

1 - Límite dunha función

A análise de funcións pasa polo estudo dos límites máis importantes. Isto permite determinar a continuidade da función, descubrir que ocorre fóra do seu dominio e saber como se comporta a longo prazo:

$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 4) = 5$	$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{7}{(x-2)^2} \right) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x-5} \right) = 2$
Como a función é continua $\forall x \in \mathbb{R}$ o límite en calquera punto é $f(x)$	A función non está definida en $x=2$. Canto máis se achegue x a valores de 2, $f(x)$ toma valores que crecen indefinidamente	Canto máis creza o valor de x , máis se achega $f(x)$ ao valor 2.

2 - Tendencia dunha variable, límite nun punto, límites infinitos e límites laterais

O límite dunha función f cando x tende a c , denotado por $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$, indica a que valor se achegan as imaxes $f(x)$ da función a medida que se calculan con valores x cercanos a c . Este punto c pode **non formar parte** do dominio de definición da función ou tamén pode ser $\pm \infty$.

2.1.- Que significa $x \rightarrow c^-$ ou $x \rightarrow c^+$

A variable x toma valores cercanos (por parecidos) a $c \in \mathbb{R}$:

- $x \rightarrow c^-$: x toma valores próximos a c , pero menores que c . Diremos que “ **x tende a c pola esquerda**”.
Exemplo: Se facemos variar x para que tome os valores 1’9; 1’99; 1’999; ... diremos que $x \rightarrow 2^-$
- $x \rightarrow c^+$: x toma valores próximos a c , pero maiores que c . Diremos que “ **x tende a c pola dereita**”.
Exemplo: Se facemos variar x para que tome os valores 2’1; 2’01; 2’001; ... diremos que $x \rightarrow 2^+$

2.2.- Que significa que unha variable tende a infinito

- $x \rightarrow +\infty$: a variable x pode tomar valores maiores que calquera número: diremos que “ **x tende a mais infinito**”.
Exemplo: Se facemos variar x para que tome os valores 10; 100; 1000; ... diremos que $x \rightarrow +\infty$
- $x \rightarrow -\infty$: a variable x toma valores máis pequenos (*) que calquera número (ou valores *moi negativos*). Diremos que “ **x tende a menos infinito**”.
Exemplo: Se facemos variar x para que tome os valores -10; -100; -1000; ... diremos que $x \rightarrow -\infty$
(*) Recordar que os números negativos son menores canto maior é o seu valor absoluto.

2.3.- Límites laterais

- Límite dunha función pola dereita:** $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ expresa o valor ao que tende $f(x)$ cando x tende a c pola dereita.

Chamámolslle límite lateral dereito de f en c . O resultado deste cálculo pode ser: un número $A \in \mathbb{R}$, $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = A$ onde $A \in \mathbb{R}$
Os valores de $f(x)$ son cada vez mais grandes cando x se achega a c . Exemplo: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{10}{x-1}$	Os valores de $f(x)$ son cada vez mais pequenos cando x se achega a c . Exemplo: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)$	Os valores de $f(x)$ achéganse ao número b cando x se achega a c . Exemplo: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2}$

◦ **Límites pola esquerda:** defínense de xeito análogo aos anteriores, pero cando $x \rightarrow c^-$

$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = A$ onde $A \in \mathbb{R}$
Os valores de f(x) son cada vez mais grandes cando x se achega a c . Exemplo: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x}$	Os valores de f(x) son cada vez mais pequenos cando x se achega a c . Exemplo: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$	Os valores de f(x) achéganse ao número b cando x se achega a c . Exemplo: $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{4}{1-x}$

2.4.- Límite dunha función nun punto

◦ **Límite da función nun punto:** cando se verifica que os límites laterais dunha función nun punto existen e coinciden entón falamos de **límite (a secas)**:

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = L, \text{ onde } L \in \mathbb{R}, L = +\infty \text{ ou } L = -\infty$$

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ onde $A \in \mathbb{R}$
Os valores de f(x) son cada vez mais grandes cando x se achega a c . Exemplo: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1}$	Os valores de f(x) son cada vez mais pequenos cando x se achega a c . Exemplo: $\lim_{x \rightarrow 0} \log(x^2)$	Os valores de f(x) achéganse ao número A cando x se achega a c . Exemplo: $\lim_{x \rightarrow 1} -x^2 + 3x = 2$

