalo cuya existencia garantiza el teorema.

Selectividad

a) El teorema del valor medio requiere que la función sea continua en el intervalo cerrado y derivable en el intervalo abierto. La función está definida a trozos por funciones polinómicas que son siempre funciones continuas y derivables, luego el único punto dudoso es $x = -2$.

Para que sea continua debe verificarse que $(-2)^2 + n(-2) = (-2)^3 + m \Rightarrow 4 - 2n = -8 + m \Rightarrow 12 = 2n + m$.

Para que sea derivable: $f'(x) = \begin{cases} 2x + n & \text{si } x < -2 \\ 3x^2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$ en $x = -2$ debe verificarse que: $2(-2) + n = 3(-2)^2 \Rightarrow -4 + n = 12 \Rightarrow n = 16$

Por tanto $12 = 2(16) + m \Rightarrow m = 12 - 32 = -20$, y $f(x) = \begin{cases} x^2 + 16x & \text{si } x < -2 \\ x^3 - 20 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$ verifica las hipótesis del teorema en $[-4, 2]$.

b) El teorema garantiza que existe un punto $c \in (a, b)$ en el que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. $f'(x) = \begin{cases} 2x + 16 & \text{si } x < -2 \\ 3x^2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$ debe

ser: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(2) - f(-4)}{2 - (-4)} = \frac{(8 - 20) - ((-4)^2 + 16(-4))}{6} = \frac{(-12) - (-48)}{6} = \frac{36}{6} = 6$.

Igualemos ambas ramas a 6 y obtenemos: $2x + 16 = 6 \Rightarrow x = -5$ que no pertenece al intervalo.

$3x^2 = 6 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{6}{3}} = \pm\sqrt{2}$ y ambos valores pertenecen al intervalo, luego ambos son las soluciones buscadas.

Solución: a) $n = 16$; $m = -20$; b) $c = -10/6 \in (-4, 2)$.

Actividades propuestas

20. Se considera la función: $f(x) = \frac{1}{2 + \sin x - \cos x}$. Se pide: Comprueba la existencia de, al menos, un punto $c \in [-\pi, \pi]$ tal que $f''(c) = 0$. (Sugerencia: Utiliza el teorema de Rolle). Demuestra que en c hay un punto de inflexión.

Selectividad.

21. Sea: $f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$ a) Estudia la continuidad y derivabilidad de f en $x = 0$. B) Estudia cuándo se verifica $f'(x) = 0$. Puesto que $f(1) = f(-1)$, ¿existe contradicción con el Teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$?

Selectividad.

Nota: Observa que la función no es derivable en $(-1, 1)$ luego no se verifican las hipótesis del teorema.

3.2. La regla de L'Hôpital

Sean f y g dos funciones derivables en un entorno del punto $x = a$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ y existe el límite

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe el $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y es: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Demostración

Para simplificar la demostración vamos a suponer que $f(a) = 0$ y que $g(a) = 0$.

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}$. Luego $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

La regla de L'Hôpital también puede usarse si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, e incluso si x tiende a ∞ .

Para demostrarlo basta tener en cuenta que si $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$ entonces $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}}{\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}} \rightarrow \frac{0}{0}$

Actividades resueltas

Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$.

Como si llamamos $f(x) = x \sin x$; $g(x) = 1 - \cos x$ se verifica que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, podemos aplicar la regla de

L'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{\sin x}$. De nuevo, tanto el numerador como el denominador se anula para $x = 0$, luego

aplicamos otra vez la regla de L'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x - x \sin x}{\cos x} = 2$.

Es importante validar las condiciones en cada paso para no aplicar la regla cuando no puede aplicarse como en el problema

que sigue:

 **Calcula** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 - \cos x}$.

Observa que ahora $f(0) = 0$ pero que $g(0) = -1$ por lo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 - \cos x} = 0$. Pero si aplicamos L'Hôpital por no haber comprobado las condiciones tendríamos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x + x \cos x}{2x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x}{2 + \cos x} = \frac{2}{3}, \text{ que está mal.}$$

 **Calcula** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 3x + 2}{5x^2 + 8x - 1}$.

Comprobamos que se verifica que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$, por lo que podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 3x + 2}{5x^2 + 8x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x - 3}{10x + 8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14}{10} = \frac{7}{5}.$$

Actividades propuestas

22. Calcula $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$ (Selectividad)

23. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$ (Selectividad)

24. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$ sabiendo que $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos sus puntos y tal que: $f(0) = 1$; $f(1) = 2$; $f'(0) = 3$; $f'(1) = 4$. (Selectividad)

3.3. Crecimiento y decrecimiento

Recuerda que:

Si $f'(a) > 0$ entonces la función $y = f(x)$ es creciente en $x = a$.

Si $f'(a) < 0$ entonces la función $y = f(x)$ es decreciente en $x = a$.

Ejemplo:

 **Determina si** $y = 0.2x^2 + 150x - 180$ **es creciente o decreciente en** $x = 5$.

Calculamos la derivada: $y' = 0.4x + 150$; en $x = 5$: $y'(5) = 0.4(5) + 150 = 152 > 0$. La función es creciente.

Actividades propuestas

25. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 - 3x$. ¿Cómo es en $x = 0$? ¿Y en $x = 2$? ¿Y en $x = -2$?

3.4. Máximos y mínimos

Recuerda que:

Una función alcanza en $(a, f(a))$ un máximo global o absoluto si $f(a)$ es el mayor valor que alcanza la función.

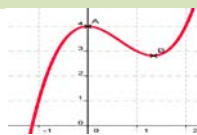
Una función alcanza en $(a, f(a))$ un mínimo global o absoluto si $f(a)$ es el menor valor que alcanza la función.

Una función alcanza en $(a, f(a))$ un máximo local o relativo si existe un intervalo que contiene a a en el que $f(a)$ es el mayor valor de la función en ese intervalo.

Una función alcanza en $(a, f(a))$ un mínimo local o relativo si existe un intervalo que contiene a a en el que $f(a)$ es el menor valor de la función en ese intervalo.

Ejemplo:

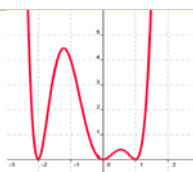
La función $y = x^2(x - 2) + 4$ de la gráfica del margen no alcanza ni máximos ni mínimos absolutos, pero alcanza un máximo relativo en punto A (0, 4) y un mínimo relativo en el punto B.



Ejemplo:

La función de la gráfica del margen no tiene máximos absolutos, pero alcanza máximos relativos en $x = -1.25$ y en $x = 0.5$.

Tiene tres mínimos que son a la vez absolutos y relativos en $x = -2$, $x = 0$ y en $x = 1$.



Si una función tiene un máximo o un mínimo en $(a, f(a))$ y existe $f'(a)$, entonces $f'(a) = 0$.

Se denomina **punto singular** o **punto crítico** de $y = f(x)$ a los puntos en los que se anula la derivada.

Para saber si un punto crítico es un máximo, o un mínimo, o un punto de inflexión podemos utilizar alguno de los tres criterios

siguientes:

Criterio 1:

Si $f'(a) = 0$, estudiamos los valores de x próximos a a , tanto a la derecha como a la izquierda.

Criterio 2:

Estudiar el signo de la derivada en puntos x próximos a a , con lo que sabremos si la función crece o decrece en esos puntos.

Criterio 3:

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ entonces $(a, f(a))$ es un mínimo.

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$ entonces $(a, f(a))$ es un máximo.

Actividades resueltas

✚ **Calcula los máximos y mínimos de la función:** $y = 7x^2 + 5x$.

Calculamos la derivada y la igualamos a 0: $y' = 14x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5/14$.

Para saber si es máximo o mínimo calculamos la derivada segunda: $y'' = 14 > 0$. Es un mínimo.

La función es una parábola de vértice $(-5/14, 7(-5/14)^2 + 5(-5/14)) \cong (-0.38, -0.89)$.

Para $x < -5/14$ la función es decreciente, y para $x > -5/14$, es creciente.

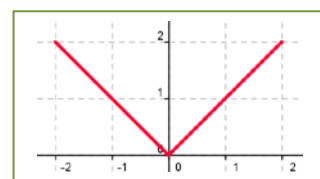
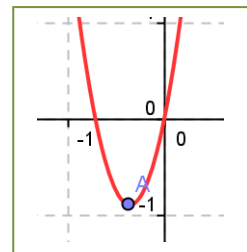
Dos observaciones importantes

1) Pueden existir máximos o mínimos en puntos donde no exista la derivada.

Por ejemplo:

La función valor absoluto de x tiene un mínimo en $(0, 0)$. $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Pero la derivada no se anula en $(0, 0)$. No existe. La derivada a la derecha de 0 vale 1, y la derivada a la izquierda vale -1 . Son distintas, luego la función no es derivable en $(0, 0)$.



