

## 1 - Experimentos aleatorios e sucesos

Un experimento é **aleatorio** cando:

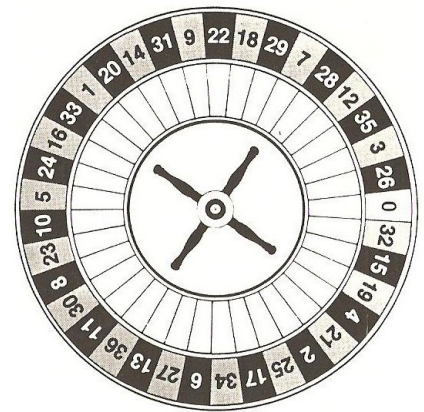
- Obsérvase ou mídese unha variable (ou máis)
- Realizado en condicións iguais ten un resultado variable que depende do azar.

Se obtemos o mesmo resultado baixo condicións iguais, o experimento é **determinista**.

**Espazo mostral (E):** é o conxunto de resultados posibles do experimento aleatorio. Cada elemento do espazo mostral é un **suceso elemental** (tamén chamado sucesos simple )

**Ex 1** Obtén o espazo mostral que describe cada experimento, un sucesos que pertenza a ese espazo mostral e outro que non pertenza

- a) O lanzamento de un dado
- b) O lanzamento de dúas moedas
- c) A suma resultante do lanzamento de dous dados
- d) Un lance de ruleta europea
- e) Número de caras en 5 lanzamentos de moeda
- f) Rompemos un espagueti crú de 30 cm de lonxitude en 2 anacos e medimos a lonxitude do anaco máis longo



Para describir o espazo mostral dun experimento aleatorio podemos usar outras ferramentas como diagramas en árbore, diagramas de Venn, táboas simples ou de dobre entrada, etc.

**Suceso (A):** calquera subconxunto do espazo mostral E. Está formado por sucesos simples do espazo mostral.

**Suceso composto:** contén máis dun resultado posible. É un subconxunto do espazo mostral E

**Ex 2** Obtén o conxunto que describe ao sucesos A correspondente a cada espazo mostral do exercicio anterior:

- |  |  |
|--|--|
| a) $A = \text{"Sae un valor menor que 4"}$ | d) $A = \text{"Sae un valor impar"}$         |
| b) $A = \text{"Saen valores diferentes"}$  | e) $A = \text{"Sae exactamente 1 cara"}$     |
| c) $A = \text{"Sae un valor maior que 6"}$ | f) $A = \text{"O anaco mide máis de 25 cm"}$ |

### Algúns sucesos particulares son:

**Suceso imposible:** é o resultado que non pode ocorrer nunca, está formado por cero sucesos simples e se representa como o conxunto baleiro:  $A = \emptyset$ .

Lanzamento de un dado:  $A = \text{"sae un número maior que 10"}$

Lanzamento de dous dados:  $A = \text{"a suma é 1"}$

**Suceso seguro:** é un sucesos que ocorre sempre, os resultados que o forman son E:

Lanzamento de un dado:  $A = \text{"sae un número par ou impar"}$

Lanzamento de dous dados:  $A = \text{"a suma é maior que 1"}$

**Suceso complementario** ou **contrario de A**: está formado polos posibles resultados do experimento aleatorio que non son de A. Denótase por  $\bar{A}$

Lanz. de un dado:  $A = \text{"sae un número menor que 3"} \rightarrow \bar{A} = \text{"sae un número maior ou igual a 3"}$

Lanz. de dous dados:  $A = \text{"a suma é número par"} \rightarrow \bar{A} = \text{"a suma é número impar"}$

Estudo médico:  $A = \text{"O paciente é fumador E sufriu infarto"} \rightarrow$   
 $\bar{A} = \text{"O paciente non é fumador OU non sufriu infarto"}$

**Ex 3** Consideramos ás familias con tres fillos e os sucesos  $A = \text{"polo menos 2 fillos son varóns"}$  e  $B = \text{"a familia ten fillos de ambos sexos"}$ . Utiliza un diagrama de árbore para obter o espazo mostral e os sucesos  $A, B, \bar{A}, \bar{B}$

**Ex 4** Nunha baralla española (40 cartas) realizamos o experimento de extraer unha carta. Se  $A = \text{"Sae unha figura"}$  e  $B = \text{"Saen bastos"}$ , describe os sucesos  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$ . Podes usar unha táboa para representar o espazo mostral.

