

EJERCICIOS RESUELTOS

Bloque 1: Teorema de Bolzano (Existencia de raíces)

Ejercicio 1

Demuestra que la ecuación polinómica $x^4 + 3x - 1 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo cerrado $[0, 1]$.

- **Solución:**

Consideramos la función $f(x) = x^4 + 3x - 1$, la cual es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser una función polinómica, y por lo tanto, es continua en el intervalo cerrado $[0, 1]$

- Calculamos los valores de la función en los extremos del intervalo:

$$f(0) = 0^4 + 3(0) - 1 = -1 < 0$$

$$f(1) = 1^4 + 3(1) - 1 = 3 > 0$$

Como la función es continua en $[0, 1]$ y toma valores de signo contrario en sus extremos ($f(0) \cdot f(1) < 0$), aplicando el **Teorema de Bolzano** se garantiza la existencia de al menos un punto $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$. Por lo tanto, la ecuación tiene al menos una raíz real en dicho intervalo.

Ejercicio 2

Prueba que la función trigonométrica $f(x) = x + \sin(x) - 1$ corta al eje de abscisas en algún punto del intervalo $[0, \pi]$

- **Solución:**

La función $f(x) = x + \sin(x) - 1$ es la suma de una función polinómica y una función trigonométrica, ambas continuas en toda la recta real, por lo que $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[0, \pi]$

Evaluamos los extremos del intervalo:

$$f(0) = 0 + \sin(0) - 1 = -1 < 0$$

$$f(\pi) = \pi + \sin(\pi) - 1 = \pi - 1 \approx 2.14 > 0$$

Al cumplirse las hipótesis del **Teorema de Bolzano** (continuidad y cambio de signo en los extremos), se demuestra que existe al menos un valor $c \in (0, \pi)$ tal que $f(c) = 0$, lo que significa que la gráfica corta al eje X en ese intervalo.

Ejercicio 3

Demuestra que el polinomio $P(x) = x^3 - 3x + 1$ posee exactamente tres raíces reales utilizando el Teorema de Bolzano.

- **Solución:**

La función es continua en toda la recta real por ser polinómica. Evaluamos la función en varios puntos estratégicos:

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 1 = -8 + 6 + 1 = -1 < 0$$

$$\begin{aligned}f(0) &= 0^3 - 3(0) + 1 = 1 > 0 \\f(1) &= 1^3 - 3(1) + 1 = -1 < 0 \\f(2) &= 2^3 - 3(2) + 1 = 8 - 6 + 1 = 3 > 0\end{aligned}$$

Aplicando el **Teorema de Bolzano** de forma independiente en los intervalos cerrados $[-2,0]$, $[0,1]$ y $[1,2]$ aseguramos la existencia de al menos una raíz en $(-2, 0)$, otra en $(0, 1)$ y una tercera en $(1, 2)$. Al ser un polinomio de grado 3, el Teorema Fundamental del Álgebra determina que no puede tener más de tres raíces, por lo que posee exactamente tres raíces reales.

Ejercicio 4

Determina si el polinomio de grado par $P(x) = x^{4444} - 4x^{2222} - 1$ tiene alguna raíz real negativa.

- **Solución:**

Definimos la función $f(x) = x^{4444} - 4x^{2222} - 1$, que es continua en todo $\mathbb{R}$ por su naturaleza polinómica.

Analizamos el comportamiento con valores negativos en un intervalo semi-arbitrario como $[-4, -1]$

$$f(-4) = (-4)^{4444} - 4(-4)^{2222} - 1 > 0$$

(debido a que el término de mayor grado predomina ampliamente)

$$f(-1) = (-1)^{4444} - 4(-1)^{2222} - 1 = 1 - 4 - 1 = -4 < 0$$

Dado que la función es continua y cambia de signo en los extremos del intervalo $[-4, -1]$ por el **Teorema de Bolzano** existe un valor $c \in (-4, -1)$ tal que $f(c) = 0$. Al estar este intervalo contenido por completo en los números reales negativos, queda demostrado que el polinomio tiene al menos una raíz real negativa.

Bloque 2: Teorema de los Valores Intermedios (Intersección de curvas)

Ejercicio 5

Dadas las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = 4 - x$, demuestra que sus gráficas se cortan en al menos un punto del intervalo $[0,2]$

- **Solución:**

Definimos una función auxiliar que represente la diferencia entre ambas:

$$h(x) = f(x) - g(x) = e^x + x - 4$$

La función $h(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[0,2]$ por ser la combinación elemental de una función exponencial y una polinómica.