2) Pueden existir puntos donde la derivada valga 0 y sin embargo no sean ni máximos ni mínimos.

Por ejemplo:

La función $y = x^3$ de derivada $y' = 3x^2$, que se anula en $(0, 0)$ no tiene en dicho punto ni un máximo, ni un mínimo. La función es siempre creciente. Va a tener en $(0, 0)$ un punto de inflexión de tangente horizontal.

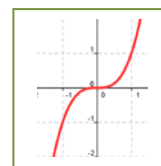
Para estar seguros de no perder ninguna posible solución conviene, para determinar todos los máximos y mínimos absolutos y relativos de una función, buscar:

1) Los puntos donde se anula la derivada: $f'(x) = 0$.

2) Los puntos donde la función no sea derivable.

3) Los valores de $f(x)$ en los extremos del dominio de definición de la función.

Determinar el valor de la función en todos estos puntos y compararnos estos valores.



Actividades resueltas

✚ **Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$, en el intervalo $[1, 3]$ y en el intervalo $[1, 5]$.**

La función es derivable en todos los puntos. $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$, que se anula en 2 y 4. En el intervalo $[1, 5]$ ambos valores pertenecen al intervalo, por lo que los valores a valorar son: 1, 2, 4 y 5. En el intervalo $[1, 3]$ el punto 4 no pertenece, luego tenemos que valorar 1, 2 y 3; $f(1) = 16$; $f(2) = 20$; $f(3) = 18$; $f(4) = 16$; $f(5) = 20$.

Calculamos la derivada segunda: $f''(x) = 6x - 18$, en los puntos donde se anula la derivada:

$f''(2) = -6 < 0$; $f''(4) = 6$. En $(2, 20)$ se alcanza un máximo relativo y en $(4, 16)$ un mínimo relativo.

Intervalo $[1, 3]$: Máximo absoluto y relativo es $(2, 20)$ y mínimo absoluto es $(1, 16)$.

Intervalo $[1, 5]$: Máximos absolutos es $(5, 20)$ y $(2, 20)$, mínimos absolutos son $(1, 16)$ y $(4, 16)$.

✚ **Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x|$ en el intervalo $[-6, 2]$.**

La función no es derivable en $(0, 0)$. La derivada vale 1 si x es positivo y -1 si x es negativo, por lo que la derivada no se anula en ningún punto. Estudiamos los extremos del intervalo, -6 y 2 : $f(-6) = |-6| = 6$; $f(2) = |2| = 2$.

El mínimo absoluto de la función se alcanza en $(0, 0)$ y el máximo absoluto en $(-6, 6)$. Hay un máximo relativo en $(2, 2)$.

Actividades propuestas

26. Calcula los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = x^4 - 1$;

b) $y = 3x^3 + 9$;

c) $y = 4x^4 - 2x^2 + 5$;

d) $y = 9x^3 - 3x^2$.

27. La velocidad de propagación de una onda de longitud x en aguas profundas viene dada por la fórmula $v = \sqrt{\frac{x}{a} + \frac{a}{x}}$ en la

que a es una constante conocida. Comprueba que la longitud que corresponde a un mínimo de velocidades $x = a$.

28. Demuestra que la suma de dos sumandos positivos, cuyo producto es constante, es mínima cuando estos son iguales.
29. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 72x$, en el intervalo $[-5, 5]$ y en el intervalo $[1, 4]$.
30. Determina los máximos y mínimos de las funciones siguientes: a) $y = |x - 9|$; b) $y = |x + 2| + |x - 3|$.
31. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 2|$ en el intervalo $[-4, 4]$.
32. Se considera la función:
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
. Contesta, razonadamente, a las siguientes preguntas:
- a) ¿Es continua en el punto $x = 0$? b) ¿Es derivable en el punto $x = 0$? c) ¿Alcanza algún extremo? (Selectividad)
33. Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Determinar sus máximos y mínimos relativos.

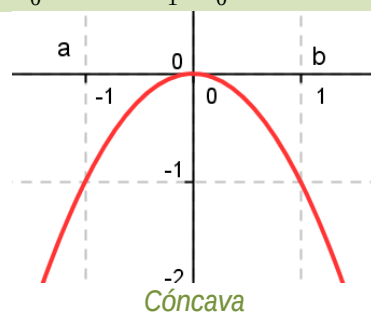
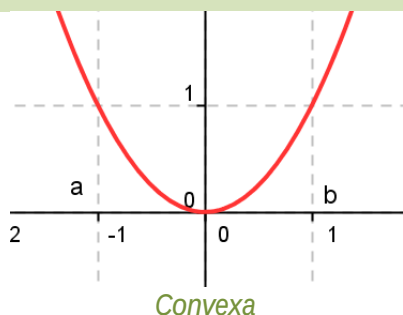
Selectividad

3.5. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función. f es convexa $[a, b]$ si para toda terna x_0, x, x_1 del intervalo con $x_0 < x < x_1$ se verifica que:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

f es cóncava $[a, b]$ si, en las mismas condiciones, se verifica que:
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

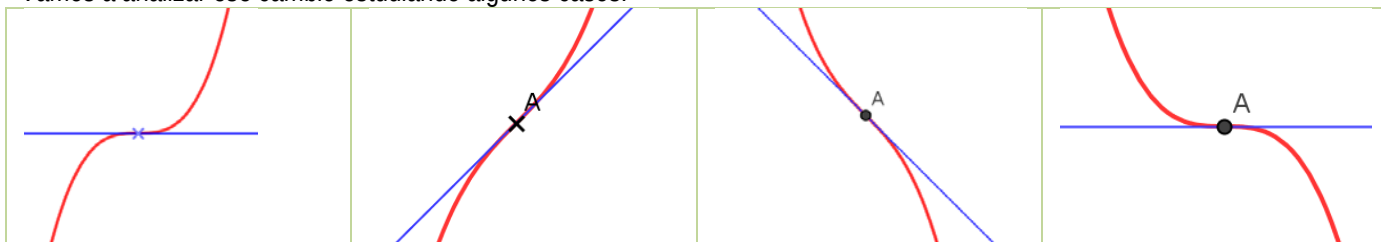


Observa que para esta definición no se ha impuesto ser derivable a la función. Si la función es derivable dos veces en el intervalo de estudio se tiene:

$$\begin{aligned} f \text{ es convexa } [a, b] &\Leftrightarrow f' \text{ es estrictamente creciente} \begin{cases} \Rightarrow f'' \geq 0 \\ \Leftarrow f'' > 0 \end{cases} \\ f \text{ es cóncava } [a, b] &\Leftrightarrow f' \text{ es estrictamente decreciente} \begin{cases} \Rightarrow f'' \leq 0 \\ \Leftarrow f'' < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Observa también que, si la función es convexa, la gráfica queda por encima de la recta tangente, y si es cóncava, por debajo. Del mismo modo que en los puntos de la gráfica de una función en los que se anula la derivada primera se produce un cambio, pasa de creciente a decreciente, o viceversa, en los puntos en los que se anula la derivada segunda también se produce una modificación en la gráfica, pasa de cóncava a convexa, o viceversa.

Vamos a analizar ese cambio estudiando algunos casos:



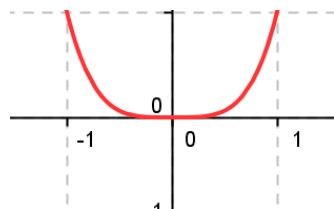
En cuatro gráficas de arriba hemos señalado un punto y la recta tangente en ese punto. La derivada segunda se anula en los puntos señalados de las cuatro gráficas. Analiza lo que ocurre. Observa que la recta tangente deja a la gráfica unas veces por arriba y otras por abajo. Diríamos que atraviesa la gráfica. Hay un cambio en la concavidad.

Esos puntos se llaman puntos de inflexión.

Si la función $y = f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = a$, y existe la segunda derivada, entonces $f''(a) = 0$.

Si además, como en la primera gráfica y en la cuarta, se anula la derivada primera se dice que tiene un punto de inflexión de tangente horizontal.

