

CAPÍTULO 4: LÍMITES Y CONTINUIDAD

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. LÍMITES

- Utiliza la definición de límite para probar que $\lim_{x \rightarrow +1} x = 1$.
- Calcula los límites laterales y determina si existe el límite en las funciones siguientes definidas a trozos, en los puntos en los que se unen dos ramas:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } x < 1 \\ 3x-2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} & \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{-2x+3}{x+5} & \text{si } x < 1 \\ \frac{5x^2}{x+3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} & \text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{7}{x^2+4} & \text{si } x < 1 \\ \frac{x-1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{array}$$

- Clasifica los siguientes límites en finitos o infinitos, y calcúlalos:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} +x^2 & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} x^2 & \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \end{array}$$

- Calcula los siguientes límites, indicando el signo:

$$\begin{array}{lllll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 & \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} \end{array}$$

- Calcula los siguientes límites, indicando el signo:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5}{x-1} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5}{x-1} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-5}{x-3} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-5}{x-3} \end{array}$$

$$6. \text{ Calcula el límite: } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x^2-9} - \frac{1}{x-3} \right)$$

$$7. \text{ Calcula el límite: } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$8. \text{ Calcula el límite: } \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$$

$$9. \text{ Calcula el límite: } \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x-2}{x+2} - \frac{x}{x^2-4} \right)$$

$$10. \text{ Calcula el límite: } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2-5x+6}{x^2-9} \right)$$

$$11. \text{ Calcula el límite: } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3-4x^2+3x}{x^2-1} \right)$$

$$12. \text{ Calcula el límite: } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{6+x}-3}{x^2-9} \right)$$

$$13. \text{ Calcula el límite: } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} \right)$$

$$14. \text{ Calcula el límite: } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x} \right)$$

$$15. \text{ Calcula el límite: } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2-\sqrt{2+x}}{x-2} \right)$$

- Escribe, sin hacer cálculos, el valor de los límites siguientes:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+3}{5x^2+2x-1} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^5+3}{5x^2+2x-1} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+3}{5x^7+2x-1} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3+3x^2-2x+5}{2x^3+x^2-x} \end{array}$$

17. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{x^2-1} - \frac{x+1}{x} \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+2}{x-1} - 3x \right)$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-3x} \right)$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3} \right)$

18. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4}}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\operatorname{sen} x)$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^5-7x}{x^5+100x^2} \right)$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x)$ e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x))$

19. Determina los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x^2-1}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2} \right)^{\frac{2x^2-1}{x}}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3-1}{x^3+5} \right)^{3x^2}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+3}{5x+1} \right)^{\frac{x^2-1}{5x}}$

20. Determina los límites siguientes (observa que *no* son tipo e):

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+3}{x+1} \right)^{\frac{x^2-1}{5x}}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3-1}{4x^3+5} \right)^{3x^2}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2} \right)^{\frac{2x^2-1}{x^3}}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+3}{5x^2+1} \right)^{\frac{x^2-1}{5x^3}}$

2. ASÍNTOTAS

21. Determina las asíntotas verticales de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \frac{(x+4) \cdot (x-2)}{(x-1) \cdot (x-2)}$ b) $f(x) = \frac{x \cdot (x+4)}{(x-2) \cdot (x-3)}$
 c) $f(x) = \frac{(x+4)^2}{(x-1) \cdot (x+4)}$ d) $f(x) = \frac{(x+4)}{(x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-5) \cdot (x+1)}$

22. Determina la asíntota horizontal de cada una de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \frac{(x+4) \cdot (x-2)}{(x-1) \cdot (x-3)}$ b) $f(x) = \frac{3x \cdot (x+4)}{(x-2) \cdot (x-3)}$
 c) $f(x) = \frac{(x+4)^2}{2(x-1) \cdot (x-4)}$ d) $f(x) = \frac{(x+4)}{(x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-5) \cdot (x+1)}$