Evaluamos los extremos:

$$h(0) = e^0 + 0 - 4 = 1 - 4 = -3 < 0$$

$$h(2) = e^2 + 2 - 4 = e^2 - 2 \approx 7.39 - 2 = 5.39 > 0$$

Aplicando el **Teorema de Bolzano** a la función auxiliar $h(x)$, garantizamos que existe un punto $c \in (0, 2)$ tal que $h(c) = 0$. Esto implica directamente que $f(c) - g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = g(c)$, demostrando que las curvas se cortan en dicho punto.

Ejercicio 6

Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ de forma que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$. Demuestra formalmente que existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

- **Solución:**

Definimos la función diferencia $h(x) = f(x) - g(x)$. Al ser f y g continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ su resta h también es una función continua en $[a, b]$

Analizamos los signos en los extremos:

$$h(a) = f(a) - g(a) > 0 \quad (\text{ya que } f(a) > g(a))$$

$$h(b) = f(b) - g(b) < 0 \quad (\text{ya que } f(b) < g(b))$$

Al cumplirse que $h(x)$ es continua en $[a, b]$ y que tiene signos opuestos en los extremos ($h(a) \cdot h(b) < 0$), el **Teorema de Bolzano** asegura la existencia de un punto $c \in (a, b)$ de modo que $h(c) = 0$. Sustituyendo la definición de h , obtenemos $f(c) - g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = g(c)$

Ejercicio 7

Una función continua $f(x)$ definida en el intervalo $[-1, 3]$ cumple que $f(-1) = -2$ y $f(3) = 5$. Razona si es posible asegurar que la función toma el valor $y = 2$ en el interior de dicho intervalo.

- **Solución:**

Sí, es totalmente posible asegurarlo. El **Teorema de los Valores Intermedios** (Teorema de Darboux) establece que si una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.

En este enunciado, la función es continua en $[-1, 3]$ con $f(-1) = -2$ y $f(3) = 5$. Como el valor propuesto $K = 2$ se encuentra comprendido estrictamente entre ambos extremos ($-2 < 2 < 5$), el teorema garantiza la existencia de al menos un valor $c \in (-1, 3)$ tal que $f(c) = 2$.

Bloque 3: Teorema de Weierstrass (Acotación y extremos absolutos)

Ejercicio 8

Dada la función racional $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ justifica razonadamente si se puede garantizar la existencia de un máximo absoluto y un mínimo absoluto en el intervalo cerrado $[-2, 3]$

- **Solución:**

El denominador $x^2 + 1$ no tiene raíces reales (nunca se anula para ningún valor de x). Por tanto, el dominio de esta función racional es todo $\mathbb{R}$ lo que significa que $f(x)$ es continua en toda la recta real y, por ende, es continua en el intervalo cerrado $[-2, 3]$

Al tratarse de una función continua en un intervalo cerrado y acotado, se cumplen todas

las condiciones del **Teorema de Weierstrass**. Este teorema garantiza matemáticamente que la función alcanzará un máximo absoluto y un mínimo absoluto dentro de dicho intervalo.

Ejercicio 9

Estudia si la función exponencial decreciente $f(x) = e^{-x}$ está acotada en el intervalo semiabierto $(0,2]$ y si el Teorema de Weierstrass permite deducir la existencia de sus extremos absolutos en dicho intervalo.

- **Solución:**

La función $f(x) = e^{-x}$ es continua en todo su dominio. En el intervalo semiabierto $(0,2]$ los valores de la función se encuentran acotados, ya que oscilan entre $f(2) = e^{-2} \approx 0.135$ y el límite lateral $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1$

Sin embargo, el intervalo $(0,2]$ **no es un intervalo cerrado**. Debido a esto, no se cumple la hipótesis fundamental del **Teorema de Weierstrass**, por lo que no puede emplearse para asegurar la existencia de extremos absolutos. Analizando la función, vemos que alcanza su mínimo absoluto en $x = 2$, pero no posee máximo absoluto en este intervalo, ya que el valor superior 1 actúa como cota superior (supremo) pero nunca llega a ser alcanzado por la función.

Ejercicio 10

Determina si la función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

alcanza su máximo absoluto en el intervalo cerrado $\setminus [0, 1] \setminus$. Explica su relación con el Teorema de Weierstrass.

