

Unidad 1: Funciones, límites y continuidad

1.- Funciones

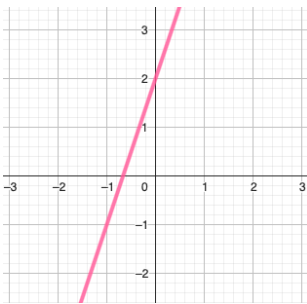
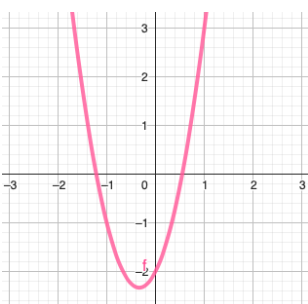
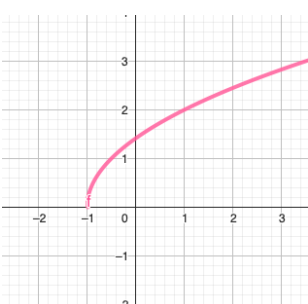
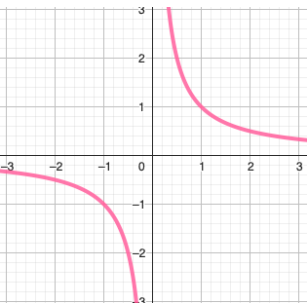
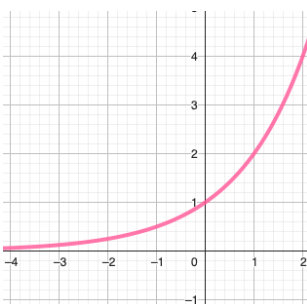
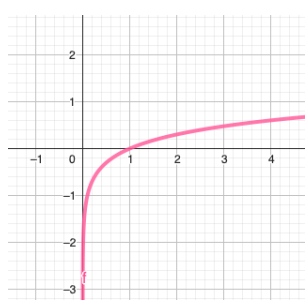
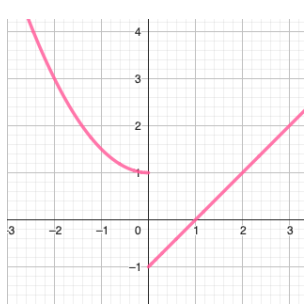
Concepto de función

Se dice que f es una función real de variable real, si a cada número real $x \in \text{Dom}f$ le hace corresponder otro número real único, $f(x)$ al que llamaremos imagen de x :

$$f: \text{Dom}f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x)$$

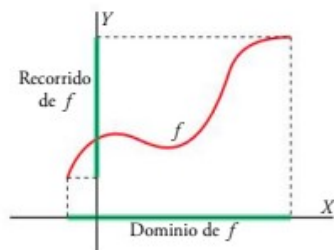
Funciones elementales

Rectas	Parábolas	Radicales	Racionales
$f(x) = mx + n$	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = \sqrt{p(x)}$	$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$
			
Exponenciales	Logarítmicas	Funciones definidas a trozos	
$f(x) = a^x$	$f(x) = \log_a x$	$f(x) = \begin{cases} p(x) & \text{si } x < a \\ q(x) & \text{si } x \geq a \end{cases}$	
			

1.1 Dominio de una función

El **dominio** de una función $f(x)$ es el conjunto de los valores que puede tomar la variable independiente x , es decir, los valores de x para los que existe función. Se representa por $\text{Dom}(f)$.

El **recorrido o imagen** de una función $f(x)$ es el conjunto de los valores que puede tomar la variable dependiente y se representa por $\text{Im}(f)$.



Para calcular el dominio analíticamente debemos tener en cuenta el tipo de función con la que estamos trabajando, vamos a ver como se calcula el dominio de las más comunes:

- Funciones **Polinómicas**: son de la forma $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + d$. Su dominio son todos los números reales: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- Funciones **Racionales**: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ están definidas mediante un cociente de polinomios.

Su dominio son todos los reales excepto los valores de x que anulan al denominador.