## 2 - Operacións e relacións entre sucesos

Como os sucesos dun experimento aleatorio son subconxuntos dun conxunto maior (o espazo mostral) podemos usar a notación e realizar operacións propias desta parte das matemáticas:

**Inclusión:**  $A \subset B \Leftrightarrow$  todo elemento de A tamén está en B (o contrario non ten porque cumprirse)

Escollemos un número ao azar:  $A = \text{"O n° remata en cero"}; B = \text{"O n° é par"}$

Escollemos un votante en Galicia:  $A = \text{"O votante é de Fisterra"}; B = \text{"O votante é da provincia de Coruña"}$

**Unión:**  $A \cup B =$  conxunto que contén a todos os elementos de A e todos os elementos de B

Escollemos unha persoa ao azar:  $A = \text{"A persoa é muller"}; B = \text{"A persoa consume alcohol"}$

$A \cup B = \text{"A persoa é muller OU consume alcohol"}$

**Intersección:**  $A \cap B =$  conxunto que contén a todos os elementos que son á vez de A e de B

$A \cap B = \text{"A persoa é muller E consume alcohol"}$

**Diferencia:**  $A - B =$  conxunto que contén a todos os elementos de A que non están á vez en B

$A - B = \text{"A persoa é muller E NON consume alcohol"}$

**Sucesos incompatibles:** Dous sucesos son incompatibles cando é imposible que sucedan á vez, é dicir, cando o resultado do experimento aleatorio non pode ser simultaneamente de A e de B. Entón podemos escribir que  $A \cap B = \emptyset$

$\text{"A persoa consume alcohol E NON consume alcohol"} = \emptyset$

**Leis de Morgan:** permiten obter os complementarios da unión e da intersección:  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$  e  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

**Ex 5** Nos exercicios 3 e 4, describe os sucesos  $A \cup B, A \cap B$  e  $A - B$ , e determina cantos elementos forman cada conxunto. ¿Son A e B incompatibles?

**Ex 6** Unha baralla de póker ten 52 cartas repartidas en 4 paus (Pica, Corazón, Diamante e Trevo) e 13 valores (números de 1 a 10, ademais de tres figuras: J(ack), Q(een) e K(ing). Extraemos unha carta ao azar. Razoar se os sucesos A, B, C e D son compatibles ou incompatibles:

$A = \text{"Sacar un As"} \quad B = \text{"Sacar unha Pica"} \quad C = \text{"Sacar unha raíña Q"} \quad D = \text{"Sacar unha figura"}$

### 3 - Probabilidade. Lei dos grandes números

A probabilidade dun suceso pretende xeneralizar o concepto de frecuencia relativa do mesmo. Se a frecuencia absoluta dun suceso é  $f(A)$ , a frecuencia relativa é  $h(A) = \frac{f(A)}{n}$ , onde  $n$  é o número de veces que repetimos o experimento.

**Lei dos grandes números:** Defínese a probabilidade dun suceso como o límite da súa frecuencia relativa cando o  $n^\circ$  de experimentos realizados é tan grande que se achega a infinito:  $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(A)$ .

**Regra de Laplace:** nos casos mais simples pode calcularse a probabilidade usando a Regra de Laplace:

Se os sucesos do espazo mostral son equiprobables (todos teñen a mesma probabilidade de suceder), entón

$$P(A) = \frac{\text{número de sucesos de } A}{\text{número de sucesos de } E} = \frac{\text{casos favorables a } A}{\text{casos posibles}} \quad (\text{Regra de Laplace, sec XVIII})$$

**Definición axiomática de Kolmogorov (1933):** chámase probabilidade a calquera función  $P$  que lle asigna a cada suceso  $A$  dun experimento aleatorio, un número real  $P(A)$  cós propiedades seguintes: (axiomas de Kolmogorov)

(1) Para calquera suceso  $A$ ,  $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) A probabilidade dun suceso seguro é 1, ie,  $P(E) = 1$

(3) Se temos dous sucesos  $A$  e  $B$  incompatibles, ie,  $A \cap B = \emptyset$ , entón  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Os sucesos elementais dun espazo mostral sempre son incompatibles entre sí.