2.5.- Límite dunha función no infinito

Ademais dos límites dunha función nun punto, podemos considerar os límites no infinito:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$
Os valores de f(x) son cada vez mais grandes cando x se fai moi grande. Exemplo: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x$	Os valores de f(x) achéganse ao número A cando x se achega a c . Exemplo: $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + x - 1$	Os valores de f(x) achéganse ao número A cando x se achega a c . Exemplo: $\lim_{x \rightarrow +\infty} 10^{-x} - 1$

Ex1: Calcula os seguintes límites, usando unha táboa de valores (*):

(*) *en canto avancemos no tema, non calcularemos límites usando este método.*

- | | | | | |
|---|---|---|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2 - 1}$ | b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 1}{2}$ | c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x^2 + 1} =$ | d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 - 1} =$ | e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - 1} =$ |
| f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 1 =$ | g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\log x) =$ | h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x) =$ | i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 1 =$ | j) $\lim_{x \rightarrow 2^-} x + 2 =$ |
| k) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2 - x} =$ | l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x =$ | m) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x =$ | n) $\lim_{x \rightarrow 0} e^x =$ | o) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x - 1} =$ |
| p) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{-x} =$ | q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 - x^3 =$ | r) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x^2 - 9} =$ | s) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 4}{x} =$ | t) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 5}{x - 2} =$ |

3 - Cálculo de límites. Continuidade.

3.1.- Método xeral do cálculo de límites

Na maioría dos casos a técnica para calcular un límite do tipo $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ consiste en substituír x polo valor ao que tende, obtendo como resultado do límite un valor que pode ser finito (un n° real), infinito ou indeterminado. Neste último caso non podemos obter o valor do límite de forma directa e necesitamos aplicar outras regras de cálculo.

3.2.- Límites en funcións contínuas. Continuidade dunha función nun punto.

$$f \text{ é continua en } c \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c) \\ \text{e tamén} \\ \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c) \end{cases}$$

- Se a función é continua, o cálculo de límites redúcese a obter o valor da función nun punto. Todas as funcións cunha única expresións analítica **son continuas nos puntos do seu dominio** (polinomios, cocientes, radicais, exponenciais, logarítmicas, etc)
- Para determinar a continuidade dunha función nun punto estudamos se os límites laterais coinciden con $f(c)$.

3.3.- Operacións con límites finitos

Expresan propiedades como: $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$ (o límite dunha suma é a suma dos límites)

Se todos os límites da igualdade son finitos, cúmprense para todas as operacións: suma, produto, cociente, radical, potencia e logaritmo.

3.4.- Operacións con límites infinitos

Sexa $A \in \mathbb{R}$ un n° real e $+\infty$ e $-\infty$ límites de funcións	
Sumas	Produtos
(1) $\infty \pm A = \infty$ e $-\infty \pm A = -\infty$	(5) $\infty \cdot \infty = \infty$ e $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$
(2) $\infty + \infty = \infty$ e $-\infty - \infty = -\infty$	(6) $\infty \cdot A = \infty$ e $-\infty \cdot A = -\infty$, se $A > 0$
(3) $-(-\infty) = \infty$	(7) $\infty \cdot A = -\infty$ e $-\infty \cdot (-A) = -\infty$, se $A < 0$
(4) $\infty - \infty = ? \rightarrow$ INDETERMINACIÓN	(8) $\pm \infty \cdot 0 = ? \rightarrow$ INDETERMINACIÓN
Cocientes	Potencias e exponenciais (as bases deben ser positivas)
(9) $\frac{A}{\pm \infty} = 0 \quad \forall A \in \mathbb{R}$ ← para calquera n° real A	(13) $\infty^{+\infty} = +\infty$ e $\infty^{-\infty} = 0$
(10) $\frac{A}{0} = \pm \infty \quad \forall A \neq 0$ ← os límites laterais poden ser diferentes, hai que resolver esta indeterminación	(14) Se $A \neq 0$ entón $A^0 = 1$
(11) $\frac{\pm \infty}{0} = \pm \infty$	(15) Se $A > 0$ entón $\infty^A = +\infty$; Se $A < 0$ entón $\infty^A = 0$
(12) $\frac{0}{0} = ?$ ou $\pm \frac{\infty}{\infty} = ? \rightarrow$ INDETERMINACIÓN	(16) $\infty^0 = ?$ e $0^0 \rightarrow$ INDETERMINACIÓN (non entra)
	(17) Se $A > 1$ entón $A^{+\infty} = +\infty$ e $A^{-\infty} = 0$ (base grande)
	(18) Se $0 < A < 1$ entón $A^{+\infty} = 0$ e $A^{-\infty} = +\infty$ (base pequena, caso inverso do anterior)
	(19) $1^{\pm \infty} = ? \rightarrow$ INDETERMINACIÓN (non entra)