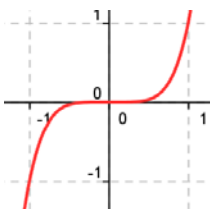
Observa las gráficas siguientes. Hay máximos, mínimos y puntos de inflexión en el origen $(0, 0)$.



$$y = x^4$$

$$y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0; y^{(4)}(0) > 0$$

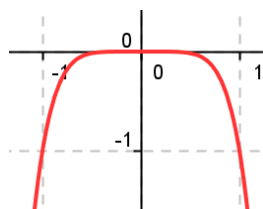
Mínimo



$$y = x^5$$

$$y'(0) = y''(0) = y'''(0) = y^{(4)}(0) = 0; y^{(5)}(0) \neq 0$$

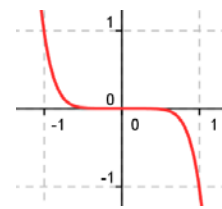
Punto de inflexión de tangente horizontal



$$y = -x^6$$

$$y'(0) = y''(0) = y'''(0) = y^{(4)}(0) = y^{(5)}(0) = 0; y^{(6)}(0) < 0$$

Máximo



$$y = -x^7$$

$$y'(0) = y''(0) = y'''(0) = y^{(4)}(0) = y^{(5)}(0) = 0; y^{(6)}(0) \neq 0$$

Punto de inflexión de tangente horizontal

Las propiedades estudiadas se pueden generalizar con el siguiente teorema:

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función $k+1$ veces derivable en $[a, b]$ y sea c un punto de (a, b) . Entonces:

- Si $f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(k)}(c) = 0$, $f^{(k+1)}(c) \neq 0$ y k es impar:
 - Si $f^{(k+1)}(c) < 0$ entonces f alcanza un máximo relativo en c .
 - Si $f^{(k+1)}(c) > 0$ entonces f alcanza un mínimo relativo en c .
- Si $f'(c) = \dots = f^{(k)}(c) = 0$, $f^{(k+1)}(c) \neq 0$ y k es par, entonces f tiene un punto de inflexión en c . Si además $f'(c) = 0$ la tangente del punto de inflexión es horizontal.

Actividades resueltas

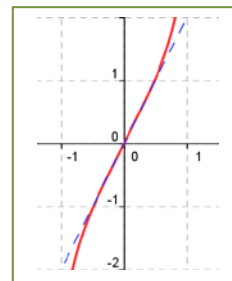
✚ Determina los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x) = x^5 + 2x$.

Calculamos la derivada segunda $f'(x) = 5x^4 + 2$; $f''(x) = 20x^3$. Se anula en $x = 0$. Calculamos las derivadas sucesivas:

$$f'''(x) = 60x^2; f^{(4)}(x) = 120x; f^{(5)}(x) = 120; f^{(6)}(0) = f^{(5)}(0) = 0 \text{ y } f^{(6)}(x) \neq 0.$$

La primera derivada que no se anula en $x = 0$ es la quinta, es impar, luego en $(0, 2)$ hay un punto de inflexión, y como no se anula la derivada primera no es un punto de inflexión de tangente horizontal.

La derivada segunda $f''(x) = 20x^3$ es positiva si $x > 0$ y negativa si $x < 0$, por tanto la función es convexa si $x > 0$ y cóncava si $x < 0$.



Actividades propuestas

34. Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada $f'(x) = (x-4)^2(x^2 - 8x + 7)$,
- Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
 - Halla los máximos y mínimos relativos de f .
 - ¿Es el punto $x = 4$ un punto de inflexión de f ? Justifica razonadamente la respuesta.

Selectividad

35. Determina los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las funciones siguientes:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 11$; b) $y = x^3 - 7x + 8$; c) $y = x^5 + 2$; d) $y = x^4 - 3$.

3.6. Representación gráfica de una función

Otra de las aplicaciones de la derivada es la representación gráfica de funciones. Se va a dedicar el próximo capítulo a recoger todo lo que ya sabes, para hacerlo. Ahora únicamente vamos a esbozarlo. Vamos a seguir un orden para hacerlo:

- Puntos de intersección con los ejes coordenados.
- Asíntotas. Dominio de definición. Comportamiento en el infinito.
- Derivada primera: crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.
- Derivada segunda: concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

Actividades resueltas

✚ Haz un esbozo de la gráfica de la función: $f(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)(x-2)}$

- Puntos de intersección con los ejes coordenados: En ocasiones es difícil encontrarlos. En otras es sencillo como en este caso. Para $x = 0$ $y = 3/2$, $A(0, 3/2)$. La ordenada vale 0 para $x = 1$ y para $x = -3$, $B(1, 0)$, $C(-3, 0)$.
- Asíntotas. Dominio de definición. Comportamiento en el infinito: La función está definida en toda la recta real excepto en los valores que anulan al denominador, donde tenemos dos asíntotas verticales: $x = -1$ y para $x = 2$. Cuando x tiende a infinito la y tiende a 1, luego tenemos una asíntota horizontal: $y = 1$.

En muchas ocasiones con esta información ya somos capaces de hacer un primer esbozo de la gráfica:



Haz un esbozo de la gráfica de la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1. Puntos de intersección con los ejes coordenados.

La rama I no corta al eje de abscisas. La rama II tampoco. Si $x = 0$ en la rama II tenemos que $f(0) = 2$, el punto B (0, 2) de la gráfica.

2. Asíntotas. Dominio de definición. Comportamiento en el infinito.

La función $f(x)$ es continua en todos los puntos salvo en $\{0, -1\}$. Comportamiento en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty. \text{ A la izquierda de 0 toma el valor 2. En } x = -1 \text{ tiene una asíntota vertical.}$$

$$\text{Comportamiento en } x \text{ tiende a } \infty: \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 1} = -\infty.$$

3. Derivada primera: crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

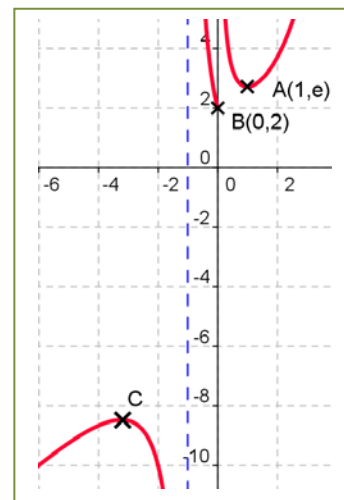
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x(x-1)}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En $x = 0$ no es derivable pues no es continua.

Observando el signo de la derivada tenemos que la función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1 - \sqrt{5})$, decreciente en $(-1 - \sqrt{5}, -1)$, decreciente en $(-1, 0)$, y es decreciente en $(0, 1)$ y creciente en $(1, +\infty)$

En $x = 1$ hay un mínimo: A (1, e).

En $x = -1 - \sqrt{5}$ hay un máximo, en el punto C de la gráfica.



4. Derivada segunda: concavidad y convexidad. Puntos de inflexión: $f''(x) = \begin{cases} \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3} & \text{si } x > 0 \\ \frac{10}{(x+1)^3} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

La derivada segunda no se anula en la rama I ni en la rama II. No hay puntos de inflexión. Es cóncava de $(-\infty, -1)$ y convexa de $(-1, 0)$ y de $(0, +\infty)$.

Actividades propuestas

36. Se considera la función $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$. a) Indicar el dominio de definición de la función f y sus asíntotas. b) Hallar los extremos relativos de la función f y sus intervalos de concavidad y convexidad. c) Dibujar la gráfica de f y hallar su máximo y su mínimo absoluto en el intervalo $[-1, 1]$. Selectividad

37. Sea la función $f(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$ definida en el intervalo cerrado y acotado $[-2\pi, 2\pi]$. Se pide: a) Calcular los puntos del intervalo dado donde f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos. b) Dibujar la gráfica de la función f en el intervalo dado. Selectividad

38. Sea la función $f(x) = 2x |4 - x|$. Estudia su continuidad y derivabilidad. Dibuja su gráfica. Selectividad

39. Se considera la función $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$. Calcula las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$. Selectividad

3.7. Problemas de optimización

A los problemas de máximos y mínimos se les suele denominar problemas de optimización.

Actividades resueltas

Cortando un mismo cuadrado de las cuatro esquinas de una hoja rectangular de dimensiones a y b se puede construir una caja abierta por la parte superior. Calcula el lado del cuadrado que hay que cortar para que la caja tenga máxima capacidad.

El volumen de la caja es el producto de los tres lados. Si cortamos las esquinas el rectángulo de longitud b tendrá ahora una longitud $b - 2x$. Lo mismo el de longitud a . La altura es x . $V = (b - 2x)(a - 2x)x = 4x^3 - 2bx^2 - 2ax^2 + abx$.

Para hacer el volumen máximo, derivamos e igualamos a cero.

$$V' = 12x^2 - 4(b + a) + ab = 0 \Rightarrow x = \frac{b + a - \sqrt{b^2 + a^2 - ab}}{6}$$

Por consideraciones geométricas, el valor obtenido es un máximo, pues si el lado del cuadrado vale 0, o si vale la mitad del lado, el volumen de la caja es mínimo, vale 0, pues no se forma caja.

Entre todos los cilindros de volumen V dado determina el radio y la altura del de menor superficie.

El volumen de un cilindro es igual a: $V = \pi r^2 h$, y su superficie total es igual a $S = 2\pi r h + 2\pi r^2$.

