

1 - Definicións

1.1.- A pendente m

Mide a inclinación de dous puntos do plano, dun segmento, dunha recta, dun ángulo respecto da horizontal, etc.

- O incremento ou diferenza dunha variable V é $\Delta V = V_{\text{final}} - V_{\text{inicial}}$
- A pendente entre $A=(a_1, a_2)$ e $B=(b_1, b_2)$ é o cociente entre o incremento das “y” respecto das “x”: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$
- Da mesma forma, podemos obter a pendente dunha recta se coñecemos as coordenadas de dous dos seus puntos.
- A pendente dunha recta dada coa ecuación explícita $r: y = mx + b$ é o coeficiente m

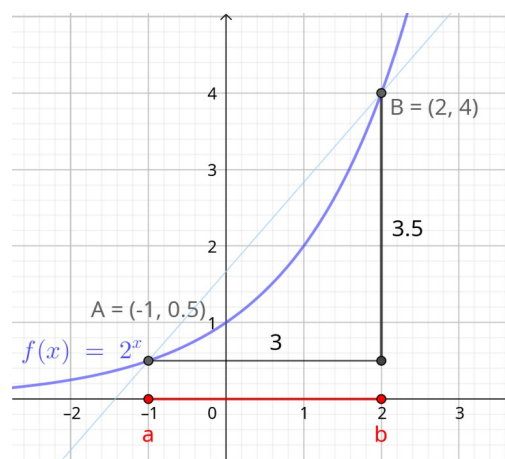
1.2.- TVM (Taxa de Variación Media)

Indica como cambia unha función entre dous valores a e b da variable independente, ou o que é o mesmo, nun intervalo:

- A TVM é un número real. O seu signo determina o **crecemento ou decrecemento medio** da función nun intervalo.
- Xeometricamente, a TVM é a **pendente dunha recta secante** que une os puntos da gráfica da función en a e b .

$P_a = (a, f(a))$; $P_b = (b, f(b))$ entón

$$TVM_{[a, b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\text{variación de } f(x)}{\text{variación de } x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$



Ex1: Obtén a TVM de $f(x) = 3^{-x}$ nos intervalos $[-1, 0]$ e $[-1, 1]$. Razoa se a función é crecente ou decrecente neste intervalo. (expresa o valor da TVM de forma exacta)

Ex2: Obter a TVM das seguintes funcións no intervalo sinalado:

- a) $f(x) = \frac{x^2}{2}$ entre 0 e 3 b) $f(x) = 4$ en $[-1, 1]$ c) $f(x) = e^x$ en $[0, 10]$ d) $f(x) = -x^3$ en $[0, 10]$

1.3.- Derivada nun punto

É o límite da TVM en un punto a cando a lonxitude do intervalo tende a cero. Isto pode definirse de 2 formas diferentes:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}, \text{ que se lee } \mathbf{f \text{ prima de } a} \text{ ou } \mathbf{derivada de f en a}.$$

- A derivada é un número real. O signo determina o crecemento/decrecemento instantáneo da función nun só punto.
- O límite debe existir para que exista a derivada. Existe para a maioría das funcións elementais e as súas combinacións.
- O límite existe se existen os límites laterais, polo que se $a \in \text{Dom } f$ está no borde ou fronteira do dominio de f , entón a función non ten derivada en a , pois non podemos achegarnos ao punto a polos dous lados.

**É dicir, unha función f só ten derivada en intervalos abertos.
A función derivada só esta definida en intervalos ou semirrectas abertas**

- Unha función definida a anacos derívase en cada anaco. O dominio de definición da función derivada só pode estar formado por intervalos ou semirrectas abertas