23. Determina la asíntota oblicua, si existe, de cada una de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \frac{(x+4) \cdot (x-2)}{(x-1)}$ b) $f(x) = \frac{3x^2 \cdot (x+4)}{(x-2) \cdot (x-3)}$ c) $f(x) = \frac{x^2+4}{2(x-1)}$ d) $f(x) = \frac{(2x^2+4)}{(x+1)}$

24. Analiza el comportamiento en el infinito de cada una de las funciones siguientes:

a) $f(x) = (x+4)^2$ b) $f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$ c) $f(x) = x^3+4$ d) $f(x) = \frac{2x^5+4}{x+1}$

3. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

25. Estudia la continuidad de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ b) $f(x) = \sqrt{x-5}$ c) $f(x) = \log_2(x-3)$ d) $f(x) = \begin{cases} 2+x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 1+e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

26. Determina el valor de k para que la función $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ k+x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en toda la recta real.

27. Estudia la continuidad de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } x < -1 \\ 2+x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{3}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ b) $f(x) = x - \sqrt{x-2}$ c) $f(x) = |x-3| - 1$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Límites

1. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2-9}$

b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x-3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3+27}{x^2+3x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2+x-2}$

e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+8}{-x-2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-4}{x-1}$

g) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3+8x-2}{-x^2-2x+3}$

2. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+8}{-x-2}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+8}{-x^5-2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+8}{-x^3-2}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{x^2-4} - \frac{2}{x+2} \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{x^2-4} - \frac{x-3}{x+2} \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{3x-1} - \sqrt{x^2-2x})$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2})$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2}} \right)$

3. Determina las asíntotas de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \frac{x^2-2|x|}{x-3}$

b) $f(x) = \frac{5}{x^2-4}$

c) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

d) $f(x) = \frac{x^2-5x}{x^2-1}$

e) $f(x) = \frac{-5x}{(x-1)^2}$

f) $f(x) = \frac{-5x^2-5}{(x-1)^2}$

g) $f(x) = \ln \frac{-5x}{(x-1)^2}$

h) $f(x) = \sqrt{\frac{-5x}{(x-1)^2}}$

Continuidad

4. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x) = \begin{cases} 3^x & x < -2 \\ 4-x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ \log_2 x & x > 1 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < 0 \\ x^2-3x & 0 \leq x < 3 \\ \sqrt{x-3} & x \geq 3 \end{cases}$

c) $h(x) = |x^2-5x|$

5. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x) = |x^2-25|$

b) $g(x) = 2 - \frac{|x|}{x}$

c) $h(x) = \frac{x^2-2|x|}{x-3}$

6. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x) = \frac{3x+5}{x^2-4x+3}$

b) $g(x) = \frac{7x+2}{x^2+x}$

c) $h(x) = \frac{x^2-5x+4}{x^2-2x-3}$

7. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x) = \sqrt{x^2-x-6}$

b) $g(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x^2-4}}$

c) $h(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x^2-3x}}$

8. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x) = \ln \left(\frac{4-x}{x-5} \right)$

b) $g(x) = \ln(-x^2-x+2)$

c) $h(x) = \ln \left(\frac{9-x^2}{(x-3)^2} \right)$

9. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

d) $f(x) = e^{\frac{x^2-9}{7+x}}$

g(x) = $e^{\sqrt{x-5}}$

h(x) = $2^{\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}}$

10. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3-x^2 & x < 0 \\ 2+e^x & x \geq 0 \end{cases}$. Estudia su continuidad. b) Representa su gráfica11. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3-x^2 & x < 2 \\ k+x & x \geq 2 \end{cases}$ a) Determina el valor de k para que la función sea continua en toda la recta real.