La superficie depende de dos variables, el radio y la altura. Como nos dicen que el volumen es dado, despejamos de su expresión por ejemplo la altura, y la sustituimos en la superficie: $h = \frac{V}{\pi r^2} \Rightarrow S = 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$

Derivamos la superficie respecto a r , e igualamos a cero la derivada: $S' = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r = 0 \Rightarrow 4\pi r = \frac{2V}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{V}{2\pi}$

Para saber si ese valor del radio conduce a un máximo o a un mínimo. Hallamos el signo de la derivada segunda:

$$S'' = \frac{4V}{r^3} + 4\pi = \frac{4V}{\frac{V}{2\pi}} + 4\pi = 12\pi > 0$$

La solución obtenida nos da una superficie mínima.

$$h = \frac{V}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \right)^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}; r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Actividades propuestas

40. Se desea fabricar envases con forma de ortoedro de base cuadrada de forma que el volumen sea de dos litros y la superficie empleada sea mínima.
41. Determina las dimensiones de un cono de volumen máximo inscrito en una esfera de radio $R = 5$ cm. (Ayuda: La altura del cono es igual a $R + x$, y el radio de la base $r^2 = R^2 - x^2$).
42. Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Selectividad

RESUMEN

Definición de derivada	$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$	
Recta tangente	$y = f(a) + f'(a)(x - a)$	Tangente a $y = x^3 + 2x$ en el punto (0, 0): $y = 0 + 2(x - 0) = 2x$.
Teorema de Rolle	$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Si $f(a) = f(b)$ existe $c \in (a, b)$ en el que $f'(c) = 0$.	
Teorema del valor medio	$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Existe $c \in (a, b)$ en el que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$	
Regla de L'Hôpital	f y g derivables en un entorno del punto $x = a$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ y existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow$ existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.	
Crecimiento y decrecimiento	Si $f'(a) > 0$ entonces $y = f(x)$ es creciente en $x = a$. Si $f'(a) < 0$ entonces $y = f(x)$ es decreciente en $x = a$.	$y = x^3 - 3x \rightarrow y' = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = 1, x = -1$. Para $x < -1, y' > 0 \rightarrow y$ creciente. Para $-1 < x < 1, y' < 0 \rightarrow y$ decreciente Para $x > 1, y' > 0 \rightarrow y$ creciente
Máximos y mínimos	Si $(a, f(a))$ es un máximo o un mínimo de $y = f(x)$ y existe $f'(a)$ entonces $f'(a) = 0$. Si $f'(a) = 0$ entonces $(a, f(a))$ es un punto crítico. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ entonces $(a, f(a))$ es un mínimo. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$ entonces $(a, f(a))$ es un máximo. Si $(a, f(a))$ es un punto de inflexión de $y = f(x)$ y existe $f''(a)$ entonces $f''(a) = 0$. $f''(a) < 0 \Rightarrow$ cóncava. $f''(a) > 0 \Rightarrow$ convexa	$y = x^3 - 3x \rightarrow y' = 3x^2 - 3 \rightarrow y'' = 6x$. $y'(-1) = 0, y''(-1) < 0$, luego $(-1, 2)$ es un máximo relativo. $y'(1) = 0, y''(1) > 0$, luego $(1, -2)$ es un mínimo relativo. $(0, 0)$ es un punto de inflexión

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Concepto de derivada

- Piensa en un ejemplo de función no derivable y que sí sea continua.
- Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = \sqrt{x}$ en $x = 1, 4, 5, \dots$. ¿Puedes obtener la derivada en $x = 0$? Razona la respuesta.
- Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, indica cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas, razonando la respuesta.
 - f es derivable en $x = 1$, pues las derivadas laterales se anulan en dicho punto.
 - f ni es continua en $x = 1$ ni derivable en dicho punto
- ¿Cuántos puntos hay en la función $f(x) = |x^2 + 6x + 8|$ que no tengan derivada? Justifica la respuesta.
- Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 5x^2 + 3x - 2$ en el punto $x = 5$.
- El perfil de una cierta montaña tiene la forma de una parábola: $y = 0.03x - 0.002x^2$, donde x y y se miden en km. Escribe la ecuación de la recta tangente para $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3$ km.
- Al caer un cuerpo en el vacío la distancia d (en metros), recorrida a los t segundos viene dada aproximadamente por la expresión: $d = 5t^2$. (La expresión es $d = (1/2)gt^2$, donde g es la aceleración de la gravedad terrestre, aproximadamente de 9.8): a) ¿A qué velocidad llegará al suelo una persona que en un incendio se lance a la lona de los bomberos y tarde 8 segundos en llegar a ella? b) ¿A qué velocidad llegará si se lanza desde una altura de 20 metros?
- Un vehículo espacial despegue de un planeta con una trayectoria dada por: $y = 30x - 0.5x^2$ (x y y en km). La dirección del vehículo nos la proporciona la recta tangente en cada punto. Determina la dirección del vehículo cuando está a 4 km de distancia sobre el horizonte.
- Un determinado gas ocupa un volumen de 3 m³ a una presión de 3 Newtons por m². Según la ley de Boyle a cada presión ejercida sobre el gas corresponde un volumen dado por $V = 10/P$. ¿Cuál es la tasa de variación instantánea del volumen cuando la presión es de 9 Newtons por m²? ¿Y cuándo es de 18 Newtons por m²? ¿Es la mitad?
- Calcula las rectas tangentes de las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados:
 - $y = x^3 + 5$ en $x = 2$.
 - $y = 3x^2 + 7x - 2$ en $x = 1$.
 - $y = 2x^3 - 5x^2 + 4$ en $x = 0$.
- Determina las coordenadas de los puntos de la gráfica $y = x^3 - 3x + 2$ en los que su tangente sea paralela: a) a la recta $y = 0$; b) a la recta $y = 2x$.
- Determina la recta tangente de la gráfica de la función $y = \sqrt[3]{4x^3}$ en $x = 0$.
- Determina las rectas tangentes a la función $f(x) = 4x^3 - 12x$ en los puntos en los que la pendiente es 12. ¿Cuál es el menor valor que puede tener la pendiente a esta curva? ¿En qué puntos se alcanza?
- Determina los coeficientes a, b y c de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, que pasa por el punto $A(1, 2)$ y es tangente a la recta $y = x$ en el punto $O(0, 0)$.
- Determina los coeficientes a, b y c para que las funciones $f(x) = x^3 + bx + a$ y $g(x) = cx - x^2$ tengan la misma recta tangente en el punto $A(1, 0)$.
- Determina el coeficiente a , para que la función $f(x) = x^2 + a$, sea tangente a la recta $y = x$.

Cálculo de derivadas

Si ya sabes derivar, puedes no hacer estos ejercicios.

17. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 3x^2 + 5x - 7$ b) $y = 5x^3 - 4x^2 + 3x + 2$ c) $y = 6x^2 - 4x + 7$ d) $y = 9x^7 - 4x^6 - 2x^3$

18. Calcula: a) $D(3x^2 + 6x^4 - 9x)$ b) $D(7x^5 - 5x^2 + 3x + 2x^3)$ c) $D(5x^5 - 4x^4 + 3x^3)$ d) $\frac{dy}{dx}(7x^3 - 8x^6 - 9x^8)$

19. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 5x^2 + 4x - 3/x$ b) $y = 7x^3 - 5x^2 + 4\sqrt{x}$ c) $y = \frac{6\sqrt{x}}{(x+2) \cdot (x^2 - 3x + 1)}$ d) $y = \frac{\sqrt{x} \cdot (x+3)}{(x^2 - 3)}$

20. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{(x-3) \cdot (2x-4)}{x+5}$ b) $y = \frac{(2x^2+5) \cdot (7x-3)}{5x-8}$ c) $y = \frac{(2x+3x^2) \cdot (4x^5-5)}{6x+7}$ d) $y = \frac{5(x+2) \cdot (4x-6)}{2(x+5) \cdot (6x+3)}$

21. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^3 + 5) \cdot (8x^6 - 7)$; b) $y = (9x^3 - 3) \cdot (7x^4 + 6)$;

22. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x-2}{x+2}$; b) $y = \sqrt{x-2} \cdot (6x^3 - 3x)$; c) $y = \frac{4x^3 - 7x^2}{8x^4 - 4x^3}$; d) $y = \frac{2\sqrt{x^3}}{3x+4}$

23. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^6 - 5x^2)^9$ b) $y = (2x^4 - 7x^6)^5$ c) $y = \sqrt{(2x^7 - 6x^5)^3}$ d) $y = \sqrt[5]{(3x^4 + 6x^9)^7}$

24. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{2x^3 + 3} \cdot (4x^7 + 6x^2)^6$ b) $y = \frac{\sqrt[3]{5x^3 + 7x^2 - 2}}{3x + 4}$ c) $y = (7x^3 + 3)^5 \cdot (4x^5 - 8x^8)$ d) $y = \frac{(5x^3 - 7x^2)^9}{(9x^4 - 3x^3)^2}$

25. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las funciones siguientes:

a) $y = (5x)^{x^5 - 3x^3}$ b) $y = (3x+6)^{(4x^3 + 2x^2)}$ c) $y = e^{(3x^5 - 6x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{(5x+1) \left(3x^4 - 4x^5\right)^3}$

26. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = e^{x^5 + 7x^3}$ b) $y = (e^{3x^3 - 5x^2})^7$ c) $y = e^{(4x^5 + 8x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{e \left(5x^5 - 3x^8\right)^2}$

27. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \ln((5x^5 - 3x^3)^{12} (3x + 1))$ b) $y = \ln \sqrt{(2x^3 + 5x^2)^3}$ c) $y = \ln \sqrt{\frac{7x^5 - 5x}{2x - 3}}$ d) $y = \ln \sqrt[3]{(3x^4 - 5x^5)^2}$

28. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$f(x) = \frac{5\cos(x)}{1 + 3\sin(x^2)}$ $f(x) = \operatorname{sen}(5\operatorname{sh}^3 3x)$ $f(x) = \operatorname{ch}(3\operatorname{sh}(2x))$ $f(x) = \operatorname{th}(5x + 7x^2)$

29. Recuerda la definición de cosecante: $\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$. Demuestra que: $(\operatorname{cosec}(x))' = -\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$

30. Recuerda la definición de secante: $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$. Demuestra que: $(\sec(x))' = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}$

31. Recuerda la definición de cotangente: $\cotg(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$. Demuestra que: $(\cotg(x))' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}$

32. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 7\operatorname{sen}(x^7 - 7x^3)$ b) $y = 5\operatorname{sen}^5(4x^4 - 5x^5)$ c) $y = \operatorname{sen}^6(x) \cdot \cos^4(x)$ d) $y = \sqrt[3]{\operatorname{sen}^5(3x^4 + 5x^7)}$

33. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{sen} \frac{5 + 3e^{3x}}{5 - 3e^{3x}}$ b) $f(x) = (2x - 3x^2)\operatorname{ch}(5x - 7x^2)$ c) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{\sqrt{16 - 9\operatorname{sen}x}}{4 + 3\cos x}$ d) $f(x) = \frac{\operatorname{sh}x - 3x\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}x + 3x\operatorname{sh}x}$

34. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{\ln(\arccos 5x)}$ b) $f(x) = \operatorname{arcsen} \frac{2 - 7x^2}{2 + 7x^2}$ c) $f(x) = 5\arccos \frac{3\operatorname{sen}x + 5}{5 - 3\operatorname{sen}x}$ d) $f(x) = \operatorname{arcsen} \frac{5\cos x}{3\operatorname{sen}x + 2\cos x}$

35. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{arcsen}(7e^{2x-3})$ b) $y = \ln(\sqrt{5\operatorname{arcsen}(3x+2)})$ c) $y = \operatorname{arctg}(\ln \sqrt[3]{4x-5})$ d) $y = \operatorname{arcsen}(3\operatorname{tg}(5\operatorname{sen}(4x-2)))$

36. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{7+2\operatorname{sen}x}{7-2\operatorname{sen}x}}$ b) $y = e^{\operatorname{arcsen} \sqrt{2x-5}}$ c) $y = \cos(3\operatorname{arcsen} \frac{6x-1}{\sqrt{7-2x^2}})$ d) $y = \operatorname{arcsen} \frac{7x}{\sqrt{9-2x^2}}$

37. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \log(x^3 - 5x^5)^8$ b) $y = \log_2(8x^2 - 3x^3)^2$ c) $y = \ln \sqrt{\frac{(3x^6 - 7x^2)^4}{2x-1}}$ d) $y = \ln \sqrt[4]{(3x^3 + 5x^9)^7}$

38. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \cos(e^{x^5} + \ln(4x^3))$ b) $y = 7 \cot g^5(5x^3 - 3x^2)$ c) $y = \operatorname{sen}(\cos^2(\operatorname{tg}(7x^5 - 3x^3)^2))$ d) $y = \sqrt[3]{\operatorname{ch}(\operatorname{sh}(3x+2))^4}$

39. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{arg sh} \sqrt{5x^2 + 2}$ b) $y = \ln(\operatorname{arg th}(5x-3))$ c) $y = \operatorname{arg ch}(e^{3x-6})$ d) $y = \operatorname{arg sh}(\operatorname{arg th}(2x+1))$

Aplicaciones de la derivada

40. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$

Selectividad

41. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x}$

Selectividad

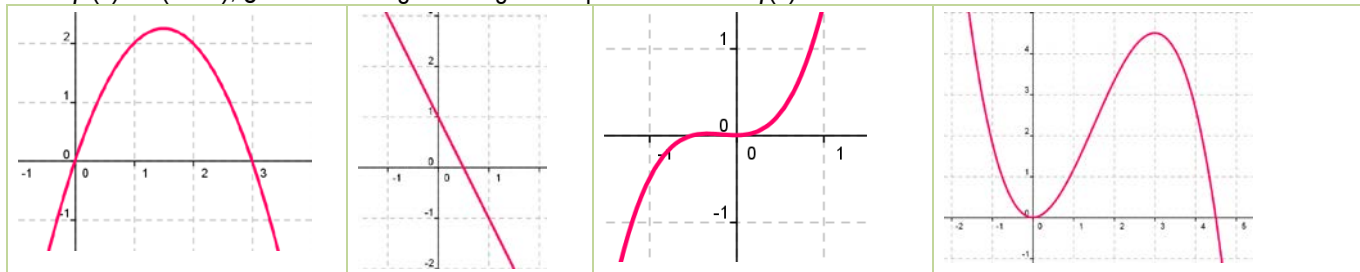
42. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3}$

Selectividad

43. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2x-e^x + \operatorname{sen}(3x)}{x^2}$

Selectividad

44. Si $f'(x) = x(3-x)$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de $f(x)$?



45. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 1/(x-2)^2$.

46. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = (x+3)/(x-4)$.

47. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$. Calcula sus máximos y mínimos y haz un esbozo de su gráfica.

48. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

49. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 6x$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

50. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 72x$ en el intervalo $[-5, 3]$ y en el intervalo $[1, 5]$.

51. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x+4|$ en el intervalo $[-4, 4]$.

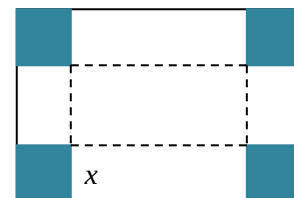
Problemas

52. El espacio recorrido, en metros, por un vehículo a los t segundos de pasar por un control de radar, viene dado por: $y = 8t + 0.3t^2$. ¿Qué velocidad llevaba al pasar por el control? ¿Y a los 3 segundos? Si continúa así, ¿en qué momento pasará de los 120 km/h?

53. Sabiendo que la aceleración es la derivada de la función velocidad, calcula la aceleración del vehículo del ejercicio anterior a los $t = 1$ segundos, y a los $t = 6$ segundos. ¿Cómo es la aceleración? ¿Es constante o variable?

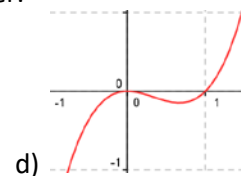
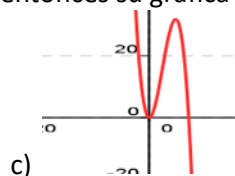
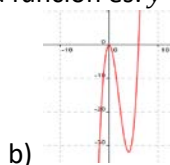
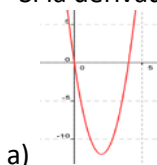
54. La distancia, d , en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Tierra a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 5t^2$. Si se cae un tornillo desde la primera plataforma de la Torre Eiffel, (que está a 57 m de altura), ¿a qué velocidad llegaría al suelo? ¿Y si cayera desde la segunda plataforma (que está a 115m)? ¿Y desde la tercera plataforma (que está a 274 m)?