- **Solución:**

Analizamos la continuidad de la función en el punto de ruptura $x = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 \\ f(1) &= 3 \end{aligned}$$

Como el límite por la izquierda y el valor en el punto no coinciden $\left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq f(1) \right)$ la función presenta una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 1$.

Al no ser una función continua en todo el intervalo cerrado $[0,1]$ **no se cumplen las hipótesis del Teorema de Weierstrass**, por lo que el teorema no asegura nada. No obstante, si analizamos los valores de manera directa, observamos que en $x = 1$ la función vale 3, mientras que para cualquier otro punto $\forall x \in [0,1)$ se cumple que $f(x) < 1$. Por lo tanto, la función sí tiene un máximo absoluto en este caso particular, localizado en el punto $(1, 3)$.

Bloque 4: Problemas con Parámetros Desconocidos

Ejercicio 11

Dada la función $f(x) = x^3 + a \cdot x^2 + 4x - 5$, determina para qué valores del parámetro real a se puede asegurar, mediante el Teorema de Bolzano, que la función tiene al menos una raíz en el intervalo cerrado $[0,2]$

- **Solución:**

La función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser una función polinómica, luego es continua en el intervalo cerrado $[0,2]$ Para poder aplicar el Teorema de Bolzano, requerimos que la función cambie de signo en los extremos de dicho intervalo, es decir, que se cumpla la condición $f(0) \cdot f(2) < 0$.

Calculamos los valores de la función en ambos extremos:

$$f(0) = 0^3 + a(0)^2 + 4(0) - 5 = -5$$

$$f(2) = 2^3 + a(2)^2 + 4(2) - 5 = 8 + 4a + 8 - 5 = 4a + 11$$

Como el valor de $f(0)$ es una constante negativa (-5), para que exista un cambio de signo es obligatorio que el valor de $f(2)$ sea estrictamente positivo:

$$4a + 11 > 0 \Rightarrow 4a > -11 \Rightarrow a > -\frac{11}{4}$$

Por tanto, para cualquier valor de $a \in \left(-\frac{11}{4}, +\infty\right)$ el Teorema de Bolzano garantiza que la ecuación tiene al menos una raíz en el intervalo abierto $(0, 2)$.

Ejercicio 12

Se considera la función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcula el valor del parámetro a para que se pueda aplicar el Teorema de Weierstrass en el intervalo cerrado $[0,2]$

- **Solución:**

El Teorema de Weierstrass exige que la función sea continua en el intervalo cerrado indicado, en este caso $[0,2]$ Dado que ambos trozos son funciones polinómicas continuas por separado, el único punto conflictivo es el punto de cambio de definición, $x = 1$. Forzamos la continuidad en $x = 1$:

1. Límite por la izquierda: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + a) = 2(1) + a = 2 + a$

2. Límite por la derecha: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 3x + 5) = 1^2 - 3(1) + 5 = 3$

3. Valor de la función en el punto: $f(1) = 2 + a$

Para asegurar la continuidad, igualamos ambos límites laterales:

$$2 + a = 3 \Rightarrow a = 3 - 2 = 1$$

Si el parámetro toma el valor $a = 1$, la función resulta continua en todo el intervalo $[0,2]$ y el Teorema de Weierstrass garantiza la existencia de un máximo y un mínimo absoluto en dicho intervalo.

Ejercicio 13

Determina el valor de la constante k para que la función $f(x) = k \cdot e^x - x$ cumpla las hipótesis del Teorema de los Valores Intermedios en el intervalo $[0,1]$ respecto al valor intermedio $y = 2$, sabiendo que se debe verificar que $f(0) < 2$ y $f(1) > 2$.

- **Solución:**

La función es continua en toda la recta real por ser la diferencia de una función exponencial y una función lineal, por lo que es continua en $[0,1]$. Estudiamos las inecuaciones impuestas por las condiciones de los extremos:

Condición 1: $f(0) < 2$

$$k \cdot e^0 - 0 < 2 \Rightarrow k \cdot 1 < 2 \Rightarrow k < 2$$

Condición 2: $f(1) > 2$

$$k \cdot e^1 - 1 > 2 \Rightarrow k \cdot e > 3 \Rightarrow k > \frac{3}{e} \approx 1.103$$

Combinando ambas inecuaciones en un único intervalo, obtenemos que el parámetro k debe cumplir la condición:

$$\frac{3}{e} < k < 2$$

Para cualquier valor de k contenido en este intervalo abierto, se satisfacen las hipótesis y existirá un punto $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 2$.