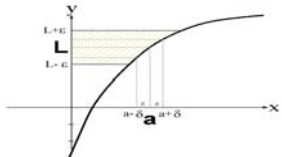
Representa su gráfica

12. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x-3 & \dots x < -1 \\ x^2-5 & -1 \leq x < 1 \\ \frac{2}{x} & x \geq 1 \end{cases}$. a) Estudia su continuidad. b) Representa su gráfica
13. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 4-x^2 & x < 2 \\ x^2-4 & x \geq 2 \end{cases}$. a) Estudia su continuidad. b) Representa su gráfica
14. Esboza la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{x^2-25}$ indicando sus asíntotas y sus puntos de discontinuidad.
15. Utiliza GeoGebra para dibujar, de nuevo, la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2-25}$. Estudia su simetría.

AUTOEVALUACIÓN

1. El límite $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right)$ es igual a:
 a) ∞ b) 0 c) 1 d) 2/3
2. El límite $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - x - 2) \cdot \left(\frac{1}{x+2} \right)$ es igual a es igual a:
 a) ∞ b) 0 c) 1 d) -1
3. El límite $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2} \right)$ es igual a:
 a) ∞ b) 0 c) -2/3 d) -1
4. El límite $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x}-1}{x+1}$ es igual a:
 a) 1/2 b) 0 c) $-\infty$ d) -1
5. El límite $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 7x - 4}{x^2 + 3}$ es igual a:
 a) ∞ b) 0 c) 5 d) 1
6. El límite $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 7x - 4}{x^3 + 3}$ es igual a:
 a) ∞ b) 0 c) 5 d) 1
7. El límite $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-2} \right)^{2x^2+1}$ es igual a:
 a) ∞ b) 0 c) 3 d) 1
8. Estudia la continuidad de $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-3}{x} & \text{si } x < 0 \\ 3x+2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $x = 0$.
 a) Es continua b) Tiene una discontinuidad evitable c) Un salto finito d) Un salto infinito
9. Estudia la continuidad de $f(x) = \begin{cases} x^3-3 & \text{si } x < 2 \\ 3x+2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $x = 2$.
 a) Es continua b) Tiene una discontinuidad evitable c) Un salto finito d) Un salto infinito
10. Estudia la continuidad de $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 2 \\ 3x+2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $x = 2$.
 a) Es continua b) Tiene una discontinuidad evitable c) Un salto finito d) Un salto infinito

RESUMEN

Definición de límite	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow$ Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, siempre que $ x - a < \delta$, se cumple $ f(x) - L < \varepsilon$.	
Límite lateral a la derecha	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ el valor de $f(x)$ cuando x tiende a a , siempre que se cumpla la condición $x > a$	La función $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 2 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ tiene de límite lateral a la izquierda 8, y de límite lateral a la derecha también 8, pues
Límite lateral a la izquierda	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ el valor de $f(x)$ cuando x tiende a a , siempre que se cumpla la condición $x < a$	$\lim_{x \rightarrow 2^-} x^3 = 2^3 = 8$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} 3x + 2 = 3 \cdot 2 + 2 = 6 + 2 = 8$
Existencia de límite	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$	La función $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 2 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ tiene límite en $x = 2$
Asíntotas	Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = K$ hay una asíntota horizontal $y = K$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ hay una asíntota vertical $x = a$.	$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow$ asíntota horizontal, $y = 0$ y asíntota vertical $x = 0$
Propiedades de los límites	$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ $\lim_{x \rightarrow a} (K \cdot f(x)) = K \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ si $g(a) \neq 0$.	
Continuidad de una función en un punto	Una función $f(x)$ es continua en el punto $x = a$, si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que siempre que $ x - a < \delta$, se cumple que $ f(x) - f(a) < \varepsilon$.	La función $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 2 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ es continua en $x = 2$
Propiedades de las funciones continuas	La suma y el producto de funciones continuas es una función continua. El cociente de funciones continuas es una función continua si no se anula el denominador.	Los polinomios son funciones continuas en $\mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$
Tipos de discontinuidad	Evitable. De primera especie de salto finito. De primera especie de salto infinito. De segunda especie	$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 2 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ evitable en $x = 2$ $f(x) = 1/x$ de primera especie con salto infinito en $x = 0$