

Unidade 3 – Ecuacións e sistemas de ecuacións.

1 - Introducción.

1.1.- Igualdade, identidade e ecuación.

Unha igualdade identifica dous ou máis obxectos matemáticos cuxo valor numérico é o mesmo	Unha identidade identifica dúas ou máis expresións que son sempre iguais, independentemente do valor que substitúa á variable.	Unha ecuación identifica dúas expresións que só son iguais para algúns valores numéricos,
$\frac{3}{2} - 5 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} - 5 + \frac{5}{4} = \frac{-9}{4}$	$5 \cdot \left(a - \frac{1}{b}\right) = 5a - \frac{5}{b}$	$5 \cdot \left(a - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{4}$

1.2.- Propiedades e elementos das ecuacións.

Ás expresións separadas polo igual son o 1º membro e o 2º membro . En xeral non hai máis de 2 membros nunha ecuación:	$\overbrace{\sqrt{a+10}}^{1^\circ \text{ membro}} = \overbrace{a-10}^{2^\circ \text{ membro}}$
Se calculamos o valor numérico en cada membro e coincide, o número usado é unha solución da ecuación.	a=15 é solución porque: $\sqrt{15+10}=5$ e tamén $15-10=5$
Dúas ecuacións son equivalentes cando teñen as mesmas solucións: $(E_1) \quad 9x^2 - 2 = 2 \Rightarrow x = \pm \frac{2}{3} \quad (E_2) \quad x^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow x = \pm \frac{2}{3} \quad \text{Logo } E_1 \text{ e } E_2 \text{ son equivalentes}$	
Se facemos a mesma operación (*) en ambos membros dunha ecuación obtemos ecuacións equivalentes, é dicir, as solucións non varían. A este proceso se lle chama transformación equivalente . Por exemplo, sumar e restar; multiplicar ; e dividir por unha expresión non nula: $6\frac{a}{5} = a + 7 \Rightarrow 6a = 5a + 35 \Rightarrow a = 35$	
(*) Non todas as operacións conservan as solucións: hai transformacións que non son exactamente equivalentes : - As potencias pares poden crear solucións falsas: $\sqrt{a+10} = a - 10 \quad (x=15) \Rightarrow a+10 = a^2 - 20a + 100 \Rightarrow a^2 - 21a + 90 = 0 \Rightarrow (a=15, a=6)$ pero a=6 non é solución O correcto é VERIFICAR que as solucións obtidas son solucións da ecuación inicial . - Dividir por expresións que PODEN SER cero fai perder solucións: $x^2 = x \quad (x=0, x=1) \Rightarrow x = 1$ (perdemos x=0) O correcto é VERIFICAR se as raíces do divisor son solución . - Multiplicando por expresións que PODEN SER cero fai aparecer solucións: $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \quad (x=1) \Rightarrow x^2 = x \quad (x=0; x=1)$ O correcto é VERIFICAR que as solucións non son raíces dos denominadores .	

Unha ecuación pode ter 0, 1, 2, ... infinitas solucións. SE todos os números son solucións, chamámoslle igualdade ou identidade. OLLO!! Pode ter infinitas solucións pero non que todos os números sexan solución:

Ningunha solución	Unha solución	Dúas solucións	Infinitas solucións	Calquera número é solución
$x+2 = x-2$	$x+2 = -2$	$x^2 - 2 = 2$	$x - y = 2$	$x+2 = 3x-2 \quad x+4 = 2$

Clasificaremos as ecuacións segundo as operacións que afecten ás incógnitas, o que tamén nos da o método de resolución que debemos usar para resolvela.

2 - Ecuacións de unha incógnita.

2.1.- Ecuacións onde a incógnita aparece só unha vez.