3.5.- Algúns exemplos de cálculo de límites

- a) Función continua en c $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-3}{x+1} =$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x-5 =$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^x =$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} 3 \cdot x =$ e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x} =$
- f) As expresións do tipo $\frac{L}{0}, L \neq 0$ teñen límites laterais infinitos, pero hai que estudalos por separado para ver se coinciden ou non. Exemplos: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} =$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2} =$; $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-3}{x+1} =$
- g) As expresións do tipo $\frac{L}{\infty}$ ou $\frac{L}{-\infty}$ sempre dan cero. Exemplos: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} =$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x+5} =$
- h) Límites no infinito de potencias: o resultado depende das regras de signos (inclúe aos radicais).
Exemplos: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 =$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 =$; $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 =$; $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 =$
- i) Límites no infinito dos polinomios e radicais: cando $x \rightarrow \pm \infty$ o valor do límite **queda determinado unicamente polo termo de maior grao**; este límite sempre é $\pm \infty$. O signo obtémolo coas regras de signos das potencias.
Exemplos: $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^4-9) =$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{5} =$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3-5x^2+3x-1) =$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3-5x^2+3x-1) =$
- j) Límites no infinito dos cocientes de polinomios: queda determinado polo grado do numerador e denominador.
- k) Algúns límites en $-\infty$ poden calcularse con un cambio de variable: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$
- l) Límites no infinito de exponenciais: o resultado depende do signo do expoñente e do **tamaño da base**:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 3^x =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x =$$

4 - Resolución de indeterminacións

4.1.- Comparación de infinitos

Sexan dúas funcións f e g tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm \infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \pm \infty$, entón:

- f(x) é un infinito de orde superior a g(x) $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm \infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$
- f(x) é un infinito da mesma orde que g(x) $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0, L \in \mathbb{R}$

Exemplo: $10^x \gg 2^x \gg x^{10} \gg x^2 \gg \sqrt{x} \gg \sqrt[5]{x} \gg \log_{10} = \log_2$

4.2.- Resolución de indeterminacións

As Indeterminacións son límites que non se poden calcular de forma inmediata: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} = \frac{1+2-3}{1-1} = \frac{0}{0} = ?$

- Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$: se é un cociente e polinomios e estamos con $x \rightarrow \pm \infty$, reducimos cada polinomio á potencia principal e simplificamos; se hai expresións radicais, facemos o mesmo usando expoñentes fraccionarios
- Indeterminación $\frac{0}{0}$:

- Se é un cociente de polinomios e estamos con $x \rightarrow c \in \mathbb{R}$, entón podemos simplificar a fracción alxébrica dividindo NUM e DEN por $(x-c)$ e volver a calcular o límite.

• Se é unha operación entre expresións radicais ou fraccións alxébricas, actuamos como no caso anterior.

◦ Indeterminación $\infty - \infty$:

• [Caso 1]: manda o infinito de orde superior.

• [Caso 2] Podemos facer a operación con fraccións alxébricas.

• [Caso 3] Hai funcións radicais e amplificamos co conxugado

Ex2: Calcula os seguintes límites:

- | | | | | |
|--|--|---|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-4}{x}$ | b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+5}{x-2}$ | c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x+1}{x+1}$ | d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x^3-8}$ | e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$ |
| f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x+4}{x-1}$ | g) $\lim_{x \rightarrow e} \ln x$ | h) $\lim_{x \rightarrow -1} (-x^2+4)$ | i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x}$ | j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3-3x^2}{x}$ |
| k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2+1=$ | l) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+1}{2}=$ | m) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2-1}=$ | n) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+4}$ | o) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x+4}$ |
| p) $\lim_{x \rightarrow -4^-} \sqrt{x+4}$ | q) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\log x)=$ | r) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x)=$ | s) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2-1}=$ | t) $\lim_{x \rightarrow 2^-} x+2=$ |
| u) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2-x}=$ | v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x=$ | w) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x=$ | x) $\lim_{x \rightarrow -0} e^x=$ | y) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1}=$ |
| z) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{-x}=$ | aa) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4-x^3=$ | ab) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x^2-9}=$ | ac) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}=$ | ad) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}=$ |

