

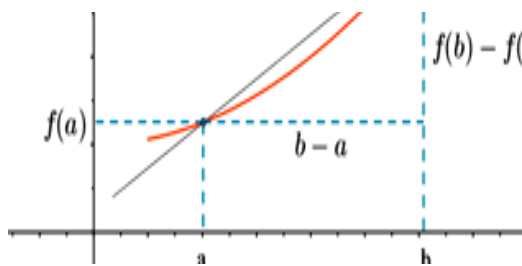
Unidad 2: Derivadas

1.- Tasa de variación media

Para conocer como varía una función en un determinado intervalo, se estudia la **tasa de variación media** (TVM). Dada una función $y=f(x)$ la TVM en el intervalo $[a,b]$ se define como: $TVM f[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

La TVM nos mide el aumento o disminución de dicha función en un intervalo $TVM[a,b]$ es el valor de la pendiente de la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

- Si $TVM f[a,b] > 0$ entonces f es creciente en $[a,b]$
- Si $TVM f[a,b] < 0$ entonces f es decreciente en $[a,b]$



$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Ejemplo: $f(x) = x^2 - x + 3$ vamos a calcular la TVM en el intervalo $[2, 2+h]$

$$TVM f[2, 2+h] = \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 - (2+h) + 3 - (2^2 - 2 + 3)}{h} = \frac{h^2 + 3h + 5 - 5}{h} = \frac{h^2 + 3h}{h} = h + 3$$

2.- Derivada de una función en un punto

Para medir el aumento o disminución de una función en un punto dado, utilizaremos la TVM en un intervalo muy próximo a este punto $(a, a+h)$ cuando $h \rightarrow 0$. A este valor le llamamos **derivada de la función en el punto** $x=a$ y se denota por $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ejemplo: Derivada de $f(x) = x^2$ en $x=2$

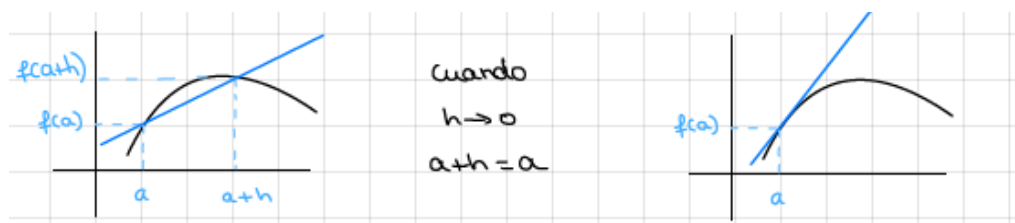
$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h + 4 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h + 4 = 4$$

Propuesto: Derivada de $f(x) = \frac{2}{x-1}$ en $x=-1$

3.- Interpretación geométrica de la derivada

Geométricamente $f'(a)$ representa el valor de la **pendiente de la recta tangente** a la gráfica de $y=f(x)$ en el punto $(a, f(a))$, siendo la ecuación de dicha tangente:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$



Ejemplo: Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \frac{4}{x-2}$ en el punto $(3, 4)$

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3) \rightarrow y - 4 = f'(3)(x - 3) \text{ vamos a calcular } f'(3)$$

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{3+h-2} - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4-4-4h}{h+1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h}{h(h+1)} = -4$$

$$y - 4 = (-4)(x - 3) \rightarrow y - 4 = -4x + 12 \rightarrow y = -4x + 16$$

4.- Cálculo de derivadas

En lugar de tener que aplicar límites cada vez que tengamos que calcular una derivada vamos a ver una serie de reglas para derivar funciones.