1.4.- Interpretación xeométrica da derivada

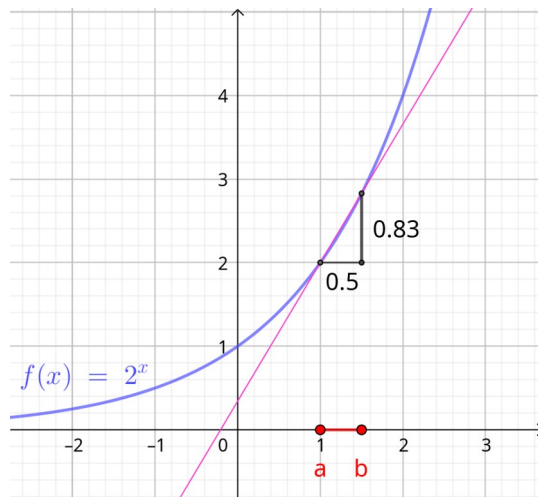
- A derivada é a pendente da recta tanxente á gráfica da función no punto **a**. A recta tanxente toca á gráfica nun só punto.
- A recta tanxente queda determinada polo punto $P=(a, f(a))$ e a pendente da recta, $m=f'(a)$:

$$\frac{y-f(b)}{x-a}=f'(a) \Rightarrow y=f'(a) \cdot (x-a)+f(b)$$

1.5.- A función derivada f'

Dada unha función f , a cada punto x do seu dominio facémoslle corresponder a súa derivada $f'(x)$. Desta forma definimos a **función derivada** en cada punto onde a función primitiva f é derivable:

$$f': x \in \text{Dom}(f) \rightarrow f'(x)$$



A derivada pode denotarse de diferentes formas: $y=f(x) \Rightarrow y'=f'(x)=\frac{df}{dx}=D(f)$

2 - Cálculo de derivadas

2.1.- Cálculo da función derivada

Partimos duns casos básicos combinados con regras que permiten derivar a maioría das funcións coas que traballamos:

- Coas derivadas elementais calculamos a función derivada das funcións simples: constante, potencial, exponencial, etc
- As regras de derivación permiten obter a derivada da suma, produto e cociente de funcións.
- A regra da cadea permite obter a derivada de funcións resultantes de combinar outras funcións entre si: a raíz dunha función, a potencia dunha función, o logaritmo dunha función, etc.

2.2.- Derivadas elementais

Nesta táboa f é a función, x é a variable respecto da que se deriva, e $k, m, n \dots$ son constantes ou parámetros. As funcións trigonométricas tamén son funcións elementais pero non traballaremos habitualmente con elas:

	Función	Función derivada	Función composta	Derivada da función composta
Función constante	$f(x)=k$	$f'(x)=0$		
Función lineal	$f(x)=mx$	$f'(x)=m$		
Función potencia vale $\forall n \in \mathbb{R}$	$f(x)=x^n$	$f'(x)=n \cdot x^{n-1}$	$f(x)=[A(x)]^n$	$f'(x)=n \cdot [A(x)]^{n-1} \cdot A'(x)$
Función irracional (*)	$f(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$	$f'(x)=\frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$	$f(x)=\sqrt[n]{A(x)}=[A(x)]^{\frac{1}{n}}$	$f'(x)=\frac{1}{n} [A(x)]^{\frac{1}{n}-1} \cdot A'(x)$
Función exponencial	$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$	$f(x)=e^{A(x)}$	$f'(x)=e^{A(x)} \cdot A'(x)$
	$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x \cdot \ln a$	$f(x)=a^{A(x)}$	$f'(x)=a^{A(x)} \cdot A'(x) \cdot \ln a$
Función logarítmica	$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\frac{1}{x} = x^{-1}$	$f(x)=\ln[A(x)]$	$f'(x)=\frac{1}{A(x)} \cdot A'(x) = \frac{A'(x)}{A(x)}$
	$f(x)=\log_a x$	$f'(x)=\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$f(x)=\log_a[A(x)]$	$f'(x)=\frac{A'(x)}{A(x) \cdot \ln a}$
Función seno	$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$	$f(x)=\sin[A(x)]$	$f'(x)=\cos[A(x)] \cdot A'(x)$
Función coseno	$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$	$f(x)=\cos[A(x)]$	$f'(x)=-\sin[A(x)] \cdot A'(x)$

NOTAS:

- Unha expresión que non leve á variable independente (x ou t) compórtase como unha constante.
- (*) As funcións radicais debes derivalas pasándoas á forma potencial, pois a fórmula é moito máis simple (*restar 1 no expoñente e multiplicar polo expoñente orixinal*). Se é necesario, logo pasamos o resultado á forma radical.