Son ecuacións nas que, unha vez reducidas, a incógnita só aparece unha vez. Poden resolverse usando unha transformación inversa (coas precaucións mencionadas antes acerca da perda ou aparición de solucións).	$\frac{x^2}{3}=2 \xrightarrow{\cdot 3} x^2=6 \xrightarrow{\sqrt{}} x=\pm\sqrt{6}$	$e^{t+2}=2 \xrightarrow{\ln} t+2=\ln 2 \xrightarrow{-2} t=-2+\ln 2$
	$\frac{-1}{x}=3 \xrightarrow{\text{inv}} \frac{x}{-1}=3 \xrightarrow{\text{op}} x=-3$	$\ln\left(\sqrt{\frac{x}{5}}\right)=1 \xrightarrow{e^{}} e^{\ln\left(\sqrt{\frac{x}{5}}\right)}=e^1 \xrightarrow{\text{def}} \sqrt{\frac{x}{5}}=e \xrightarrow{\cdot 5} x=5\cdot e^2$

2.2.- Ecuacións polinómicas.

Unha vez reducidas son do tipo $P(x)=0$ onde P é un polinomio. Resólvense atopando as súas raíces, se é posible.

Ecuacións bicadradas: Son un tipo especial de ecuación polinómica que se transforma nunha ecuación de 2º grao con un cambio de variable. A forma xeral é $a\cdot x^4+b\cdot x^2+c=0$ (ec_1) (1) Facendo $x^2=t$ e $x^4=t^2$ a ecuación pasa a ser de 2º grao na variable t: $a\cdot t^2+b\cdot t+c=0$ (ec_2). (2) Tras obter as solucións da (ec_2) desfacemos o cambio con $x^2=t$ e atopamos os valores de x.	$x^4+x^2-6=0 \Rightarrow \{x^2=t; x^4=t^2\} \xrightarrow{(1)}$ $\Rightarrow t^2+t-6=0 \Rightarrow t_1=2; t_2=-3 \xrightarrow{(2)}$ $\begin{cases} x^2=t_1=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \\ x^2=t_2=-3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-3} \text{ [N]} \end{cases}$ As solucións son $x=-\sqrt{2}$ e $x=\sqrt{2}$
--	--

2.3.- Ecuacións racionais.

Só aparecen fraccións alxébricas e polinomios. Resólvense igualando os denominadores e transformándoa nunha ecuación polinómica: $\frac{P(x)}{A(x)}=\frac{Q(x)}{A(x)} \Rightarrow P(x)=Q(x) \text{ se } A(x)\neq 0.$ Hai que descartar as solucións obtidas que sexan raíces do denominador.	$\frac{1}{x}=x \xrightarrow{\cdot x} \frac{1}{x}\cdot x=\frac{x\cdot x}{x} \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$
--	---

2.4.- Ecuacións con radicais.

A incógnita aparece dentro dalgún radical. Para resolvela debemos: (1) illar o radical, para que quede só nun dos membros (2) elevar ambos membros á potencia axeitada (3) Repetir dende o paso (1) ata que quede unha ecuación polinómica e resolvela. (4) Hai que comprobar que as solucións obtidas verifican a ecuación orixinal	$\sqrt{2x^2+6x}-3=x \xrightarrow{(1)} \sqrt{2x^2+6x}=x+3 \xrightarrow{(2)}$ $(\sqrt{2x^2+6x})^2=(x+3)^2 \Rightarrow 2x^2+6x=x^2+6x+9 \Rightarrow$ $\xrightarrow{(3)} x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3$ Se $x=3 \Rightarrow \sqrt{2\cdot 3^2+6\cdot 3}-3 \stackrel{?}{=} 3 \Rightarrow \dots \Rightarrow 3$ é solución Se $x=-3 \Rightarrow \sqrt{2\cdot (-3)^2+6\cdot (-3)}-3 \stackrel{?}{=} -3 \Rightarrow \dots \Rightarrow -3$ é solución
---	--

2.5.- Ecuacións logarítmicas

A incógnita aparece no argumento ou na base dun logaritmo. Usamos as propiedades dos logaritmos para transformar as ecuacións ata chegar a: $\log_a P(x)=\log_a Q(x) \Rightarrow P(x)=Q(x)$ - Tamén poderemos resolver algunha ecuación coa definición de logaritmo. Hai que comprobar que as solucións obtidas verifican a ecuación orixinal.	$\log(x-2)+\log(x+5)=1 \Rightarrow$ $\log[(x-2)(x+5)]=\log 0 \Rightarrow$ $(x-2)(x+5)=0 \Rightarrow$ $x=2$ (solución válida) e $x=-5$ (non válida)
--	---

