

1 - Funciones, límites, continuidad y asíntotas.

1 Dada la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

- a) Calcula su dominio
- b) Calcula su inversa
- c) Comprueba que $f \circ f^{-1}(x) = x$

2 Calcula los siguientes límites

- | | | | |
|---|--|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2+1}$ | b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+1}{3x-2}$ | c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+3x^2-1}{2x^3+8}$ | d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x-7}$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x}{2^x}$ | f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7^{-x}}{2}$ | g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5+1}{3x^7-1}$ | h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-2x}{7x^2+1}$ |
| i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-x+3}{2-x^2-2x^3}$ | j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x+6}$ | k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+5}{\sqrt{4x^2-x+2}}$ | l) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ |
| m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3-3x^2-3}}{2x+1}$ | n) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3+3x^2}}{x+5}$ | o) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-6}{\sqrt[5]{x^{13}-x^5}}$ | p) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3+5x+3}}{x^2-2x}$ |

3 Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

- | | | |
|------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| a) $f(x) = x^2 - 1$ | b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ | c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ |
| d) $f(x) = \frac{3x+7}{x-2}$ | e) $f(x) = \frac{3x-6}{x^2+1}$ | f) $f(x) = \sqrt{x^2+x+5}$ |

4 Dadas las siguientes funciones: (i) Estudia su continuidad (ii) Representa la función

- | | |
|--|--|
| a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ -x+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ | b) $f(x) = \begin{cases} x^2-9 & \text{si } x < 3 \\ -x+3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ |
| c) $f(x) = \begin{cases} 2x+6 & \text{si } x < 1 \\ x+7 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ | d) $f(x) = \begin{cases} 2x+6 & \text{si } x < 1 \\ x-7 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ |

5 Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3x-b & x < 2 \\ 3 & x = 2 \\ -2x+9 & x > 2 \end{cases}$

- a) Calcula b para que tenga límite en $x = 2$
- b) Después de hallar b estudia la continuidad de $f(x)$

c) Si hay alguna discontinuidad indica el tipo

6 Calcula todas las asíntotas de las siguientes funciones

a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-3x+2}$ b) $f(x) = x^3+3x^2-1$ c) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$ d) $f(x) = \frac{3}{x+5}$ e) $f(x) = \frac{x^3+2x+7}{x^2+x+1}$

2 - Derivadas

7 Halla la derivada de las siguientes funciones usando la definición $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$:

a) $f(x) = 2x^2 - 3x$ en $x=0$ b) $f(x) = x^3$ en $x=1$ c) $f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto de abscisa -2

8 Calcula la recta tangente a la curva $f(x) = \sqrt{x-3}$ en los puntos de abscisas a) $x=4$ b) $x=7$

9 Halla la ecuación de las rectas tangentes a la curva $y = x^4 - 2x^2 - x$ en los puntos $A(-1,0)$ y $B(1,-2)$

10 Calcula las siguientes derivadas:

a) $f(x) = \frac{5x}{x^2+4}$	b) $f(x) = \frac{5x^4-3x^3}{x-1}$	c) $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$
d) $f(x) = \frac{4^x}{x^3}$	e) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$	f) $f(x) = (x+1)^3$
g) $f(x) = e^{x^2-5x+3}$	h) $f(x) = \cos(3^x)$	i) $f(x) = \ln x^2$
j) $f(x) = \ln(x^5-3x) \cdot \sin x$	k) $f(x) = \sin\left(1 - \frac{1}{x}\right)$	l) $f(x) = \ln(4x^2 \cdot \cos x)$
m) $f(x) = e^{x^2} - \tan(x^3-1)$	n)	o)

3 - Aplicación derivadas

11 Un comerciante adquirió 10000kg de uvas y las tiene depositadas en un almacén. Sabe que las podría vender hoy a 2€ el kg y que su precio aumentará 5 céntimos cada día que pase hasta dentro de 20 días. De las uvas almacenadas se deteriorarán 10 kg por el cuadrado de los días que transcurran. ¿En que momento le convendrá vender las uvas para que su valor sea máximo? ¿Cuánto ganará?

12 Se desea construir una caja de base cuadrada, con tapa y con una capacidad de 80 dm³. Para la tapa y la superficie lateral se quiere utilizar un material que cuesta 2€/dm² y para la base otro que cuesta 3€/dm². Calcula las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo.

13 Con 100 m de valla queremos delimitar una parcela rectangular aprovechando una pared, de modo que solo tengamos que vallar tres de sus lados. Calcula las dimensiones de la parcela de área máxima que podemos vallar.

14 Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2}$ calculando

a) Dominio

b) Puntos corte con los ejes.

c) Asíntotas

d) Monotonía, máximos y mínimos.

e) Sabiendo que la derivada segunda es $f''(x) = \frac{2x \cdot (x^2 - 2) \cdot (x^2 + 6)}{(x^2 - 2)^4}$ estudia su curvatura y puntos de inflexión.

15 Dibuja la gráfica de $f(x) = 1 + \frac{2}{(x-2)^2}$ estudiando: dominio, simetrías, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad.

16 Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos relativos de la función:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

17 Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función

$$f(x) = x^2 \cdot \ln x$$

4 - Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

18 Resuelve estos sistemas con el método de Gauss y clasifícalos.

$$a) \begin{cases} x - y - z = -10 \\ x + 2y + z = 11 \\ 2x - y + z = 8 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 5z = 5 \\ 5x - 2y + 17z = 1 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ -2x + 3y - z = -6 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases}$$

19 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{2x-3}+1=x$

b) $\sqrt[3]{x+3}+3=x$

c) $\frac{x}{x+1}-\frac{16}{6}=\frac{x+1}{x}$

d) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{3}{4}$

e) $10^{3+x}=1$

f) $\frac{3^{x^3+x^2-2}}{3^{2x^2-x}}=\frac{1}{3}$

g) $5 \cdot 7^{-x}=35$

h) $\log(x-2)-\frac{1}{2}\log(3x-6)=\log 2$

i) $\log x - \log 4 = 2$

20 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{x-3}{2}-\frac{x-2}{8}\leq\frac{x}{2}$

b) $\frac{-x^2+5x}{x-2}\leq 0$

c) $2x-3-\frac{x}{2}>x+\frac{3x+1}{6}$

d) $x^2-3x-4\leq 0$

e) $x+2(x+1)+3(x+2)<\frac{x+38}{2}$

f) $(x-1)(x+4)<-6$

21 Si aumentamos un lado de un cuadrado en 2 cm y los lados contiguos en 6 cm, se obtiene un rectángulo cuya área es 5 veces el área del cuadrado. Halla el perímetro del cuadrado.

22 Una asesoría laboral tiene en su cartera de clientes tanto a empresas como a particulares. El próximo año quiere conseguir como clientes por lo menos a 5 empresas, y a un número de particulares que, como mínimo, debe superar en 4 a doble del número de empresas. Además, el número total de clientes anuales no debe superar los 40 clientes. Expresa las restricciones del problema y representa la solución.

23 Una pastelera vendió 27 tartas. El número de las de Chocolate duplicó al de las de Nata y entre ambas excedieron en 3 unidades a las ventas de Queso. ¿Cuántas tartas se vendieron de cada tipo? Resuélvelo usando Gauss.