

Unidade 07 – Probabilidade

Teorema das Probabilidades Totais e Teorema de Bayes

Dicimos que os sucesos A_1, A_2, \dots, A_n forman un sistema completo de sucesos se cumpren:

- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ (a súa unión é todo o espazo muestral)
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ con $i \neq j$ (son sucesos mutuamente incompatibles)

➤ **TEOREMA DAS PROBABILIDADES TOTAIS:**

Se os sucesos A_1, A_2, \dots, A_n forman un sistema completo de sucesos, entón a probabilidade dun suceso B poderá expresarse da forma:

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B|A_n) \cdot P(A_n)$$

Exemplo:

Consideremos o experimento consistente en extraer dúas bolas sen reempazamento dunha bolsa onde hai 5 bolas brancas e 5 bolas negras. Se consideramos o suceso B_1 ="sacar bola branca na primeira extracción", entón os sucesos B_1 e o seu complementario N_1 forman un sistema completo de sucesos. Así pois, poderemos utilizar o teorema das probabilidades totais para calcular la probabilidade do suceso B_2 ="sacar bola branca na segunda extracción"

$$P(B_2) = P(B_2/B_1) \cdot P(B_1) + P(B_2/N_1) \cdot P(N_1) = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{10} + \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

➤ **TEOREMA DE BAYES**

Se os sucesos A_1, A_2, \dots, A_n forman un sistema completo de sucesos e B outro suceso do cal sabemos a súa probabilidade (polo Teorema das Probabilidades Totais), entón:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B|A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B|A_n) \cdot P(A_n)}$$

Exemplo:

A partires do exemplo anterior calcula a probabilidade de sacar bola negra na primeira extracción sabendo que saíu branca na segunda extracción, é dicir; calcula $P(N_1/B_2)$:

$$P(N_1/B_2) = \frac{P(B_2/N_1) \cdot P(N_1)}{P(B_2)} = \frac{P(B_2/N_1) \cdot P(N_1)}{P(B_2/B_1) \cdot P(B_1) + P(B_2/N_1) \cdot P(N_1)} = \frac{\frac{5}{9} \cdot \frac{5}{10}}{\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{10} + \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{10}} = \frac{5}{9}$$

EXERCICIOS:

01.- Dispense de tres caixas con bombillas. A primeira contén 10 bombillas, das cales hai catro fundidas; na segunda hai seis bombillas, estando unha delas fundida, e na terceira caixa hai tres bombillas fundidas dun total de oito. ¿Cal é a probabilidade de que ao tomar unha bombilla ao chou dunha calquera deas caixas, esté fundida? Se sabemos que a bombilla está fundida ¿cal é a probabilidade de que dita bombilla sexa dea terceira caixa?

02.- O 20% dos empregados dunha empresa son enxeñeiros e outro 20% son economistas. O 75% dos enxeñeiros ocupan un posto directivo e o 50% dos economistas tamén, mentres que nos postos que non son nin enxeñeiros nin economistas soamente o 20% ocupa un posto directivo. ¿Cal é a probabilidade de que un empregado elixido ao chou sexa posto directivo? Se eliximos ao chou a un empregado e sabemos que é cargo directivo ¿cal é a probabilidade de que sexa enxeñeiro?

03.- A probabilidade de que haxa un accidente nunha fábrica que dispón de alarma é 0.1. A probabilidade de que sone esta si se producira nalgún incidente é de 0.97 e a probabilidade de que sone se non sucedeu ningún incidente é 0.02. No suposto de que funcionara a alarma, ¿cal é a probabilidade de que non houbera ningún incidente?

04.- Sábese que o 65% dos accidentes de tráfico que se producen durante a noite dos sábados se deben á inxesta excesiva de alcohol, o 25% débense á imprudencia do condutor e o resto a outras causas, (fallo mecánico...etc.). Nestes accidentes, o resultado é nefasto o 30% das veces no primeiro caso, o 20% no segundo e o 5% no terceiro.

- a) Calcular a probabilidade de que un destes accidentes non teña resultado nefasto.
- b) Se se produce un accidente sen resultado nefasto, calcular a probabilidade de que a causa de dito accidente sexa á inxesta excesiva de alcohol. (Exercicio PAU)

05.- Una librería ten tres estantes: superior, central e inferior. No estante superior hai 3 novelas e 7 contos. No estante central hai 8 novelas e 6 contos. No estante inferior hai 5 novelas e 9 contos. Escóllese un estante ao chou e se saca del un libro. Se resulta que é unha novela, ¿cal é a probabilidade de que se sacara do estante central?