55. Se ha lanzado desde la superficie de la Luna una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad de 24 m/s, y alcanza una altura $h = 24t - 0.8t^2$. A) Determina la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna. B) ¿Hasta qué altura llega la piedra? C) ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar dicha altura? D) ¿Durante cuánto tiempo permanece la piedra en el aire? E) Se deja caer ahora la piedra por una grieta y tarda 20 segundos en llegar al fondo, ¿qué profundidad tiene la grieta?
56. La distancia, d , en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Luna a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 0.83t^2$. ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caída libre en la Luna al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? En la Luna se está construyendo una antena de transmisión sobre una base de hormigón que puede agrietarse si cayera un tornillo con una velocidad de 20 m/s. Para garantizar que esto no ocurra, ¿cuál debe ser la altura de la antena?
57. La distancia, d , en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la superficie de Marte a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 1.86t^2$. ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caída libre en Marte al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? Determina la aceleración de la gravedad en Marte.
58. La distancia, d , en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la superficie de Júpiter a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 11.44t^2$. ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caída libre en Júpiter al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? Determina la aceleración de la gravedad en Júpiter.
59. La función $e = f(t)$ indica el espacio recorrido, e , en metros, por un cuerpo en el tiempo t (en segundos). Determina en cada caso la función velocidad y la función aceleración:
- $$e = t^2 - 4t + 3 \qquad e = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 3 \qquad e = -t^2 + 4t + 3 \qquad e = (3t - 4)^2$$
60. Un depósito cilíndrico de 10 metros de diámetro se llena de agua a 0.3 m^3 por minuto. ¿A qué velocidad varía la altura de agua a los 2 minutos? ¿Y a los 5 minutos?
61. Queremos construir cajas usando cartulinas rectangulares de 20 cm por 25 cm. Para ello se corta en cada esquina un cuadrado de lado x , y se dobla. ¿Qué valor debe tener el lado del cuadrado, x , recortado para que las cajas contengan un volumen máximo? Ayuda: Tendrás que escribir el volumen de las cajas en función de x .
62. Unos barriles para almacenar aceite son cilíndricos y tienen una capacidad de 200 litros. Si se desea construirlos de forma que su superficie lateral sea mínima, ¿cuánto debe medir su altura y el radio de su base?



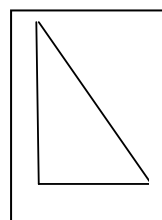
AUTOEVALUACIÓN

1. La función $\begin{cases} -bx & x \leq 1 \\ 3x^2 + d & x > 1 \end{cases}$ es continua y derivable en toda la recta real si:
 - a) $b = -6, d = 3$
 - b) $b = 3, d = -1$
 - c) $b = 6, d = -3$
 - d) $b = -3, d = 2$
2. Con los valores de b y d del apartado anterior verifica la función $\begin{cases} -bx & x \leq 1 \\ 3x^2 + d & x > 1 \end{cases}$ las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$, por lo que se anula la derivada en el punto de abscisa:
 - a) $x = -1,$
 - b) $x = 0$
 - c) $x = 1$
 - d) $x = 2$
3. Verifica la función $\begin{cases} -bx & x \leq 1 \\ 3x^2 + d & x > 1 \end{cases}$ las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 3]$ en el punto de abscisa:
 - a) $x = -3/8,$
 - b) $x = 7/6$
 - c) $x = 10/3$
 - d) $x = 5/3$
4. En cuál de los límites siguientes **no** se puede aplicar la regla de L'Hôpital:
 - a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$
 - b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 7x}{5x^2 + 2}$
 - c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$
 - d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$
5. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = \tan x^2 - 2x^3$ en $x = 0$ es:
 - a) $y = x$
 - b) $y = x + 8$
 - c) $y = 0$
 - d) $y = 2 + x$
6. La función $y = 3\sin x - 7x^3 + 3x^2 - x + 5$ en $x = 0$ es:
 - a) cóncava
 - b) tiene un punto de inflexión de tangente horizontal
 - c) convexa
 - d) tiene un punto de inflexión de tangente oblicua
7. La función $y = 3\sin x - 7x^3 + 3x^2 - x + 5$ en $x = 0$ es:
 - a) creciente
 - b) decreciente
 - c) alcanza un mínimo
 - d) alcanza un máximo
8. Si la derivada de una cierta función es: $y' = (x - 4)(x + 2)$ entonces los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función son:
 - a) $x < -2$, decreciente; $-2 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente
 - b) $x < -2$, decreciente; $-2 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente
 - c) $x < -2$, creciente; $-2 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente
 - d) $x < -2$, creciente; $-2 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente
9. La función $y = 3x^2 - 2x^3$ tiene un punto de inflexión en:
 - a) $x = 1/2$
 - b) $x = -1/2$
 - c) $x = 1$
 - d) $x = 0$
10. Si la derivada de una cierta función es: $y' = 3(x - 4)x$ entonces su gráfica puede ser:



PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD

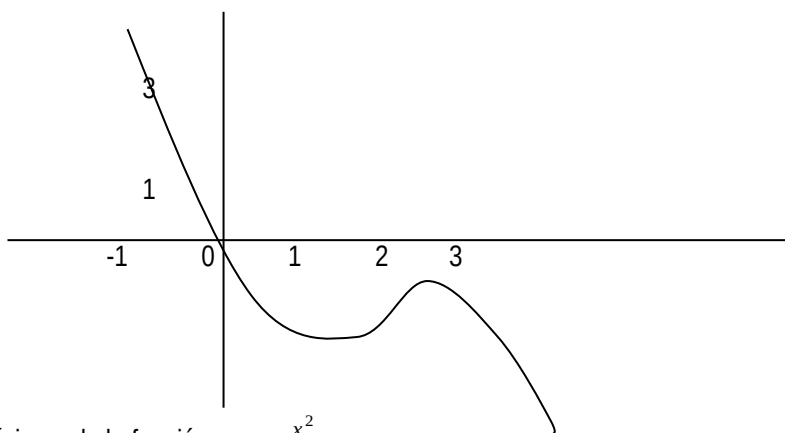
2. La rampa de un tobogán, de esos que descienden los niños en los parques infantiles, está fabricado empalmando dos tramos, dos piezas metálicas. ¿Qué precaución hay que tomar al empalmar las dos piezas para que el descenso no ofrezca dificultad a los niños?
3. Se sabe que un tal tobogán tiene un tramo recto en su parte alta y un segundo tramo curvo. El tramo recto es el segmento AB , donde $A(-3, 4)$ y $B(0, 1)$. El tramo curvo empieza en B y desciende hasta el suelo ($y = 0$) al que llega con tangente horizontal. Si este tramo curvo es una parábola $y = ax^2 + bx + c$, hallar ésta. Selectividad
4. Demuéstrese que si $f(x)$ es una función derivable en un punto $x = a$, entonces también es derivable en a la función $F(x) = f(x)^2$, y su derivada es $F'(a) = 2f(a) \cdot f'(a)$. (Se pide una demostración directa, no deberá recurrirse a resultados similares, como la derivada de un producto) Selectividad
5. Se sabe que $y = f(x)$ e $y = g(x)$ son dos curvas crecientes en $x = a$. Analícese si la curva $y = f(x) - g(x)$ ha de ser entonces creciente en $x = a$. (Si la respuesta es afirmativa, justifíquese; en caso contrario, dese un contraejemplo que lo confirme). Selectividad
6. Defina derivada de una función f en un punto a . Aplicando la definición de derivada, demostrar que, si f es derivable y periódica, de periodo T , entonces su derivada f' también es periódica de periodo T . Selectividad
7. En la figura se representa una escalera AB , cuyo extremo inferior A recorre el suelo (recta OA) y cuyo extremo superior B recorre una pared vertical (recta OB). La longitud de la escalera es $AB = 1$. El punto A se aleja de O con velocidad constante c . Se pide: a) Sin hacer ningún cálculo, indicar cuánto vale la velocidad de B en el momento en el que $OA = OB$. b) Hallar la velocidad v del punto B en función de la distancia x (OA) c) La velocidad con la que B llega al punto O . Selectividad



$$f'(0) = 0. \quad f'(x) > 0 \quad \text{para } -1 < x < 0 \quad f'(x) > 0 \quad \text{para } 0 < x < \frac{1}{2}$$

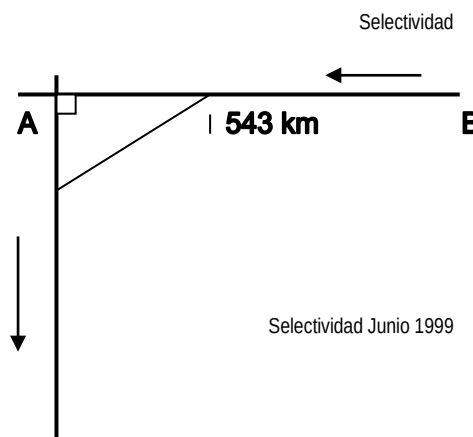
Señálense otras propiedades de la curva que se dibuje. Selectividad

9. Dos líneas férreas se cortan perpendicularmente. Por cada línea avanza una locomotora (de longitud despreciable) dirigiéndose ambas al punto de corte; sus velocidades son 60 km/h y 120 km/h y han salido simultáneamente de estaciones situadas, respectivamente a 40 y 30 km del punto de corte. a) Hallar la distancia a la que se encuentran las locomotoras, en función del tiempo que pasa desde que inician su recorrido. b) Hallar el valor mínimo de dicha distancia. Selectividad
10. La gráfica de la figura corresponde a la primera derivada de una función $f(x)$. ¿Qué puede decirse sobre los posibles máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$? Razonar la respuesta. Selectividad