**Propiedades da probabilidade:** da definición de probabilidade dedúcese:

(1) Para calquera suceso  $A$ , a probabilidade do suceso contrario é  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

(2) A probabilidade dun suceso imposible é cero:  $P(\emptyset) = 0$

(3) Se  $A \subset B \Leftrightarrow P(A) \leq P(B)$

(4) Se temos dous sucesos  $A$  e  $B$ , entón  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(5)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

**Ex 7** No lanzamento dun dado, obtén (como conxunto) o suceso contrario de:

a) Obter un número par

d) Obter 4 ou 6

b) Obter máis de 3

e) Obter menos de 7

c) Obter un número primo

f) Obter máis de 7

**Ex 8** Dispoñemos dunha baralla de 40 cartas. Sexan os sucesos  $A =$  "Sacar ouro" e  $B =$  "Sacar unha figura". Calcula a probabilidade de  $S =$  "obter un ouro ou unha figura" ao extraer unha carta da baralla

**Ex 9** Nunha poboación da costa atlántica, se  $A =$  "Ter ollos verdes" e  $B =$  "Ter pelo moreno", sabemos que  $P(A) = 0,3$ ,  $P(B) = 0,6$  e  $P(A \cap B) = 0,2$ . Obtén a probabilidade de  $\bar{A}$ ,  $A \cup B$  e  $A - B$  e describe á poboación correspondente a cada conxunto

**Ex 10** Escollemos un número natural ao azar entre 1 e 10. Sexa o suceso  $A =$  "o número elixido é par",  $B =$  "o número elixido é primo" e  $C =$  "o número elixido é múltiplo de 3". Expresa como conxuntos os sucesos  $A$ ,  $B$  e  $C$  e calcula as súas probabilidades.

**Ex 11** Lánzanse ao aire dous dados. Representa o espazo mostral e calcula:

- a) Probabilidade de nos dados saian un 1 e un 6
- b) Probabilidade de nos dados saian dous cincos
- c) Probabilidade de saia un cinco
- d) Probabilidade de saian números diferentes
- e) Probabilidade de que a suma sexa 4
- f) Probabilidade de que a suma sexa 7
- g) Probabilidade de que a suma sexa maior que 5
- h) Probabilidade de que o valor abs. da diferenza sexa 1

**Ex 12** Extraemos aleatoriamente unha bóla dunha bolsa na que hai 3 bólas Verdes, 2 bólas Brancas e 4 bólas Laranxas. Obtén a probabilidade dos sucesos:

- a)  $A = \text{"sae bóla verde"}$
- b)  $B = \text{"non sae bóla laranxa"}$
- c)  $C = \text{"sae bóla branca ou laranxa"}$

**Ex 13** Unha moeda lánzase ao aire tres veces. Constrúe o espazo mostral  $E$  e expresa en función dos resultados elementais os seguintes sucesos e a súa probabilidade:

- a) Polo menos dúas veces sae cara.
- b) Exactamente dúas veces sae cara.
- c) Non sae ningunha cara
- d) Sae o mesmo resultado nos tres lanzamentos.
- e) Sae o mesmo resultado dúas veces exactamente.

#### 4 - Probabilidade condicionada. Dependencia e independencia de sucesos.

Ao estudar algúns experimentos aleatorios podemos interesarnos pola probabilidade dun certo suceso  $A$  cando sabemos con certeza que tamén ocorre o suceso  $B$ :

*Exemplo 1:* no lanzamento de dous dados, a probabilidade de  $A = \text{"sacar (6,6)"}$  é  $\frac{1}{36}$ , pero se agora temos garantido que vai ocorrer o suceso  $B = \text{"sae o mesmo valor nos dous dados"}$  entón a probabilidade é  $\frac{1}{6}$

*Exemplo 2:* Escollemos un número enteiro ao azar entre 1 e 25. A probabilidade de  $A = \text{"sae primo"}$  é  $\frac{8}{25}$ , pero se sabemos que ocorre o suceso  $B = \text{"o número é impar"}$  entón a probabilidade de que saia primo é  $\frac{8}{13}$

Definimos a **probabilidade de  $A$  condicionada a  $B$**  como  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ , sempre que  $P(B) \neq 0$

Desta forma podemos obter a probabilidade da intersección de dous sucesos, coa chamada "regra do produto"  
 $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$  ou equivalentemente  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

**Sucesos independentes:** no caso en que a ocorrencia do suceso  $B$  non inflúa na ocorrencia do suceso  $A$ , podemos afirmar que  $P(A|B) = P(A)$ . Entón diremos que os sucesos  $A$  e  $B$  **son independentes** e a probabilidade da súa intersección queda como  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ . En caso contrario diremos que os sucesos son dependentes.

