

1 - Función real de variable real.

1.1.- Función real de variable real,

Ou simplemente **función**, é unha regra ou fórmula que asocia a cada número real x un **único** número real $f(x)$. Esta relación denótase $f: x \in \mathbb{R} \rightarrow y = f(x) \in \mathbb{R}$. Esta asignación soe facerse mediante unha expresión alxébrica como $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.

Distintas maneiras de relacionar pares de números dan lugar a distintas funcións. Unha función que asigne a cada número o seu cadrado menos 3 unidades se pode escribir como $y = x^2 - 3$ ou $f(x) = x^2 - 3$ ou $x \rightarrow x^2 - 3$ ou $x \rightarrow y = f(x) = x^2 - 3$ ou $f: x \rightarrow f(x) = x^2 - 3$ etc.

1.2.- Gráfica de f :

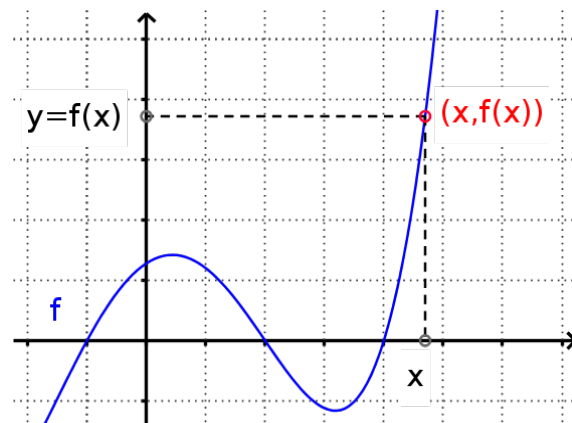
Cada función ten unha gráfica asociada no plano cartesiano.

A gráfica de f é o conxunto de todos os puntos de coordenadas $(x, f(x))$, é dicir: $GR_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x \in \mathbb{R}\}$

1.3.- Variables:

Á primeira variable é a variable independente (**VI**), pois pode tomar calquera valor. O habitual é asignarlle as letras x ou t e represéntase no **eixe horizontal** ou de **abscisas**.

A segunda variable é a variable dependente (**VD**), pois o seu valor obtense a partir do valor da VI. O habitual é asignarlle a letra y e represéntase no eixe vertical ou de ordenadas.



Ex1: Dada a función $f(x) = 5x^2 - 5$, calcula $f(-8)$, $f(-4)$, $f(-2,5)$, $f(0)$, $f(3)$.

Ex2: Dada a función $f(x) = \frac{x+3}{3-x}$, calcula $f(-10)$, $f(5)$, $f(0)$. ¿Poderíamos calcular $f(3)$?

2 - Dominio e percorrido

Dominio dunha función é o conxunto de valores da VI para os que está definida a función:

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que existe } f(x)\} \text{ ou } \text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists f(x)\}.$$

O dominio de moitas función é todo $\mathbb{R}$, pero algunhas funcións poden ter limitado o seu dominio pola imposibilidade de efectuar certas operacións aritméticas ou polo contexto do problema. As operacións que causan restricións no dominio das funcións son:

- A **división por cero**: o denominador dunha función sempre debe ser diferente de cero
- As **raíces de índice par**: o radicando debe ser sempre maior ou igual a cero
- Os **logaritmos**: só se poden calcular para valores estritamente maiores que cero

As funcións polinómicas e exponenciais teñen por dominio a todos os números reais $\mathbb{R}$