2.6.- Ecuacións exponenciais

A incógnita aparece no expoñente dunha potencia. Usamos as propiedades das potencias e dos logaritmos para transformar as ecuacións ata chegar a:

$$A^{P(x)} = A^{Q(x)} \Rightarrow P(x) = Q(x)$$

Outras ecuacións poden resolverse aplicando un logaritmo en ambos membros ou facendo un cambio de variable do tipo $t = A^x$

$$2^{x^2-1} = 8 \Rightarrow 2^{x^2-1} = 2^3 \Rightarrow x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x = \pm 2$$

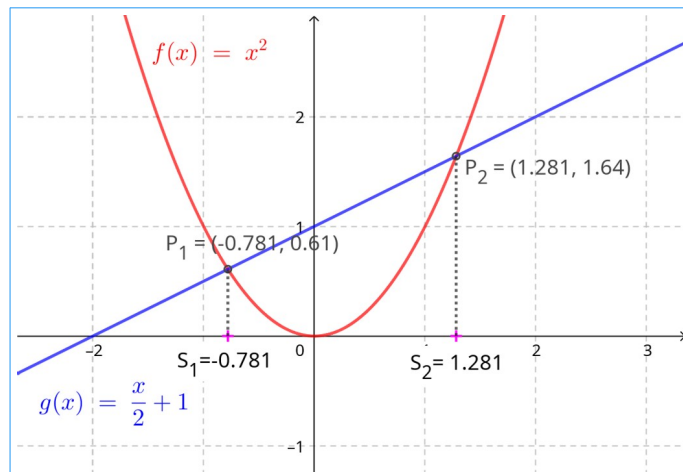
$$2^{2x+1} = 9 \cdot 2^x - 4 \Rightarrow 2 \cdot (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 4 = 0 \quad t=2^x$$

$$2 \cdot t^2 - 9 \cdot t + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} = 2^x \Rightarrow x = -1 \\ t = 4 = 2^x \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

2.7.- Resolución gráfica de ecuacións

Usaremos esta técnica en varias situacións diferentes:

- Para atopar as **solucións aproximadas** dunha ecuación que non podemos resolver doutro xeito.
- Para atopar as coordenadas dos puntos de corte entre gráficas de funcións ou curvas.
- Para analizar o número de solucións dunha ecuación.
- Tamén nos axudará a resolver inecuacións de calquera tipo



O método consiste en:

(1) Definir dúas funcións **f** e **g** cuxa expresión analítica se corresponde con cada un dos membros da ecuación:

$$\underbrace{x^2}_{f(x)} = \underbrace{\frac{x}{2} + 1}_{g(x)} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = x^2 \\ g(x) = \frac{x}{2} + 1 \end{cases}$$

Debemos resolver a ecuación $f(x) = g(x)$ [ec 2]. **f(x)** e **g(x)** son as alturas (=ordenada) que alcanza cada gráfica no plano para cada valor de x . Cando as alturas coinciden para un certo valor de x , a ecuación 2 cúmprese.

(2) Representamos graficamente cada unha das funcións e buscamos as coordenadas dos seus puntos de corte.

(3) A **abscisa** de cada punto de corte é unha solución da ecuación (coordenada X de cada punto).