- Funciones **radicales**: $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ son expresiones que tienen x dentro de una raíz. Su dominio viene dado por el índice n :
 - Si n es par: el dominio es el conjunto de los reales que hacen positivo al radicando (ya que las raíces con índice par de números negativos no tienen solución real)
 - Si n es impar: el dominio coincide con el dominio del radicando.
- Funciones **exponenciales**: son de la forma $f(x) = a^x$ su dominio son todos los números reales: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- Funciones **logarítmicas**: son expresiones con x en el argumento de un logaritmo. Su dominio estará formado por todos los números reales que hacen que el argumento sea positivo. (No existen logaritmos de números negativos ni el logaritmo de cero).

Ejemplo: Calcula el dominio de las siguientes funciones:

- $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 7x - 3$ función polinómica $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$ función racional $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$
- $f(x) = \sqrt{2x-12}$ función irracional $2x - 12 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 12 \Rightarrow x \geq 6$ $\text{Dom}(f) = [6, +\infty)$
- $\log(x+3)$ función logarítmica $x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$ $\text{Dom}(f) = (-3, +\infty)$

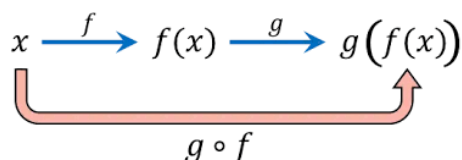
1.2 Operaciones con funciones

• **Suma y resta:** $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

• **Producto:** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

• **Cociente:** $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

• **Composición:** $g \circ f(x) = g(f(x))$



Ejemplo: $f(x) = (x-3)^2$ y $g(x) = x+1$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+1) = ((x+1)-3)^2 = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g((x-3)^2) = (x-3)^2 + 1 = x^2 - 6x + 10$$

• Función inversa

Se llama función inversa de f a otra función f^{-1} que verifica que si $f(a) = b$ entonces $f^{-1}(b) = a$. Se cumple que $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$.

Ejemplo: Para obtener la función inversa de $f(x) = x^3 - 1$ tenemos que despejar la x

$$y = x^3 - 1 \rightarrow \sqrt[3]{y+1} = x \rightarrow \sqrt[3]{x+1} = f^{-1}(x)$$

2.- Límites de funciones

Si se quiere estudiar hacia que valor se aproxima una función cuando la variable independiente toma valores próximos a un número real dado, resulta imprescindible introducir un nuevo concepto: **límite de una función en un punto**.

Si a y b son dos números reales, la expresión $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ quiere decir que siempre que x tome valores próximos al número a , tanto mayores como menores, los correspondientes valores de f se aproximan al número b .

Ejemplo:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 1$

x	2,9	2,99	3,01	3,1
$f(x)$	9,41	9,94	10,06	10,61

Vemos que antes y después de 3 $f(x)$ se acerca a 10 por lo tanto $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 1 = 10$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

x	0,01	0,001	-0,001	3-0,01
$f(x)$	-0,5	0,8	-0,82	-0,98

Vemos que antes y después de 0 $f(x)$ no se aproxima a ningún número, por lo tanto no tiene límite.

Límites laterales: En algunos casos no existe el límite en un punto, entonces veremos los límites laterales:

- Límite lateral de f cuando x tiende al número “a” por la izquierda es el número b, si al tomar valores próximos a “a” pero menores que “a”, los correspondientes valores se aproximan al número b y se denota por $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.
- Límite lateral de f cuando x tiende al número “a” por la derecha es el número b, si al tomar valores próximos a “a” pero mayores que “a”, los correspondientes valores se aproximan al número b y se denota por $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
- El límite de una función cuando x tiende a un punto existe si existen los límites laterales y coinciden $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Límites infinitos: En algunas ocasiones al acercarse la x a “a” la función $f(x)$ toma cada vez valores más grandes.

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ si x toma valores próximos a “a” (tanto a la izquierda como a la derecha) los valores de f se hacen arbitrariamente más grandes.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ si x toma valores próximos a “a” (tanto a la izquierda como a la derecha) los valores de f se hacen arbitrariamente más pequeños.