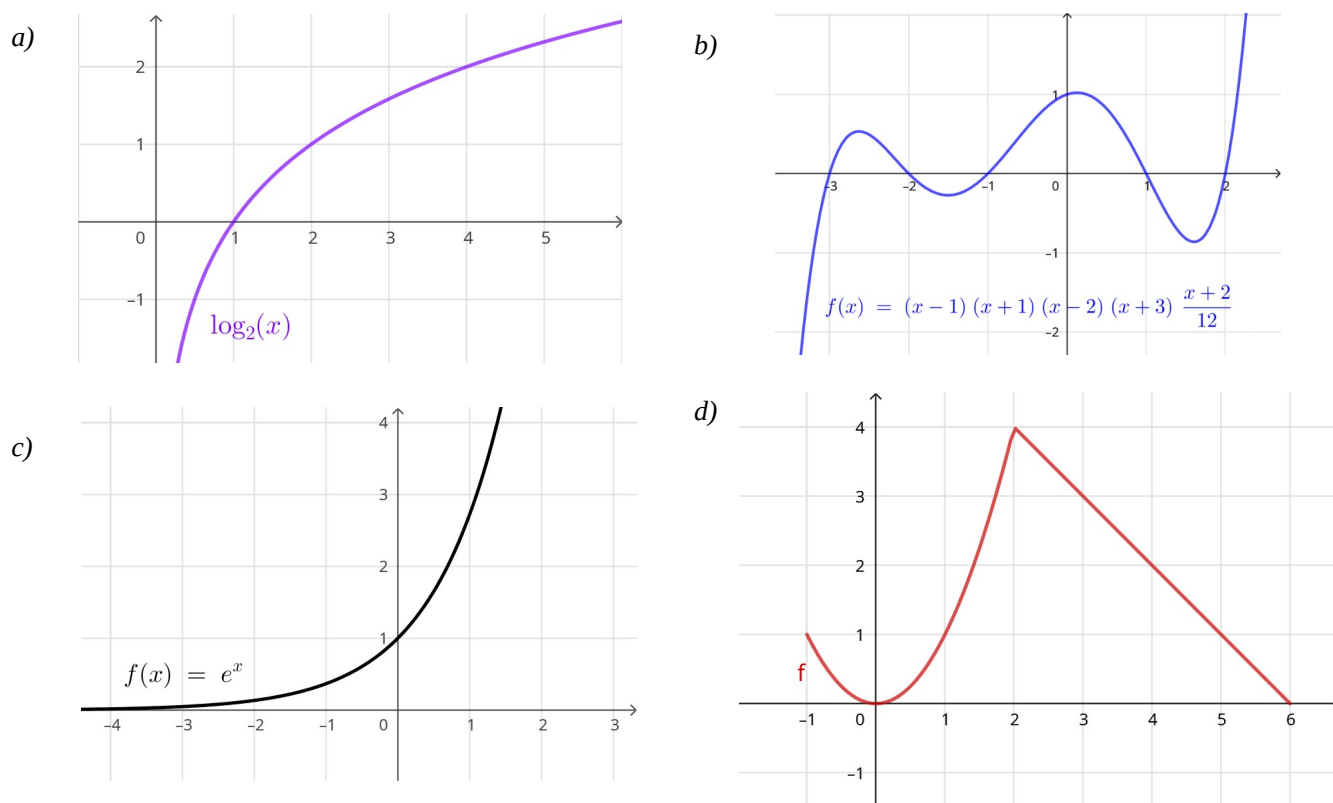
Percorrido, rango ou imaxe dunha función é o conxunto de valores que toma a VD: $\text{Im} = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in \text{Dom } f\}$.

É mais difícil de calcular que o dominio; por exemplo a imaxe da función $f(x) = y = -x^2$ é o conxunto dos n° negativos, ademais do cero: $\text{Im } f =]-\infty, 0]$

Ex3: Obtén o dominio das seguintes funcións:

a) $f(x) = 9 - x^2$	b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$	c) $f(x) = x^3 - 3x + 1$	d) $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$
e) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$	f) $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$	g) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$	h) $f(x) = \log(x+1)$
i) $f(x) = e^x$	j) $f(x) = 2x + e^x$	k) $f(x) = \frac{1}{e^x}$	l) $f(x) = \sqrt{1 + e^x}$
m) $f(x) = \log(x^2 + 1)$	n) $f(x) = \frac{-3x}{x^2 + 2x + 1}$	o) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$	p) $f(x) = \sqrt{3 - 3x}$
q) $f(x) = \sqrt[3]{x}$	r) $f(x) = \sqrt{x+8}$	s) $f_4(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$	t) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$