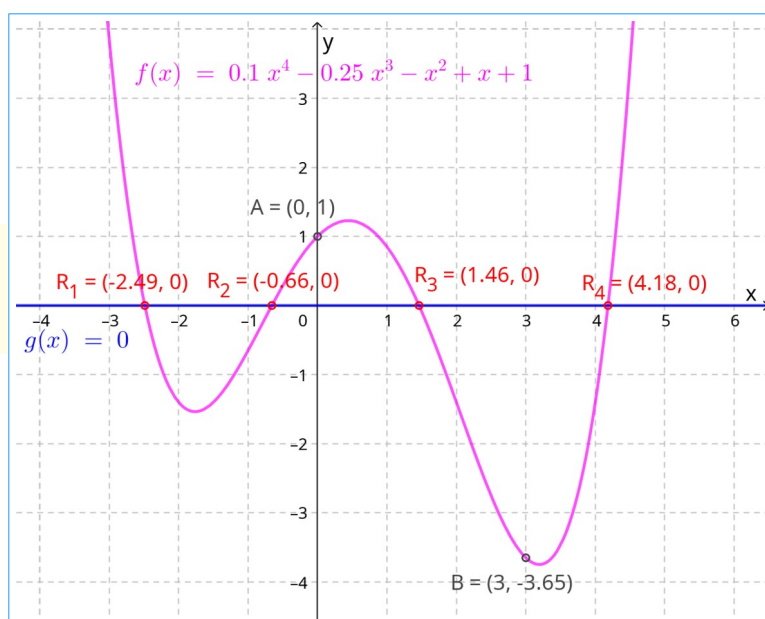
Puntos de corte co eixe OX

Un *caso particular* do anterior (é dicir, un caso máis concreto) ocorre cando o segundo membro da ecuación é nulo. Entón a segunda función sería $g(x) = 0$, cuxa gráfica é o eixe das X.

Resolver graficamente unha ecuación $f(x) = 0$ consiste en atopar a coordenada X dos puntos de corte da función **f** co eixe **OX**.

Neste exemplo, f é un polinomio de grao 4 con coeficientes racionais e as abscisas dos R_i son tamén racionais (non podemos atopalas con Ruffini)

$$0,1x^4 - 0,25x^3 - x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$



3 - Sistemas de ecuacións lineais

3.1.- Sistemas de ecuacións lineais

Unha **ecuación lineal** con dúas ou tres incógnitas é unha ecuación polinómica de grado 1.

- Son da forma $a \cdot x + b \cdot y = k$ (2 incógnitas) ou $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = k$ (3 incógnitas)
- A solución dunha ecuación lineal con dúas incógnitas é calquera par de números (x,y) que cumpren a igualdade.
- Teñen infinitas solucións que se representan nun plano. Se se debuxan todas as solucións dunha ecuación lineal forman unha recta.
- Resolver un sistema de ecuacións consiste en atopar unha solución que sirva para todas as ecuacións.
- Graficamente, a solución dun sistema de dúas ecuacións lineais con dúas incógnitas é o punto de corte das rectas que o forman. A partir desta característica podemos determinar o número de solucións dun sistema lineal de 2 incógnitas.

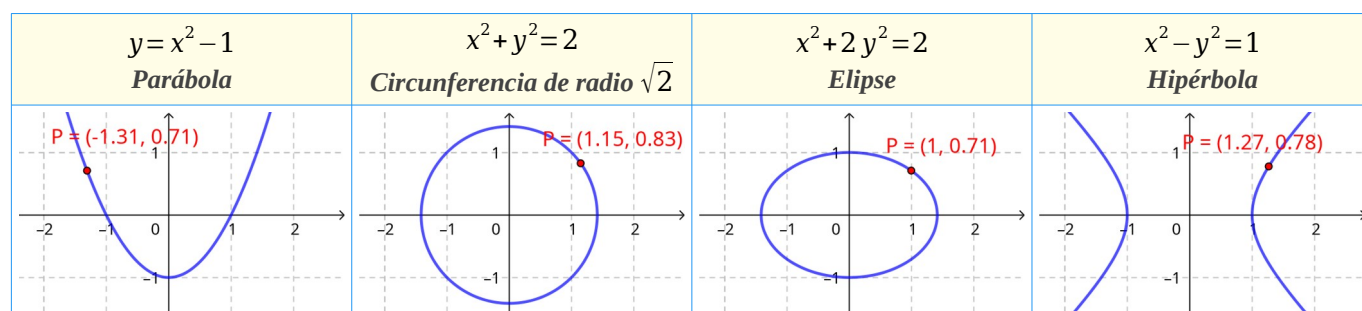
Sistema incompatible: Ningunha solución	Sistema compatible determinado: UNHA única solución	Sistema compatible indeterminado: infinitas solucións
As rectas son	As rectas son	As rectas son
$\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=-3 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=6 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{cases}$

3.2.- Métodos de resolución de sistemas de ecuacións (lineais e non lineais):

Método de reducción	Método de igualación	Método de substitución:
Consiste en sumar ou restar as ecuacións entre si de forma que se elimine algunha das incógnitas. Pode ser necesario multiplicar algunha ecuación por un número adecuado.	Consiste en despexar a mesma incógnita en cada ecuación e igualar as expresións resultantes:	Consiste en despexar unha incógnita nunha ecuación e substituír a súa expresión na outra ecuación.