11. Hallar los máximos y los mínimos de la función $y = e^{x^2}$. Selectividad
12. La aceleración de un móvil que describe una trayectoria rectilínea es (formulada en función del tiempo t) $a(t) = 4 - \frac{t}{8}$. Se sabe que para $t = 0$ el móvil está parado en la posición $x = 5$. a) ¿Para qué valores de t es 0 la velocidad del móvil? b) Hallar la variación de la velocidad en el intervalo de tiempo $[4, 8]$ y el espacio recorrido en ese intervalo. c) Hallar la función de posición de este móvil. Selectividad
13. Sea $f(x)$ la función definida por las expresiones $f(x) = \begin{cases} 3\sin x - \cos x & \text{si } x \geq 0 \\ mx + n & \text{si } x < 0 \end{cases}$. a) Calcular n para que $f(x)$ sea continua en el punto $x = 0$. b) Calcular m y n para que $f(x)$ sea derivable en el punto $x = 0$. Selectividad

14. Se considera una caja sin tapadera (consta de cuatro caras laterales y el fondo). Sabiendo que el fondo es un cuadrado y conociendo que el área total (de las cinco caras) es de 12 cm^2 , hallar sus dimensiones para que tenga la mayor capacidad posible. Selectividad
15. Se considera una ventana como la que se indica en la figura (La parte inferior es rectangular, la superior una semicircunferencia). El perímetro de la ventana mide 6 m. Hallar las dimensiones x e y para que la superficie de la ventana sea máxima. (Expresar los resultados en función de π) Selectividad
16. Estudiar la derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$. Selectividad
17. Sea la función $f(x) = \frac{Lx}{x}$. Estudiar el dominio, las asíntotas, los posibles puntos de máximo y mínimo y hacer un dibujo aproximado de la gráfica de la función. Selectividad
18. Sea la función $f(x) = (x - 1)e^x$. Representar la gráfica de la función $f(x)$ indicando monotonía, extremos, puntos de inflexión y ramas asíntóticas. Selectividad
19. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}$; sean a y b dos raíces de la derivada $f'(x)$ tales que entre ellas no hay ninguna otra raíz de $f'(x)$. Razonar debidamente si puede ocurrir cada una de las siguientes posibilidades:
- 1.- Entre a y b no existe ninguna raíz de $f(x)$
 - 2.- Entre a y b existe una sola raíz de $f(x)$
 - 3.- Entre a y b existen dos o más raíces de $f(x)$.
20. Sea la función $f(x) = x|x - 1|$. Se pide:
- a) Hacer un dibujo aproximado de la función.
 - b) Estudiar la derivabilidad de la función en $x = 1$.
21. Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de área máxima que puede inscribirse en una circunferencia de 12 cm de diámetro. Selectividad
22. Dos avionetas se encuentran situadas a las 9 de la mañana a una distancia de 543 kilómetros, en las posiciones que se indican en la figura. La avioneta A se mueve hacia el sur a una velocidad de 270 km/h, mientras que la avioneta B se dirige hacia el oeste (en dirección a A), a 300 km/h.
- a) (1 punto) Escribir las funciones que indican las posiciones de A y B en cada instante, así como la distancia entre ambas.
 - b) (1 punto) ¿A qué hora será mínima dicha distancia?
23. Se considera un triángulo isósceles cuya base (el lado desigual) mide 10 cm y cuya altura mide 6 cm. En él se inscribe un rectángulo, cuya base está situada sobre la base del triángulo.
- a) Expresar al área A de dicho rectángulo en función de la longitud x de su base.
 - b) Escribir el dominio de la función $A(x)$ y dibujar su gráfica.
 - c) Hallar el valor máximo de dicha función.
24. Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada cuya capacidad sea 8 dm^3 . Averiguar las dimensiones de la caja para que la superficie exterior sea mínima. Selectividad
25. Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} + 2 & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$. a) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua en $x = 0$? b) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea derivable en $x = 0$? c) Determinar sus asíntotas. Selectividad
26. Dados tres números cualesquiera r_1, r_2 y r_3 , hallar el número real x que minimiza la función $D(x) = (r_1 - x)^2 + (r_2 - x)^2 + (r_3 - x)^2$ Septiembre
27. Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$, y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$.
- a) Determinar a, b, c y d . b) ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos? Selectividad
28. a) Si es posible, dibujar de forma clara la gráfica de una función continua en el intervalo $[0, 4]$ que tenga al menos un máximo relativo en el punto $(2, 3)$ y un mínimo relativo en el punto $(3, 4)$
- b) Si la función fuese polinómica, ¿cuál ha de ser como mínimo su grado? Selectividad
29. Sea la función $f(x) = 2x + \sin x$
- a) Determinar si tiene asíntotas de algún tipo.
 - b) Estudiar su monotonía y la existencia de extremos relativos Selectividad



30. Sea la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$
 a) Determinar los puntos de corte de su gráfica con los ejes y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
 b) Esbozar la gráfica de la función
31. Sea la función real de variable real definida por

Selectividad

$$f(x) = \begin{cases} (2-x)^3 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) Razonar si la función es continua en toda la recta real.
 b) Razonar si f es derivable en toda la recta real.
32. a) Determinar los extremos relativos de la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$. Dibujar su gráfica. b) Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto $P(3, -5)$.
33. Sea $P(x)$ un polinomio de grado 4 tal que:
 i) $P(x)$ es una función par.
 ii) Dos de sus raíces son $x = 1, x = \sqrt{5}$
 iii) $P(0) = 5$

Selectividad

Selectividad

Se pide: Hallar sus puntos de inflexión. Dibujar su gráfica.

Selectividad

34. Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$. Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abscisa positiva de la gráfica de f .

Selectividad: Junio 02. Opción A

35. Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$. A) Estudiar su continuidad y su derivabilidad. B) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(3, 1)$.

Selectividad

36. Sea $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos sus puntos y tal que: $f(0) = 1$; $f(1) = 2$; $f'(0) = 3$; $f'(1) = 4$. Se pide: a) Calcular $g'(0)$, siendo $g(x) = f(x+f(0))$. B) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$.

Selectividad

37. Determinar los valores de las constantes A, B, C y D para los cuales la gráfica de la función real de variable real $f(x) = A \sin x + Bx^2 + Cx + D$ tiene tangente horizontal en el punto $(0, 4)$ y además su derivada segunda es $f''(x) = 3 \sin x - 10$.

Selectividad

38. Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$. Se pide:

- a) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas
 b) Hallar los puntos donde la gráfica de f tiene tangente horizontal
 c) Representar gráficamente la función

Selectividad

Nota: Para obtener las asíntotas puede utilizarse la igualdad: $A - B = \frac{A^3 - B^3}{A^2 + AB + B^2}$

39. a) Dibujar la gráfica de la función $g(x) = e^x - x$. b) Calcular el dominio de definición de $f(x) = \frac{1}{e^x - x}$ y su comportamiento cuando x tiende a ∞ y cuando tiende a $-\infty$. Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en su dominio de definición.

Selectividad

40. Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, se pide:

- a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$, donde $0 < a < 1$.
 b) Halla los puntos A y B en la que la recta hallada en el apartado a) corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.
 c) Determina el valor de $a \in (0, 1)$ para el cual la distancia entre el punto A y el punto $P(a, f(a))$ es el doble de la distancia entre el punto B y el punto $P(a, f(a))$

Selectividad

41. Sea la función $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$. A) Halla sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas. B) Dibuja la gráfica de

la función utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además que f tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abscisas son $x_1 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{-1}{2}$, $x_3 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, respectivamente.