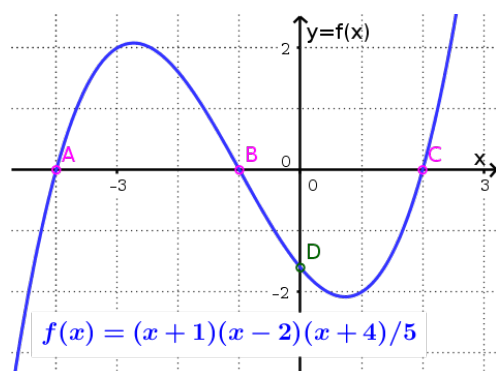
Ex4: Dadas as seguintes gráficas de funcións, indica o seu dominio e percorrido:



Ex5: Usando un programa ou app para facer gráficas, obtén a imaxe das funcións anteriores

3 - Características dunha función.

3.1.- Puntos de corte:



Son os lugares onde a gráfica da función coincide cos eixes de coordenadas. Estes puntos axudan a situar a función no plano e son relativamente fáciles de calcular. Estes puntos teñen algunha coordenada nula ($x=0$ ou $y=0$):

○ Puntos de corte co eixe de abscisas OX

(cando $y=0$): a coordenada x destes puntos son as solucións da ecuación $f(x)=0$

◦ **Puntos de corte co eixe de ordenadas OY**

(cando $x=0$): a coordenada y destes puntos son os valores numéricos de $f(0)$, polo que se f é unha función só hai un destes puntos

Ex6: Obtén os puntos de corte A , B , C e D da función do exemplo anterior

Ex7: Obtén os puntos de corte das funcións do exercicio 1

3.2.- Continuidade:

É necesario o estudo de límites para dar unha definición formal da continuidade dunha función. Intuitivamente unha función é continua cando a súa gráfica pode trazarse con unha liña sen levantar o lapis do papel.

Son continuas (no seu dominio) as funcións elementais:

As **polinómicas**, as **radicais**, as trigonométricas **sen** e **cos**, as **exponenciais** e as **logarítmicas**.

En xeral son continuas as definidas mediante operacións combinadas das anteriores.

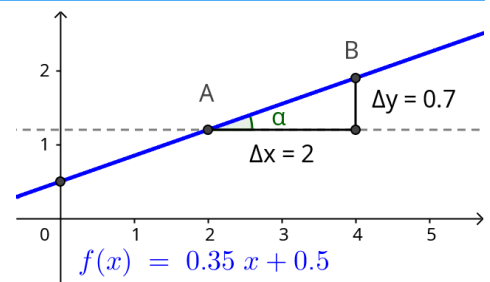
Son descontinuas as funcións cuxo dominio non é continuo, como as racionais que non están definidas para certos números reais.

Ex8: Determina se as funcións do exercicio 1 son continuas ou non, xustificando a resposta

4 - Funcións elementais

4.1.- Funcións polinómicas de grado 1 ou afíns

- A expresión analítica é $y=f(x)=mx+b$, onde **m** é a pendente e **b** é a ordenada na orixe.
- A gráfica é unha recta de pendente **m** que pasa por $(0,b)$.
- É continua e $\text{Dom } f = \mathbb{R}$



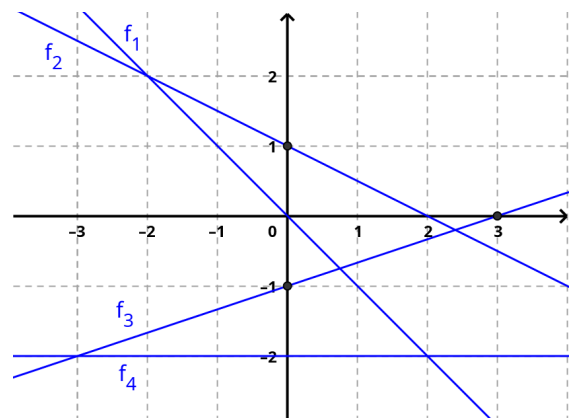
Recordade que: A pendente pódese obter sabendo as coordenadas de dous puntos $A=(a_1, a_2)$ e $B=(b_1, b_2)$ que pertencen a recta: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \text{tg } \alpha$. O valor de b calcúlase coas coordenadas dun punto da recta

