

# CAPÍTULO 4: LÍMITES Y CONTINUIDAD

## ACTIVIDADES PROPUESTAS

### 1. LÍMITES

- Utiliza la definición de límite para probar que  $\lim_{x \rightarrow +1} x = 1$ .
- Calcula los límites laterales y determina si existe el límite en las funciones siguientes definidas a trozos, en los puntos en los que se unen dos ramas:

$$a) f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } x < 1 \\ 3x-2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x+5}{x+3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{7}{x^2+4} & \text{si } x < 1 \\ \frac{x-1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- Clasifica los siguientes límites en finitos o infinitos, y calcúlalos:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} -x^2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} +x^2$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} x^2$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}$$

- Calcula los siguientes límites, indicando el signo:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}$$

- Calcula los siguientes límites, indicando el signo:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5}{x-1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5}{x-1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-5}{x-3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-5}{x-3}$$

$$6. \text{ Calcula el límite: } \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{x^2-9} - \frac{1}{x-3} \right)$$

$$7. \text{ Calcula el límite: } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$8. \text{ Calcula el límite: } \lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$$

$$9. \text{ Calcula el límite: } \lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{x-2}{x+2} - \frac{x}{x^2-4} \right)$$

$$10. \text{ Calcula el límite: } \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x^2-5x+6}{x^2-9} \right)$$

$$11. \text{ Calcula el límite: } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^3-4x^2+3x}{x^2-1} \right)$$

$$12. \text{ Calcula el límite: } \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{\sqrt{6+x}-3}{x^2-9} \right)$$

$$13. \text{ Calcula el límite: } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} \right)$$

$$14. \text{ Calcula el límite: } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x} \right)$$

$$15. \text{ Calcula el límite: } \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2-\sqrt{2+x}}{x-2} \right)$$

- Escribe, sin hacer cálculos, el valor de los límites siguientes:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+3}{5x^2+2x-1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^5+3}{5x^2+2x-1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+3}{5x^7+2x-1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3+3x^2-2x+5}{2x^3+x^2-x}$$

17. Calcula los límites siguientes:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x}{x^2-1} - \frac{x+1}{x} \right)$       b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2+2}{x-1} - 3x \right)$       c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-3x} \right)$       d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x+2} - \sqrt{x-3} \right)$

18. Calcula los límites siguientes:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4}}$       b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\text{sen } x)$       c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^5-7x}{x^5+100x^2} \right)$       d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x)$       e)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x))$

19. Determina los límites siguientes:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+1}{x-2} \right)^{2x^2-1}$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2+x}{3x^2-2} \right)^{\frac{2x^2-1}{x}}$       c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3-1}{x^3+5} \right)^{3x^2}$       d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5x+3}{5x+1} \right)^{\frac{x^2-1}{5x}}$

20. Determina los límites siguientes (observa que *no* son tipo e):

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5x+3}{x+1} \right)^{\frac{x^2-1}{5x}}$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3-1}{4x^3+5} \right)^{3x^2}$       c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2+x}{3x^2-2} \right)^{\frac{2x^2-1}{x^3}}$       d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5x+3}{5x^2+1} \right)^{\frac{x^2-1}{5x^3}}$

## 2. ASÍNTOTAS

21. Determina las asíntotas verticales de las funciones siguientes:

a)  $f(x) = \frac{(x+4) \cdot (x-2)}{(x-1) \cdot (x-2)}$       b)  $f(x) = \frac{x \cdot (x+4)}{(x-2) \cdot (x-3)}$   
 c)  $f(x) = \frac{(x+4)^2}{(x-1) \cdot (x+4)}$       d)  $f(x) = \frac{(x+4)}{(x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-5) \cdot (x+1)}$

22. Determina la asíntota horizontal de cada una de las funciones siguientes:

a)  $f(x) = \frac{(x+4) \cdot (x-2)}{(x-1) \cdot (x-3)}$       b)  $f(x) = \frac{3x \cdot (x+4)}{(x-2) \cdot (x-3)}$   
 c)  $f(x) = \frac{(x+4)^2}{2(x-1) \cdot (x-4)}$       d)  $f(x) = \frac{(x+4)}{(x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-5) \cdot (x+1)}$

23. Determina la asíntota oblicua, si existe, de cada una de las funciones siguientes:

a)  $f(x) = \frac{(x+4) \cdot (x-2)}{(x-1)}$       b)  $f(x) = \frac{3x^2 \cdot (x+4)}{(x-2) \cdot (x-3)}$       c)  $f(x) = \frac{x^2+4}{2(x-1)}$       d)  $f(x) = \frac{(2x^2+4)}{(x+1)}$

24. Analiza el comportamiento en el infinito de cada una de las funciones siguientes:

a)  $f(x) = (x+4)^2$       b)  $f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$       c)  $f(x) = x^3 + 4$       d)  $f(x) = \frac{2x^5+4}{x+1}$

## 3. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

25. Estudia la continuidad de las funciones siguientes:

a)  $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$       b)  $f(x) = \sqrt{x-5}$       c)  $f(x) = \log_2(x-3)$       d)  $f(x) = \begin{cases} 2+x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 1+e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

26. Determina el valor de  $k$  para que la función  $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ k+x & \text{si } x > 1 \end{cases}$  sea continua en toda la recta real.

27. Estudia la continuidad de las funciones siguientes:

a)  $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } x < -1 \\ 2+x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{3}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$       b)  $f(x) = x - \sqrt{x-2}$       c)  $f(x) = |x-3| - 1$