Selectividad:

42. Se considera la función $f(x) = \ln(1 + x^2)$, donde $\ln$ significa Logaritmo Neperiano. A) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad. B) Dibuja la gráfica de f . C) Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en sus puntos de inflexión. Selectividad
43. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$ se pide: a) Halla la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$. B) Halla los puntos de corte de la recta tangente del apartado a) con los ejes de coordenadas. C) Halla el valor de $a > 0$ que hace que la distancia entre los dos puntos hallados en el apartado b) sea mínima. Selectividad
44. Se considera la función $f(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$. Calcula los extremos locales y globales de la función $f(x)$. Selectividad
45. Dada la función: $f(x) = \frac{-4x}{(1 + x^2)^2}$. Halla sus máximos y mínimos locales y/o globales. Selectividad
46. a) Halla el punto P en el que se cortan las gráficas de las funciones: $f(x) = \frac{2}{x}$ $g(x) = +\sqrt{x^2 - 3}$. b) Halla las ecuaciones de las rectas tangentes en el punto P a cada una de las curvas anteriores y demuestra que son perpendiculares. Selectividad
47. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas. Selectividad
48. Estudia y representa gráficamente la función $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ Selectividad
49. a) Calcular los valores de a y b para que la función: $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a \cos x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$ sea continua para todo valor de x .
Estudia la derivabilidad de $f(x)$ para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior. Selectividad
50. Dada la función $f(x) = xe^{2x}$, se pide dibujar su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Selectividad
51. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \frac{|x|}{2-x}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas. Selectividad
52. Halla los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función: $f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$. Selectividad
53. Sea $g(x)$ una función continua y derivable para todo valor real de x , de la que se conoce la siguiente información:
i) $g'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, mientras que $g'(x) < 0$ para todo $x \in (0, 2)$
ii) $g''(x) > 0$ para todo $x \in (1, 3)$ y $g''(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.
iii) $g(-1) = 0$, $g(0) = 2$, $g(2) = 1$.
iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$.
Teniendo en cuenta estos datos se pide:
a) Analiza razonadamente la posible existencia o no existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.
b) Dibuja de manera esquemática la gráfica de la función $g(x)$. Selectividad
54. Se considera la función $f(x) = \frac{x}{e^x}$. a) Halla sus asíntotas y sus extremos locales. b) Calcula los puntos de inflexión de $f(x)$ y dibuja la gráfica de $f(x)$. Selectividad
55. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } |x| < 2 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}$ Se pide: Calcula a y b para que f sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Selectividad
56. Obtén los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:
 $f(x) = x(\ln(x))^2$, siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x . Selectividad
57. Dada la función $f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$. Se pide:
Dibuja la gráfica de f , estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas. Selectividad

58. Sea: $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{4} & \text{si } x < \frac{3}{2} \\ \frac{7}{12}(1 - (x-2)^2) & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$. A) Estudia la continuidad y derivabilidad de $f(x)$. B) Halla los máximos y mínimos locales de $f(x)$. C) Dibuja la gráfica de $f(x)$.

Selectividad

59. Si la derivada de la función $f(x)$ es: $f'(x) = (x-1)^3(x-5)$, obtén:

- a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
b) Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión.
c) La función f sabiendo que $f(0) = 0$.

Selectividad

60. Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} & \text{si } 1+ax > 0 \text{ y } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$ se pide: a) Halla los valores de los parámetros a y

b para los cuales la función f es continua en $x = 0$. b) Para $a = b = 1$, estudia si la función f es derivable en $x = 0$ aplicando la definición de derivada.

Selectividad

61. a) Dada la función $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, halla el punto o los puntos de la gráfica de $f(x)$ en los que la pendiente de la recta tangente sea 1. b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 0$. c) Sea g una función derivable con derivada continua en toda la recta real, y tal que $g(0) = 0$, $g(2) = 2$. Demuestra que existe al menos un punto c en el intervalo $(0, 2)$ tal que $g'(c) = 1$.

Selectividad

62. Dada la función: $f(x) = x^3 - x$. a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto $(-1, f(-1))$. B) Determina los puntos de intersección de la recta hallada en el apartado anterior con la gráfica de f .

Selectividad

63. Dada la función $f(x) = e^x + a e^{-x}$, siendo a un número real, estudia los siguientes apartados en función de a : a) Halla los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f . b) Estudia para qué valor, o valores, de a la función tiene alguna asíntota horizontal.

Selectividad

64. Dada la función $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$. Se pide: a) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.

b) Halla los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$. c) Halla las asíntotas y dibuja la gráfica de $f(x)$.

Selectividad

65. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} \ln x}{2^x} & \text{si } x > 0 \text{ (ln significa logaritmo neperiano de } x) \\ x+k & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$, se pide: a) Determina el valor de k

para que la función sea continua en $\mathbb{R}$. b) Halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas. c) Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Selectividad

66. Dada la función: $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 3)$, donde $\ln$ significa logaritmo neperiano de x , se pide:

a) Determina el dominio de definición de $f(x)$ y las asíntotas verticales de su gráfica.

b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Selectividad

67. Los puntos $P(1, 2, 1)$, $Q(2, 1, 1)$ y $A(a, 0, 0)$ con $a > 3$, determinan un plano π que corta a los semiejes positivos de OY y OZ en los puntos B y C respectivamente. Calcula el valor de a para que el tetraedro determinado por los puntos A , B , C y el origen de coordenadas tenga volumen mínimo.

Selectividad

68. Dada la función $f(x) = \frac{3x^2+5x-20}{x+5}$, se pide a) Estudia y obtén las asíntotas. b) Estudia los intervalos de concavidad y convexidad. c) Representa gráficamente la función.

Selectividad

69. Dada la función $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$, se pide: Obtén, si existen, los máximos y mínimos relativos y las asíntotas de f .

Selectividad

70. Halla los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = \sqrt{12-3x^2}$

Selectividad

71. Demuestra que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ sólo tiene una raíz real cualquiera que sea el número m . Justifica la respuesta indicando qué teoremas usas.

Selectividad

72. Dada la función $f(x) = \frac{ax^4+1}{x^3}$, se pide: a) Determina el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en

$x = 1$. Para ese valor de a , obtén los otros puntos en que f tiene un extremo relativo. b) Obtén las asíntotas de la gráfica de $y = f(x)$ para $a = 1$. c) Esboza la gráfica de la función para $a = 1$.

Selectividad

73. Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 + x - 7}{x + 3}$, se pide: a) Halla las asíntotas de la gráfica de la función $y = f(x)$. b) Halla los intervalos donde f crece y aquellos en que f decrece. Determina todos los máximos y mínimos locales. c) Esboza la gráfica de $y = f(x)$ a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. Selectividad
74. Hallar el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 9x + 14}$. Hallar el conjunto de puntos en los que la función f tiene derivada Selectividad
75. Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, obtener los valores de a , b y c de modo que se verifiquen las condiciones siguientes: El polinomio $P(x)$ tenga extremos relativos en los puntos de abscisas $x = -1/3$, $x = -1$. La recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto $(0; P(0))$ sea $y = x + 3$. Selectividad
76. Hallar a ; b ; c de modo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alcance en $x = 1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x = 3$ un punto de inflexión. Selectividad
77. Dadas las funciones $f(x) = \frac{3x + \ln(x+1)}{\sqrt{x^2 - 3}}$, $g(x) = (\ln x)^x$, $h(x) = \sin(\pi - x)$ se pide: a) Hallar el dominio de $f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. b) Calcular $g'(e)$. c) Calcular, en el intervalo $(0; 2\pi)$, las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas y las coordenadas de los extremos relativos de $h(x)$. Selectividad
78. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3x + A & \text{si } x \leq 3 \\ -4 + 10x - x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$, se pide a) Halla el valor de A para que $f(x)$ sea continua. ¿Es derivable para ese valor de A ? b) Halla los puntos en los que $f'(x) = 0$. c) Halla el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $[4, 8]$. Selectividad
79. Dada la función $f(x) = x^2 \sin x$, se pide:
a) Determina, justificando tu respuesta, si la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo abierto $(\pi/2, \pi)$.
b) Obtén la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(\pi, f(\pi))$. Selectividad
Recuérdese que la recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.
80. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 3x}{x - 1} & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$; se pide: a) Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$.
b) Para ese valor de a , estudiar la derivabilidad de f en $x = 0$. c) Hallar, si las tiene, las asíntotas de la gráfica $y = f(x)$. Selectividad
81. Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$, se pide: a) Halla las asíntotas de su gráfica. b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$. Selectividad
82. Dada la función $f(x) = 2 \cos^2 x$ se pide: a) Determinar los extremos absolutos de $f(x)$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. b) Determinar los puntos de inflexión de $f(x)$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ Selectividad
83. Dada la función $f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2}$, se pide: a) Halla las asíntotas de su gráfica. b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcula sus puntos de inflexión. c) Esboza la gráfica de la función. Selectividad
84. Dada la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, se pide: Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$. Selectividad:
85. Dada la función $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, se pide: a) Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y estudia la existencia de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. b) Esboza la gráfica de $y = f(x)$ determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus asíntotas. Selectividad

86. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+6}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2-1}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, se pide: a) Estudiar su continuidad. b) Estudiar la existencia de asíntotas de su gráfica y, en su caso, calcularlas. c) Hallar los extremos relativos y esbozar de su gráfica. Selectividad:
87. a) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable. Sabiendo que el punto de abscisa $x = -2$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ y que la recta de ecuación $y = 16x + 16$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en dicho punto, determina: $f(-2)$; $f'(-2)$ y $f''(-2)$. Selectividad
88. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4}$, se pide: a) Determina el dominio de f y sus asíntotas. b) Calcula $f'(x)$ y determina los extremos relativos de $f(x)$. Selectividad
89. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{5\sin x}{2x} + \frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ xe^x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, se pide: a) Hallar, si existe, el valor de a para que $f(x)$ sea continua. b) Decidir si la función es derivable en $x = 0$ para algún valor de a . Selectividad