NOTA: as rectas horizontais teñen por ecuación $y=k$, con $k \in \mathbb{R}$ e son un tipo de funcións afíns; sen embargo as rectas verticais teñen por ecuación $x=k$, con $k \in \mathbb{R}$ e NON son funcións porque para cada $x \in \mathbb{R}$ non hai un único valor de $y=f(x)$

Ex9: Representa as seguintes funcións afíns

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| a) $f(x)=2x-1$ | b) $f(x)=\frac{x}{2}+1$ |
| c) $f(x)=\frac{x+1}{2}$ | d) $f(x)=-\frac{x}{3}$ |
| e) $f(x)=-\frac{x}{3}+2$ | f) $f(x)=2$ |

Ex10: Obtén a expresión alxébrica destas funcións



4.2.- Funcións polinómicas de grado 2 ou cadráticas

◦ A expresión analítica é $y=f(x)=ax^2+bx+c$.

◦ A **gráfica é unha parábola** con vértice en $V=(v_1, v_2)$ onde $v_1=-\frac{b}{2a}$ e $v_2=f(v_1)$. As ramas da parábola apuntan

a OY^+ cando $a>0$ e cara OY^- cando $a<0$. Se aumenta o valor absoluto do parámetro a , a parábola faise mais estilizada e se diminúe a parábola faise mais achatada.

◦ A función é continua, $\text{Dom } f=\mathbb{R}$

Ex11: Representa as seguintes funcións cadráticas obtendo o seu vértice, os puntos de corte e algún punto adicional en caso necesario

a) $f(x)=x^2+5$ b) $f(x)=x^2+3x+2$ c) $f(x)=\frac{x^2+x}{4}$ d) $f(x)=-x^2+3x+1$ e) $f(x)=\frac{-x^2}{2}-2$

4.3.- Funcións racionais sinxelas

A función de proporcionalidade inversa é o caso mais simple de función racional.

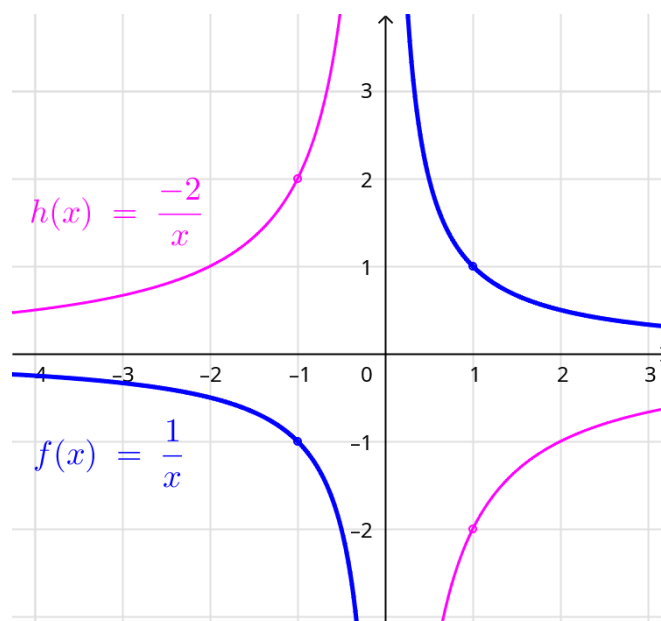
◦ A **expresión analítica** é $y=f(x)=\frac{a}{x}$, $a\neq 0$

◦ A **gráfica** son dúas hipérbolas que pasan por $(1, a)$ e $(-1, -a)$, non corta aos eixes en ningún punto e ten asíntotas en OX e OY .

