

Unidade 3 — Inecuacións e sistemas de inecuacións

1 - Inecuacións con unha incógnita

Unha inecuación é unha desigualdade entre dúas expresións alxébricas.

Resolver unha inecuación é calcular o conxunto de valores que cumpren a desigualdade.

A solución dunha inecuación é un conxunto de números.

1.1.- Inecuacións de primeiro grao

Para resolver este tipo de inecuacións procederemos igual que coas ecuacións de primeiro grao, aplicar a mesma operación en ambos membros ata despxar a incógnita.

Hai que ter en conta que se multiplicamos ou dividimos os dous termos por un número negativo, cambia o sentido da desigualdade. Tamén cambia o sentido da desigualdade se aplicamos o inverso ou calquera outra función decrecente.

Exemplo:

$$3(x-2)+5 \leq 4x+1 \Rightarrow 3x-6+5 \leq 4x+1 \Rightarrow -x \leq 2 \Rightarrow x \geq -2$$

A solución da inecuación son os números $x \in [-2, +\infty)$

Ex. 1 Resolve as seguintes inecuacións con unha incógnita:

a) $15x-9+x-5 < 6x+6$

b) $2x+3+2 \cdot (x+1) < -3(1-x)$

c) $\frac{x-3}{2} - \frac{x-2}{8} \leq \frac{x}{2}$

d) $2x-3-\frac{x}{2} > x+\frac{3x+1}{6}$

e) $x+2(x+1)+3(x+2) < \frac{x+38}{2}$

f) $3x-2+\frac{7(x+1)}{3} \geq 4x-\frac{5}{3}-2(x-6)$

1.2.- Inecuacións polinómicas de grao maior ou igual a dous

Para resolver este tipo de inecuacións buscamos as raíces do polinomio e dividimos a recta real en intervalos tomando como extremos devanditas raíces. Despois, estudamos o signo do polinomio en cada un deses intervalos.

Exemplo: $x^2-2x-3 < 0$

1.- Buscamos as raíces do polinomio resolvendo a ecuación $x^2-2x-3=0$. Obtemos $x_1=-1$, $x_2=3$.

2.- Dividimos a recta real nos intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$, $(3, +\infty)$

3.- Estudamos o signo do polinomio nun valor pertencente a cada intervalo.

Por exemplo, $P(-2) > 0$, $P(0) < 0$, $P(4) > 0$.

Como o único intervalo onde se cumpre que $x^2-2x-3 < 0$ é $(-1, 3)$, a solución da inecuación serán os $x \in (-1, 3)$.

Ex. 2 Resolve as seguintes inecuacións de 2 grao con unha incógnita:

a) $x^2-3x-4 \leq 0$

b) $(x-1)(x+4) < -6$

c) $\frac{x^2-1}{2} - \frac{3x-2}{3} \leq \frac{(x+1)^2}{6}$

2 - Inecuacións lineais con dúas incógnitas

Unha inecuación lineal con dúas incógnitas representa un semiplano.

Exemplo: A inecuación $x+2y \leq 4$ representa un semiplano con bordo. A orixe de coordenadas pertence ao semiplano, xa que $0+2 \cdot 0 \leq 4$. Para representar o semiplano:

◦ Trazamos a recta asociada $x+2y=4$ calculando dous puntos calquera dela.

◦ Determinamos a metade que nos interesa do plano determinando se o punto $O=(0,0)$ cumpre ou non a inecuación (ou outro punto se este estivese no bordo).

Exemplo: A inecuación $3x - y > 0$ representa un semiplano sen bordo. O punto $(1,0)$ pertence ao semiplano, xa que $3 \cdot 1 - 0 > 0$

Ex. 3 Resolve graficamente as seguintes inecuacións lineais con dúas incógnitas:

a) $2x - y \leq 3$

b) $3x + 2y > 6$

c) $\frac{3x - y}{2} \geq 2x + 1$

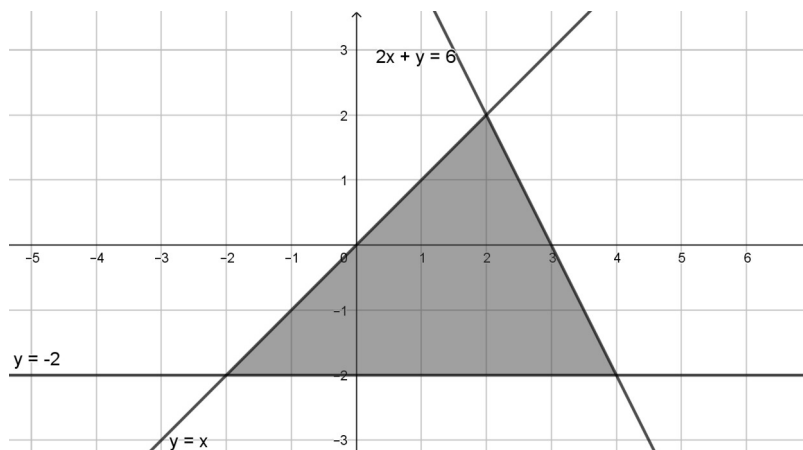
2.1.- Sistemas de inecuacións lineais con dúas incógnitas

A solución dun sistema de Inecuacións lineais con dúas incógnitas está formada por todos os puntos do plano que satisfán todas as ecuacións.

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 6 \\ x \geq y \\ y \geq -2 \end{cases}$$

Como cada inecuación represéntase mediante un semiplano, a rexión que é a intersección de todos eses semiplanos representa a solución do sistema de Inecuacións. Na gráfica, todos os puntos da zona sombreada, incluídos os bordos, son solución do sistema de Inecuacións.



No sistema anterior a solución é acoutada, pero si eliminamos do sistema a inecuación $y \geq -2$ a solución sería non acoutada.

Ex. 4 Resolve graficamente os seguintes sistemas de inecuacións lineais con dúas incógnitas:

a) $\begin{cases} -x + y \leq 1 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x - 3y \leq 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \geq y \\ x \leq 2 \\ y \geq -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 2y \leq -3 \\ 3y - x \leq 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x \geq -2y \\ x \geq y \\ x \leq 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x - y \leq 2 \\ y \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$