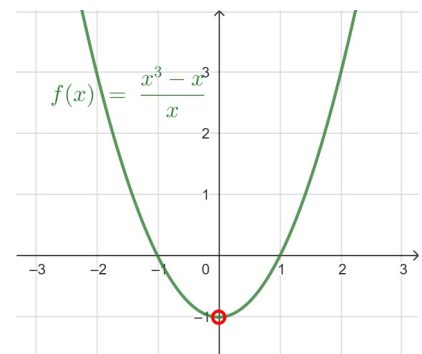
5 - Tipos de discontinuidades

Descontinuidade evitable en $x=a$

- Existen os límites laterais en a , son finitos e coinciden (hai límite)
- $f(a)$ non existe ou non coincide co límite

Son propias de expresións alxébricas sen simplificar: $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ ou

$$f(x) = \frac{x^3-x}{x}$$



Descontinuidade NON evitable de salto FINITO en $x=a$

- Existen os límites laterais en $x=a$, son finitos pero NON coinciden (non hai límite)

Son propias de funcións definidas a trozos



Descontinuidade NON evitable de salto INFINITO en $x=a$

- Existen os límites laterais en a pero polo menos un é infinito
- É imposible asignar un valor a $f(a)$ fai que a función sexa descontinua

É propia de funcións onde $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$

6 - Ramas infinitas. Asíntotas.

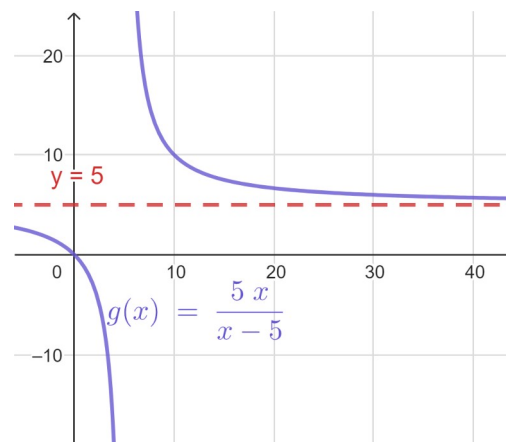
Ramas e asíntotas describen o comportamento das funcións no infinito. Ademais das ramas, temos tres tipos de asíntotas: horizontais (AH), verticais (AV) e oblíquas (AO)

◦ Unha función ten unha **rama infinita** cando $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Por exemplo, todas as funcións polinómicas.

◦ **Asíntota horizontal** en $y=b$ ocorre se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$

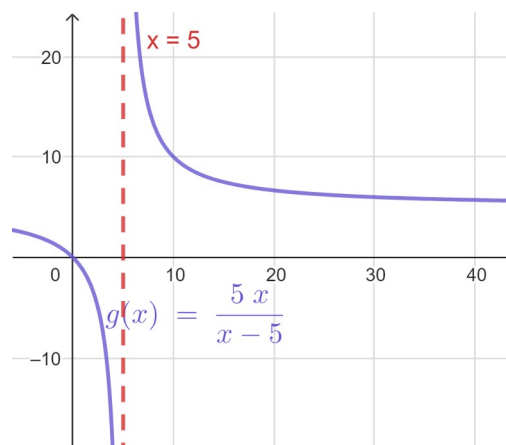
Entre outras, son propias de funcións racionais con