◦ é descontinua en $x=0$ e $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{0\}$

Ex12: Representa as seguintes funcións

a) $f(x)=\frac{5}{x}$ b) $f(x)=\frac{1}{2x}$ c) $f(x)=\frac{-3}{x}$
d) $f(x)=\frac{-1}{5x}$ e) $f(x)=\frac{1}{x-5}$ f) $f(x)=\frac{2}{x+3}$



4.4.- Funcións irracionais sinxelas

Son funcións do tipo $f(x)=\sqrt{A(x)}$. Se a expresión $A(x)$ é de grado 1, é posible facer unha representación gráfica de forma fácil sabendo que a súa curva é unha *semiparábola* co seu eixe na horizontal. A función é continua,

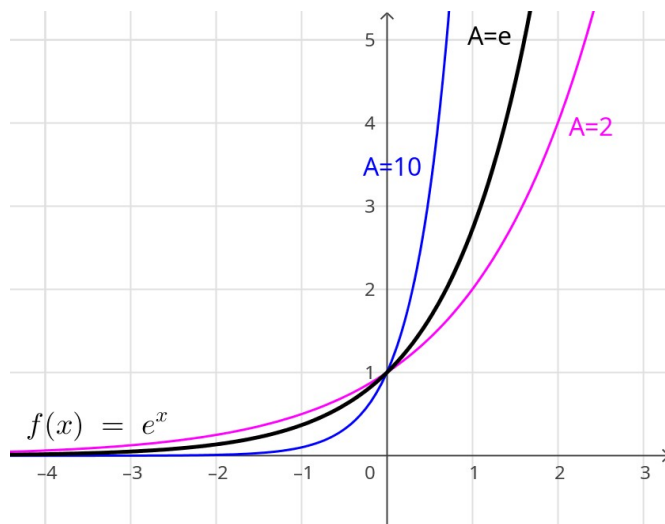
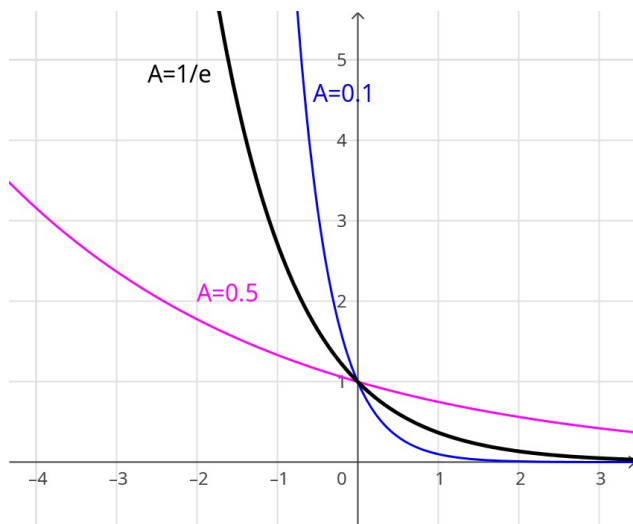
$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} \mid A(x) \geq 0\}$$

4.5.- Función exponencial de base A

◦ A **expresión analítica** é $f(x)=k \cdot A^x$, con $A>0$ e $A\neq 1$, e $k \in \mathbb{R}$ é un parámetro libre que para os casos mais simples é 1.

◦ É unha función continua e está definida para todos os n° reais, logo $\text{Dom } f=\mathbb{R}$.

◦ A súa gráfica é unha curva exponencial. Distinguimos dous casos principais: exponencial decrecente, con $A \in (0,1)$ e exponencial crecente con $A \in (1,+\infty)$



Ex13: Obtén os puntos de corte da función $f(x) = A^x$

Ex14: Representa as funcións

a) $f(x) = 5^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $f(x) = 4^{-x}$

d) $f(x) = 1.05^x$

e) $f(x) = 500 \cdot 1.05^x$

4.6.- Función logarítmica

◦ A **expresión analítica** é $f(x) = \log_a x$, con $a > 0$ e $a \neq 1$.

◦ A súa gráfica é unha curva logarítmica.