Estas propiedades permiten obter facilmente a probabilidade en **experimentos aleatorios compostos**, consistentes na realización sucesiva de experimentos simples tendo en conta se os resultados dun experimento previo inflúen no seguinte ou non.

**Ex 14** Un home e unha muller da mesma idade casan aos 20 anos. As probabilidades de que cheguen aos 70 anos son 0,76 para o home e 0,82 para a muller. Cal é a probabilidade de que aos 70 anos:

- a) Ambos estean vivos
- b) Viva polo menos un dos dous
- c) Non viva ningún dos dous
- d) Viva soamente a muller

**Ex 15** Nunha lotería con 250 boletos sortéanse un móbil e unha tablet. Se Antonio ten 10 boletos, calcular:

- a) a probabilidade de que polo menos lle toque un premio    b) a probabilidade de que lle toquen os dous premios

**Ex 16** Unha bolsa contén 10 bólas brancas e 5 verdes. Extraemos á vez dúas bólas ao azar. Calcular a probabilidade de que:

- a) as dúas sexan brancas                      b) sexa unha de cada cor                      c) sexan da mesma cor

**Ex 17** Dunha baralla de 40 cartas extraemos dúas simultaneamente ao azar. Calcular a a probabilidade de que:

- a) as dúas sexan de ouros                      b) as dúas sexan ases                      c) polo menos unha delas sexa de ouros

**Ex 18** Dunha furna con tres bólas brancas e dúas bólas negras fanse dúas extraccións sen reempazamento. Calcular:

- a)  $P(\text{dúas bólas sexan da mesma cor})$                       b)  $P(\text{polo menos unha bóla é branca})$   
c)  $P(\text{só unha bóla é branca})$                       d)  $P(\text{unha bóla de cada cor})$

**Ex 19** Obtén a probabilidade de que ao extraer sucesivamente dúas cartas dunha baralla de 40, saian dous ases:

- a) Sen devolver á baralla a primeira carta extraída                      b) Devolvéndoa antes da segunda extracción.

**Ex 20** Dos 500 estudantes dun centro escolar, 400 son morenos. Das 320 mulleres do centro, tan só 240 son morenas. Tómase un estudante do centro ao azar. Pídese:

- a) Probabilidade de que sexa home                      b) Probabilidade de que sexa un home moreno  
c) Se sabemos que é muller, probabilidade de que non sexa morena

**Ex 21** En certa cidade o 40% da poboación ten cabelos castaños, o 25% ten os ollos castaños e o 15% ten os cabelos e os ollos castaños. Escóllese unha persoa ao azar.

- a) Se ten cabelos castaños, cal é a probabilidade de que tamén teña os ollos castaños?  
b) Se ten os ollos castaños, cal é a probabilidade de que non teña cabelos castaños?  
c) Cal é a probabilidade de que non teña nin cabelos nin ollos castaños?  
d) Cal é a probabilidade de que os seus cabelos sexan castaños e os seus ollos non sexan castaños?

**Ex 22** un concello o 35% dos censados vota ao Partido Vermello, o 45% ao Partido Azul e o 20% abstense. Sábese, ademais, que o 20% dos votantes do Partido Vermello, o 30% dos do Partido Azul e o 15% dos que se absteñen, son maiores de 60 anos. Calcula:

- a) Probabilidade de que un cidadán censado, elixido o azar, sexa maior de 60 anos.  
b) Se ese cidadán é maior de 60 anos, cal é a probabilidade de que abstivera nas eleccións?

**Ex 23** En certo país onde a enfermidade X é endémica, sabemos que un 12% da poboación padece esta enfermidade. Dispónse dunha proba para detectala pero non é moi fiable xa que dá positiva no 90% dos casos de persoas realmente enfermas, pero tamén dá positiva no 5% das persoas sas. Cal é a probabilidade de que estea sa unha persoa para a cal a proba deu positiva?

**Ex 24** Unha enfermidade pode ser producida indistintamente por tres virus A, B e C. Nun laboratorio téñense dous tubos de ensaio con virus A, dous tubos con virus B e cinco tubos con virus C. A probabilidade de que o virus A

produza a enfermidade é  $\frac{1}{3}$ , que B a produza é  $\frac{2}{3}$  e que C a produza é  $\frac{1}{7}$ . Elíxese o azar un tubo e inocúlase ese virus a un animal.

a) Obtén a probabilidade de que o animal contraia a enfermidade.

b) Se o animal contrae a enfermidade, cal é a probabilidade de que o virus que se inoculou fóra do tipo C?