$$\text{Grad NUM} < \text{Grad DEN}$$



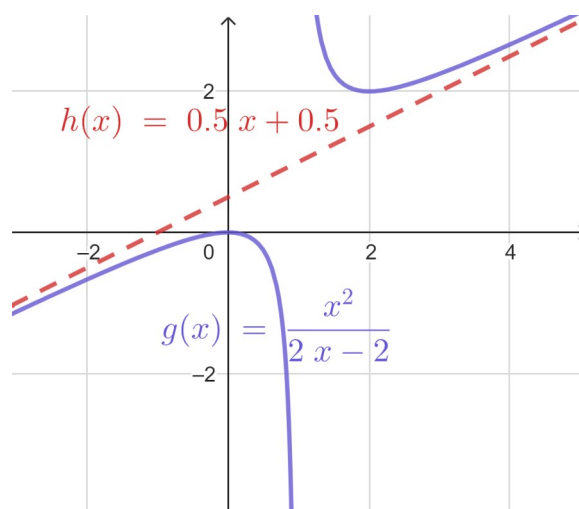
◦ **Asíntota vertical** en $x=a$ ocorre se $\lim_{x \rightarrow a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$

Entre outras, son propias de funcións onde se anula o denominador



◦ **Asíntota oblíqua** en $y=mx+b$ ocorre se a distancia entre $f(x)$ e a recta tende a cero cando x tende a infinito

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx+b)] = 0$$



Ex3: Calcula os seguintes limites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+1}{2} =$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{2-x} =$ c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+4x+4}{x^2-4} =$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-3x+2}{-3x^3+2x^2-x-2} =$
- e) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-1} =$ f) $\lim_{x \rightarrow \infty} -2x^3+x^2 =$ g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} =$ h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{\ln x}} =$
- i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 2^{-x} =$ j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3+2x^2 =$ k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x =$ l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^x =$
- m) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2+3} =$ n) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+1}{2x-4} =$ o) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x-5}{2x^2-3x+2} =$ p) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{x^3+1} =$
- q) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+3x^2+2}{x^2-1} =$ r) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} =$ s) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+3}{x^2-1} =$ t) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2-1} =$

Ex4: Calcular, se existe, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, sendo $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 1 \\ -x^2+4x-1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

Ex5: Obtén $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ nos seguintes casos:

- a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Ex6: Obtén os seguintes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 - \frac{2x^2+1}{x-3} \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x} - \frac{1+2x^2}{2x-1} \right)$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-x} - x)$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} + x)$

Ex7: Determina os valores de a para que a función $f(x) = \begin{cases} a-x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{2}{ax} & \text{se } x > 1 \end{cases}$ sexa continua.

Ex8: Calcula os seguintes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2-x} =$ b) $\lim_{x \rightarrow -0} e^x =$ c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x+1}{x+1} =$ d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x^3-8} =$ e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^2+4x+4} =$
- f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x+4}{x-1} =$ g) $\lim_{x \rightarrow e} \ln x =$ h) $\lim_{x \rightarrow -1} (-x^2+4) =$ i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x} =$ j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3-3x^2}{x} =$

Ex9: Obtén os seguintes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^2+4x+4} =$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-3x+2}{x^4+2x^3-x-2} =$ c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x^2+4x+3} =$
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} =$ e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x =$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3-3x^2}{x} =$
- g) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x}{x+2} =$ h) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x - \sqrt{2x} =$ i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2-1} =$
- j) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^2-4} =$ k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x \cdot e^x =$ l) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x^2+4x+3} =$
- m) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-x^2+2}{-2x^3+5} =$ n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} =$ o) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\ln x} =$

Ex10: A) Calcula os seguintes limites auxiliando-te da gráfica da função:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) =$$

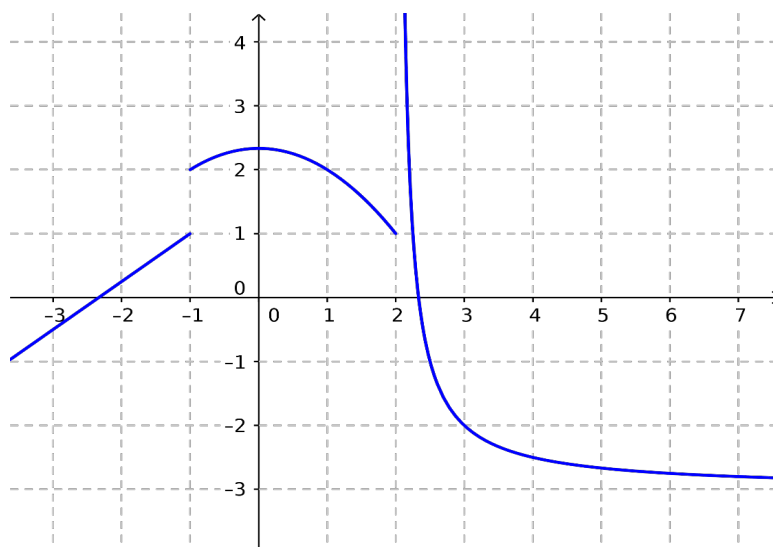
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$