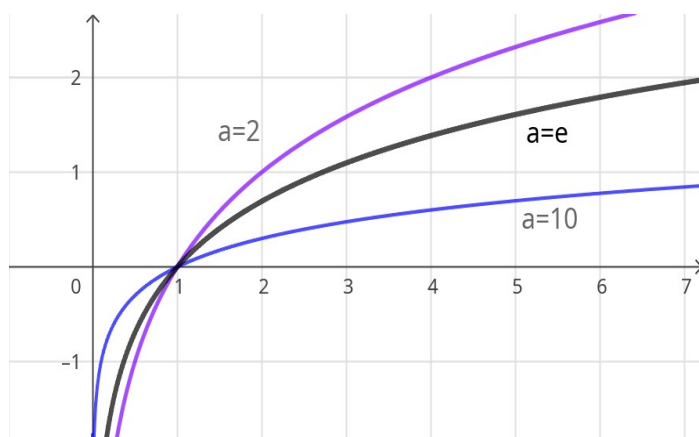
◦ Están definidas para todos os n° estritamente positivos, logo $\text{Dom } f = (0, +\infty)$.

Ex15: Obtén os puntos de corte de $f(x) = \log_a x$

Ex16: Representa as funcións

a) $f(x) = \log_5 x$

b) $f(x) = \log_2(x)$



4.7.- Funcións definidas a anacos

Son funcións que teñen **expresións analíticas diferentes para diferentes intervalos** (ou subconxuntos) da recta (os trozos, fragmentos ou anacos).

Chamamos **puntos de ruptura** aos lugares nos que a función cambia de expresión analítica. Ademais das características de cada fragmento, é importante analizar que ocorre nos puntos de unión das diferentes zonas do dominio. Debemos considerar estas funcións como descontínuas nos puntos de ruptura, salvo que demostramos o contrario.

Ex17: Expresa a función “valor absoluto” como unha función definida a trozos

Ex18: Representa as seguintes funcións definidas a anacos

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{se } x < 0 \\ -x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{se } x < 1 \\ 2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 2 \\ 6-x & \text{se } x \in [2, 6] \\ \sqrt{x-6} & \text{se } x \geq 6 \end{cases}$

4.8.- Composición de funcións:

Se **f** e **g** son dúas funcións reais de variable real, entón defínese unha nova función $g \circ f$ (**f** composta con **g**) como o resultado de aplicar primeiro a función **f** e logo a función **g**: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Cada número real x correspóndese con $f(x)$ e logo $f(x)$ correspóndese con $g(f(x))$: $x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x)) = (g \circ f)(x)$; En xeral $g \circ f \neq f \circ g$

Ex19: Sendo $f(x) = x^2$, $g(x) = x - 1$, $h(x) = \frac{1}{x}$ e $k(x) = e^x$, calcula e simplifica:

- a) $g \circ f$ b) $f \circ g$ c) $h \circ f$ d) $f \circ h$ e) $g \circ k$ f) $k \circ g$ g) $f \circ k$ h) $k \circ f$

Ex20: Sendo $f(x) = \frac{x}{2} + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = x^2 + x$ obtén a expresión de:

- a) $g \circ f$ b) $f \circ f$ c) $g \circ g$ d) $g \circ h$ e) $h \circ f$

Ex21: Dadas as funcións $f(x) = 2^{2x}$, $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = \log(x)$ calcula e simplifica:

- a) $g \circ f$ b) $f \circ g$ c) $h \circ g$ d) $h \circ f$ e) $f \circ h$

Ex22: Para cada unha das seguintes funcións:

- Indica o tipo de función (afín, cadrática, etc) e o tipo de gráfica (recta, parábola, etc)
- Obtén os puntos de corte
- Calcula a pendente ou o vértice se corresponde
- Fai unha representación aproximada

- a) $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^2 - \frac{1}{3}$ b) $f(x) = 10^{-x}$ c) $f(x) = x^2 - 3x - 4$ d) $f(x) = \frac{5-2x}{3}$
- e) $f(x) = \frac{-2}{x}$ f) $f(x) = 5^{-x}$ g) $f(x) = 4 \cdot 2^{-x}$ h) $f(x) = \ln(x+4)$