3.3.- Sistemas de ecuacións non lineais de dúas incógnitas:

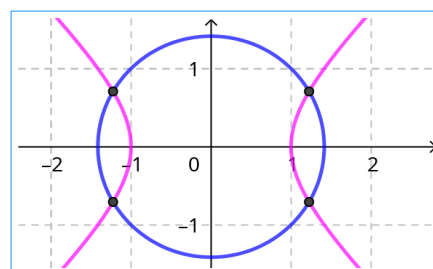
- Unha ecuación NON lineal ten algún termo que non é un monomio de grado 1, como: x^2 ; $\sqrt{x}$; $\log x$; x^{-2} ; e^x ; ...
- Unha ecuación NON lineal soe ter infinitas solucións, pero cando se representan nun plano NON forman unha recta, senón curvas do plano:



- Graficamente, a solución dun sistema NON lineal son os puntos de corte das curvas ou rectas que o forman. A partir desta característica podemos determinar o número de solucións dun sistema lineal de 2 incógnitas.

- Ao resolver un sistema NON lineal poden aparecer solucións múltiples que se corresponden cos numerosos puntos de corte que poden formar dúas curvas:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$



3.4.- Resolución de sistemas de ecuacións de 3 incógnitas. Método de Gauss

Os métodos estudados con dúas incógnitas son válidos con máis incógnitas, pero poden ser moi difíciles e labirínticos se o sistema ten poucos **coeficientes nulos**. Nese caso o máis práctico é aplicar o **método de Gauss**, que é como o método de redución aplicado varias veces para eliminar dúas incógnitas dunha ecuación.

Sistema triangular:

As ecuacións son da forma **3 incógnitas | 2 incógnitas | 1 incógnita**. Pode resolverse despexando as incógnitas unha despois de outra:

$\begin{cases} x+y+z=18 \\ x-z=6 \\ \frac{z}{3}-1=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{recolocando}} \begin{cases} y+x+z=18 \\ x-z=6 \\ \frac{z}{3}=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{desp. } z} \begin{cases} y+x+z=18 \\ x-z=6 \\ z=3 \end{cases} \xrightarrow{\text{subst. } z} \begin{cases} y+x+3=18 \\ x=9 \\ z=3 \end{cases} \xrightarrow{\text{subst. } x} \begin{cases} y=6 \\ x=9 \\ z=3 \end{cases}$				
Sistema triangular	Reordenando as incógnitas vese a forma triangular	Despexamos a incógnita solitaria z	Substituímos z nas outras ecuacións e despexamos x na E₂	Substituímos x na E₁ e despexamos y

Sistema con moitos coeficientes nulos:

Moitos dos coeficientes das incógnitas son cero, polo que esas incógnitas non están presentes na ecuación. Poden resolverse combinando os métodos elementais de forma combinada. O sistema triangular é un destes sistemas

$\begin{cases} x+z=1 \\ x-z=-\frac{1}{3} \\ x-2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=\frac{2}{3} \Rightarrow x=\frac{1}{3} \\ x-z=-\frac{1}{3} \\ x-2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}-z=-\frac{1}{3} \Rightarrow z=-\frac{2}{3} \\ x-2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ z=-\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}-2y-\frac{2}{3}=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2} \end{cases}$			
Sistema con moitos ceros	Sumando E₁ e E₂ eliminamos z e obtemos x	Substituíndo x en E₁ ou E₂ obtemos z	Substituíndo x e z en E₃ obtemos y

Sistema case completo. Método de Gauss

Poucos ou ningún dos coeficientes das incógnitas son nulos. Aplicando o método de redución varias veces convertemos o sistema en triangular.

$$\begin{cases} x+z=1 \\ x-z=-\frac{1}{3} \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$