Ex3: Calcula a función derivada de cada unha destas funcións:

- a) $f(x) = \frac{1}{x^4}$ b) $f(x) = \sqrt{x}$ c) $f(x) = ax^3$ d) $f(x) = 2x$ e) $f(x) = \frac{1}{2}$
- f) $f(x) = \ln x$ g) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ h) $f(x) = ax^{-3}$ i) $f(x) = -3$ j) $f(x) = \frac{1}{2}x$
- k) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ l) $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ m) $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ n) $f(x) = x^{-\frac{3}{4}}$ o) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$
- p) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ q) $f(x) = 10^x$ r) $f(x) = \sqrt[3]{2}$ s) $f(x) = \log x$ t) $f(x) = \log_2 x$

2.3.- Regras de derivación

Combinadas coas anteriores, podemos derivar polinomios, funcións racionais e combinacións delas

Nesta táboa f e g son funcións, x é a variable respecto da que se deriva, e k é unha constante. Representamos a operación de derivar con D[función].

	Función	Función derivada	Exemplo
Producto de número e función	$k \cdot f(x)$	$k \cdot f'(x)$	$D[7x^3] = 7 \cdot D[x^3] = 7 \cdot 3x^2 = 21x^2$
Suma de funcións	$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$	$D[x^3 + x] = D[x^3] + D[x] = 3x^2 + 1$
Producto de funcións	$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	$D[x^3 \cdot 10^x] = D[x^3] \cdot 10^x + x^3 \cdot D[10^x] = 3x^2 \cdot 10^x + x^3 \cdot 10^x \cdot \ln 10$
Cociente de funcións	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$	$D\left[\frac{x-5}{x^3}\right] = \frac{D[x-5] \cdot x^3 - (x-5) \cdot D[x^3]}{(x^3)^2} = \frac{x \cdot x^3 - (x-5) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x^2 - 3x - 15}{x^4}$

NOTAS

- Dise que unha constante “sae fóra da derivada” e que a “derivada da suma é a suma das derivadas”
- O numerador da fórmula do cociente é case igual á fórmula do produto. O denominador é a función g(x) ao cadrado

Ex4: Calcula a función derivada de cada unha destas funcións:

- a) $\frac{2}{x^4} + \sqrt{5}$ b) $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 12$ c) $\frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{x}$ d) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 5x - 5$
- e) $f(x) = \frac{x^2}{10^x}$ f) $\log x$ g) $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt{x} - \sqrt{2}$ h) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$
- i) $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x}}$ j) $f(x) = \frac{2x^3}{3x+5}$ k) $f(x) = \frac{2x-3}{3x+5}$ l) $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^x$ m) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

Ex5: Calcula a función derivada de cada unha destas funcións:

- a) $(x+1) \cdot (x^2-1)$ b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}$ c) $\sqrt{x} \cdot \log x$ d) $f(x) = \ln x - (x^3+1)$
- e) $f(x) = 3x^2 \cdot \sqrt{x}$ f) $f(x) = (2x+1) \cdot e^x$ g) $f(x) = x^3 \cdot e^x$ h) $f(x) = (x^2+5) \cdot \ln x$

$$i) f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$j) f(x) = 2x^2 \cdot (\sqrt{x} + 4)$$

$$k) f(x) = kx^2 \cdot e^x$$

$$l) f(x) = ((kx)^2 + s) \cdot \ln kx$$

2.4.- Composición de funcións. A regra da cadea

A composición de funcións: cando compoñemos funcións elementais entre si podemos lograr novas funcións que non encaixan en ningún dos tipos anteriores. A composición de dúas funcións f e g denótase por $(g \circ f)(x)$ consiste en aplicar a segunda función ao resultado da primeira, é dicir, $(g \circ f)(x) = (g(f(x)))$. En xeral a composición de funcións non é conmutativa. Recoñeceremos a composición de funcións porque vemos unha función *dentro* de outra. Por exemplo:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x} \\ g(x) = x^2 - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 1 \Rightarrow (g \circ f)(x) = x - 1 \quad (*) \\ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow (f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 1} \quad (*) \end{array} \right.$$