- Derivada de la **función constante**
Si $f(x) = k$ con $x \in \mathbb{R}$ entonces $f'(x) = 0$
- Derivada de la **función identidad**
Si $f(x) = x$ entonces $f'(x) = 1$
- Derivada de la función x^n
Si $f(x) = x^n$ entonces $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- Derivada de la **función logarítmica**
Si $f(x) = \log_a x$ entonces $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
Si $f(x) = \ln x$ entonces $f'(x) = \frac{1}{x}$

- Derivada de la **función exponencial**

Si $f(x)=a^x$ entonces $f'(x)=a^x \cdot \ln a$

Si $f(x)=e^x$ entonces $f'(x)=e^x$

- Derivada de las **funciones trigonométricas**

Si $f(x)=\operatorname{sen} x$ entonces $f'(x)=\cos x$

Si $f(x)=\cos x$ entonces $f'(x)=-\operatorname{sen} x$

Si $f(x)=\operatorname{tg} x$ entonces $f'(x)=1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

Si $f(x)=\operatorname{cotg} x$ entonces $f'(x)=\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$

Si $f(x)=\operatorname{arc} \operatorname{sen} x$ entonces $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Si $f(x)=\operatorname{arc} \cos x$ entonces $f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Si $f(x)=\operatorname{arc} \tan x$ entonces $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

4.1- Operaciones con derivadas

- Derivada de una **suma o resta de funciones**: $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

Ejemplo:

$$f(x)=x^5+x^2 \quad f'(x)=5x^4+2x$$

$$f(x)=\ln x+x^2 \quad f'(x)=\frac{1}{x}+2x$$

$$f(x)=\operatorname{sen} x+\cos x \quad f'(x)=\cos x-\operatorname{sen} x$$

- Derivada del **producto de un número por una función** $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$

Ejemplo:

$$f(x)=5x^4 \quad f'(x)=5 \cdot (4x^3)=20x^3$$

- Derivada del **producto de dos funciones** $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Ejemplo:

$$f(x)=x^3 \cdot \operatorname{sen} x \quad f'(x)=3x^2 \cdot \operatorname{sen} x + x^3 \cdot \cos x$$

$$f(x)=(x^2+1) \cdot \ln x \quad f'(x)=2x \cdot \ln x + (x^2+1) \cdot \frac{1}{x}$$

- Derivada del **cociente de funciones** $\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{x}{\operatorname{sen} x} \quad f'(x) = \frac{1 \cdot \operatorname{sen} x + x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2+5} \quad f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+5) + x \cdot 2x}{(x^2+5)^2}$$

4.2- Regla de la cadena

La derivada de la función f compuesta con g se obtiene utilizando la denominada regla de la cadena $[(g \circ f)(x)]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Ejemplos:

- $h(x) = \cos(x^4) \rightarrow g(x) = \cos x \text{ y } f(x) = x^4$

$$h(x)' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \operatorname{sen}(x^4) \cdot 4x^3$$

- $h(x) = (3x+2)^5 \quad h(x)' = 5(3x+2)^4 \cdot 3$

- $h(x) = \operatorname{sen}(\ln x) \quad h(x)' = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$

- $h(x) = (\cos x)^6 \quad h(x)' = 6 \cos^5 x \cdot (-\operatorname{sen} x)$

5.- Regla de l'hôpital

En el cálculo de límites, cuando tenemos una indeterminación $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ podemos aplicar la regla de l'hôpital que consiste en derivar numerador y denominador y posteriormente hacer el

límite $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1$

Función	Derivada
$f(x)=k$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=n \cdot x^{n-1}$
$f(x)=\sqrt[n]{x}$	$f'(x)=\frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x \cdot \ln a$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=\log_a x$	$f'(x)=\frac{1}{x \ln a}$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\frac{1}{x}$
$f(x)=\operatorname{sen} x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\operatorname{sen} x$
$f(x)=\operatorname{tg} x$	$f'(x)=1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x)=\operatorname{cotg} x$	$f'(x)=\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$
$f(x)=\operatorname{arc} \operatorname{sen} x$	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\operatorname{arc} \cos x$	$f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\operatorname{arc} \tan x$	$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$
$k \cdot f(x)$	$k \cdot f'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x)+f(x) \cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x)-f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$
$(g \circ f)(x)$	$g'(f(x)) \cdot f'(x)$