Ejercicio 14

Dada la función racional $f(x) = \frac{x^2+1}{x-a}$ justifica para qué valores del parámetro a no se puede asegurar la existencia de extremos absolutos en el intervalo $[1,4]$ mediante el Teorema de Weierstrass.

- **Solución:**

El Teorema de Weierstrass requiere como condición indispensable que la función sea continua en el intervalo cerrado de estudio. Las funciones racionales son continuas en todo su dominio, excepto en los puntos que provocan que su denominador sea igual a cero. En esta función, el denominador se anula si:

$x - a = 0 \Rightarrow x = a$. Por tanto, la función presenta una discontinuidad no evitable (una asíntota vertical) en el punto $x = a$. Si este valor crítico se encuentra dentro del intervalo cerrado de estudio, la función dejará de ser continua en él.

En consecuencia, el teorema de Weierstrass no podrá aplicarse para garantizar la existencia de extremos absolutos si el parámetro cumple que $a \in [1,4]$

Ejercicio 15

Sea la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + b$. Encuentra el rango de valores de b para los cuales el Teorema de Bolzano garantiza que la función tiene al menos una raíz en el intervalo cerrado $[1,2]$

- **Solución:**

La función es polinómica y continua. Evaluamos el comportamiento algebraico de la función en los extremos del intervalo $[1,2]$

$$f(1) = 1^4 - 2(1)^2 + b = 1 - 2 + b = b - 1$$

$$f(2) = 2^4 - 2(2)^2 + b = 16 - 8 + b = b + 8$$

Para poder aplicar el teorema de Bolzano, los signos de $f(1)$ y $f(2)$ tienen que ser opuestos. Sabiendo que la expresión $b + 8$ es matemáticamente mayor que $b - 1$ para cualquier número real, la única combinación posible de signos exige que $f(1)$ sea negativo y $f(2)$ sea positivo:

1. $b - 1 < 0 \Rightarrow b < 1$

2. $b + 8 > 0 \Rightarrow b > -8$

Intersecando ambas condiciones, concluimos que el parámetro b debe pertenecer al intervalo abierto: $b \in (-8,1)$

Ejercicio 16

Determina los valores de los parámetros a y b para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo $[-1,1]$ y se verifique además que la raíz garantizada por el teorema se encuentre exactamente en el punto $x = 0.5$.

- **Solución:**

Primero, garantizamos la condición de continuidad analizando el punto de ruptura $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a \cdot x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + b) = b$$

Para que sea continua, es necesario que $b = 1$. Observamos que el parámetro a no influye en la continuidad en el origen.

Segundo, el enunciado impone la condición de que la raíz de la función se sitúe exactamente en $x = 0.5$. Como el valor de la supuesta raíz cumple que $0.5 > 0$, evaluamos utilizando obligatoriamente la expresión matemática del segundo trozo con el valor de $b = 1$ ya calculado:

$$f(0.5) = (0.5)^2 + 1 = 0.25 + 1 = 1.25$$

¡Contradicción! Como $f(0.5) = 1.25 \neq 0$, este punto jamás podrá ser una raíz de la función bajo la hipótesis de continuidad en $x = 0$. Por lo tanto, no existen soluciones reales para los parámetros a y b que satisfagan de manera simultánea todas las condiciones impuestas por el problema. *(Este ejercicio es excelente para razonamiento y justificación teórica).*

Ejercicio 17

Dada la función $f(x) = \ln(x) + k \cdot x$ (donde $\ln(x)$ representa el logaritmo neperiano), encuentra el valor de k sabiendo que la función cumple las hipótesis del Teorema de los Valores Intermedios en el intervalo $[1, e]$ y toma el valor intermedio $y = e$ exactamente en el extremo inferior $x = 1$.

- **Solución:**

El dominio de la función viene dado por todos los números reales positivos $((0, +\infty))$ debido a la restricción del logaritmo, por lo que $f(x)$ es perfectamente continua en el intervalo cerrado $[1, e]$

El enunciado nos indica directamente que la función toma el valor e en el punto $x = 1$, lo que se traduce matemáticamente en la igualdad $f(1) = e$. Sustituimos los valores correspondientes en la ecuación de la función:

$$\ln(1) + k \cdot (1) = e$$

Sabiendo por propiedades de los logaritmos que $\ln(1) = 0$ simplificamos la expresión:

$$0 + k = e \Rightarrow k = e$$

Por tanto, el valor exacto del parámetro buscado es $k = e$.