(*) O dominio de definición da función resultante sempre é, como máximo, a intersección dos dominios das funcións iniciais.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{x-4} \\ g(x) = e^x \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x-4}\right) = e^{\frac{1}{x-4}} \Rightarrow g \circ f(x) = e^{\frac{1}{x-4}} \\ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^x) = \frac{1}{e^x - 4} \Rightarrow f \circ g(x) = \frac{1}{e^x - 4} \end{array} \right.$$

A regra da cadea permite derivar a función dunha función a partir das derivadas das funcións de partida:

$$(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) \text{ ou de xeito abreviado } [g \circ f]' = [g(f)]' = g'(f) \cdot f'$$

Debemos aplicar a regra da cadea cando a función elemental non teña á x como variable, senón a unha expresión con x :

$$\circ g(x) = \sqrt{x} \text{ é a raíz de } x, \text{ pero } h(x) = \sqrt{x^2 + 5} \text{ é a raíz dunha función de } x. \text{ Entón } h' = D[\sqrt{f}] = \frac{1}{2\sqrt{f}} \cdot f'$$

$$\circ g(x) = x^5 \text{ é unha potencia de } x, \text{ pero } h(x) = (3x^2 - 1)^5 \text{ é a potencia dunha función de } x. \text{ Entón } h' = D[f^5] = 5 \cdot f^4 \cdot f'$$

$$\circ g(x) = e^x \text{ é a exponencial de } x, \text{ pero } h(x) = e^{x^2 - 1} \text{ é a exponencial dunha función de } x. \text{ Entón } h' = D[e^f] = e^f \cdot f'$$

Resumindo: Derívase como función elemental $g(f)$ e multiplícase pola derivada da función $f'(x)$ que fai de variable:

Ex6: Calcula a función derivada de cada unha destas funcións:

$$a) y = \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{4x}$$

$$b) f(x) = \sqrt{2x+2} \sqrt{x}$$

$$c) y = x \cdot \sqrt{x^2 - 1}$$

$$d) f(x) = \ln(x^3 + 1)$$

$$e) y = \log \sqrt{x}$$

$$f) f(x) = x^2 \cdot e^{2x+1}$$

$$g) f(x) = 3x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}$$

$$h) f(x) = x^3 \cdot e^{-3x}$$

$$i) f(x) = \sqrt{\ln x}$$

$$j) f(x) = \ln \sqrt{x}$$

$$k) f(x) = \frac{\ln x^2}{x}$$

$$l) y = \sqrt[3]{2x-5}$$

$$m) f(x) = 2x^2 \cdot \sqrt{2-x}$$

$$n) y = \frac{-8}{(t+3)^3}$$

$$o) y = \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}$$

Ex7: Calcula a función derivada de cada unha destas funcións:

$$a) B(x) = \sqrt{3x^2 - 2x + 5} \quad b) f(t) = (3t^2 - 1)^{13} \quad c) f(x) = \frac{1}{(x-2)^5}$$

$$d) P(t) = e^{t^2} \quad e) f(x) = \frac{1 + \ln x^2}{x^3}$$

$$f) f(x) = \frac{x^5}{(x-1)^5} \quad g) f(x) = \ln(2 + 2\sqrt{x}) \quad h) N(t) = \frac{-3}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$i) C(x) = \frac{e^x - x^2}{2} \quad j) f(x) = (1 + 5\sqrt{x})^3$$

$$k) I(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) \quad l) I(t) = \frac{3t^2 - 3}{t^2 - 1} \quad m) f(x) = (3 + 2x) \cdot e^{-3x}$$

$$n) f(x) = \frac{x^2 + 1}{\ln x} \quad o) f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

Ex8: Derivadas preguntadas en problemas de selectividade:

a) Xuño 2014 $N(t) = 200 \left(5 - \frac{10}{2+t} \right), t \geq 0$	b) Xuño 2015 $f(x) = 1 + \frac{a}{x} + bx, x \neq 0$	c) Setembro 2006 $C(t) = \frac{210000}{(2t-k)^2 + 6}, 0 \leq t \leq 12$	d) Setembro 2016 $G(t) = \begin{cases} -(1/9) \cdot t + 7/2 & \text{se } 0 \leq t \leq 18 \\ 6 - 144/(t+14) & \text{se } t > 18 \end{cases}$
--	---	--	---