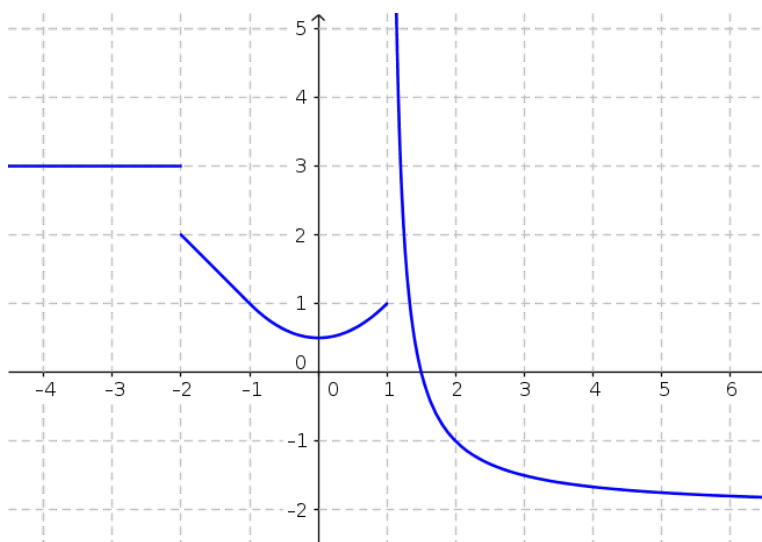
B) Calcula os seguintes limites auxiliando-te da gráfica da função:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \leq -2 \\ -x & \text{se } -2 < x < -1 \\ \frac{x^2+1}{2} & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x-1} - 2 & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \quad b) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \quad d) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \quad f) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$$



Ex11: Calcula os seguintes limites auxiliando-te da gráfica da função:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$$

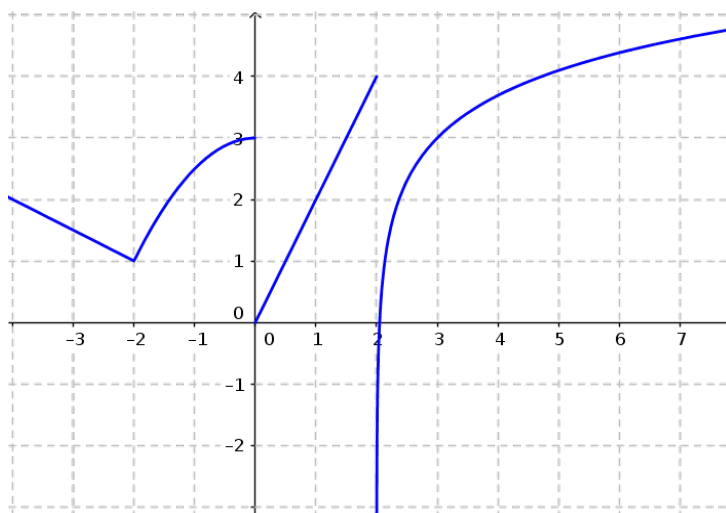
$$c) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$$



Ex12: Estuda a continuidade destas funcións, clasificando o tipo de discontinuidade presente en cada caso

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \frac{x-1}{x^2-2} & \text{b) } g(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-2} & \text{se } x \leq 0 \\ x^2-2 & \text{se } x > 0 \end{cases} & \text{c) } h(x) = \frac{x}{x^2-5} \end{array}$$

Ex13: Determina as asíntotas horizontais e verticais desta función e esboza a gráfica da función xunto coas asíntotas:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \frac{x-1}{x+3} & \text{b) } f(x) = \frac{x^2+2}{x^3-2} & \text{c) } f(x) = \frac{4x^2-4x+1}{x^2+1} \\ \text{d) } f(x) = e^x & \text{e) } f(x) = \log_2(x) & \text{f) } f(x) = x^2+1 \end{array}$$