Límites en el infinito: Además de considerar el comportamiento de una función cuando x tiende a un punto, también podemos estudiar cuando toma cada vez valores más grandes o pequeños.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ x toma cada vez valores más grandes.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ x toma cada vez valores más pequeños.

El límite cuando x tiende a 0 es 2.	El límite cuando x tiende a 0 es infinito.	El límite cuando x tiende a 0 no existe.
El límite cuando x tiende a infinito es -3.	El límite cuando x tiende a infinito es infinito.	

2.1 Cálculo de límites

Para calcular un límite sustituimos la variable por el valor al que tiende y hacemos las operaciones, como resultado del límite podemos obtener un valor finito, infinito o indeterminado. Indeterminado quiere decir que no podemos saber el valor del límite de forma inmediata, sino que hay que trabajar más para saberlo.

1.-
$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3}{x + 1} = \frac{(-2)^2 - 3}{-2 + 1} = -1$$

2.- Las expresiones de tipo $\infty \pm k$ siempre dan ∞ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x - 5 = \infty - 5 = \infty$$

3.- Las expresiones de tipo $\infty \cdot \infty$ dan ∞ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^x = \infty \cdot e^\infty = \infty \cdot \infty = \infty$$

4.- Las expresiones de tipo $k \cdot \infty$ dan ∞ ($k > 0$).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 3x = 3 \cdot \infty = \infty$$

5.- Las expresiones de tipo $\frac{k}{0}$ con $k \neq 0$ pueden dar más o menos infinito, hay que estudiar los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} = \frac{3}{0} \rightarrow \text{no tiene límite ya que los laterales no coinciden.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x} = \frac{3}{0^+} = \infty$$

6.- Las expresiones de tipo $\frac{k}{\pm \infty}$ siempre dan 0.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x+5} = \frac{3}{-\infty} = 0$$

7.- Cuando tenemos el límite de una función polinómica cuando x tiende a infinito, solo tenemos en cuenta el término de mayor grado, el valor de las potencias de grado inferior es insignificante comparado con el signo.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty^2 = \infty$$

8.- En las potencias el valor del límite depende del valor de k

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^5 = \infty^5 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-5} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 1}{x^5} = \frac{1}{\infty^5} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 3^x = 3^\infty = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^\infty = \infty$$

9.- Indeterminaciones de tipo $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\infty}{\infty}$

a) Grado $P(x) >$ grado $Q(x) \rightarrow$ el resultado es ∞

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 30x^2 - 3}{3x^3 + 30x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{3} = \frac{5 \cdot \infty}{3} = \infty$$

b) Grado $P(x) <$ grado $Q(x) \rightarrow$ el resultado es 0

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 30x^2 - 3}{3x^5 + 30x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4}{3x^5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{3x} = \frac{5}{3 \cdot \infty} = \frac{5}{\infty} = 0$$

c) Grado $P(x) =$ grado $Q(x) \rightarrow$ el resultado depende de los coeficientes de mayor grado

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 30x^2 - 3}{3x^4 + 30x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

En el caso de que aparecieran radicales, las pasamos a potencia y procedemos de la misma forma

10.- Indeterminaciones de tipo $\frac{0}{0}$ suelen aparecer en expresiones que tienen un cociente de polinomios o radicales de polinomios

a) Para polinomios, factorizamos numerador y denominador, y simplificamos.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1 - 2 + 1}{1 + 2 - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+3} = \frac{0}{4} = 0$$

b) Para radicales de polinomios, multiplicamos por el conjugado.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x}+2 = 2+2 = 4$$

11.- Indeterminaciones de tipo 1^∞ , para resolver estas indeterminaciones aplicamos la siguiente

fórmula $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{h(x)} \right)^{h(x)} \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)}$

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x = 1^\infty$ para aplicar la fórmula queremos tener el exponente igual al denominador, transformamos nuestro límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{x^2} \right]^{\frac{1}{x^2} \cdot x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1$$

En otras ocasiones no tendremos el 1+ el cociente, por lo que tendremos que sumar y restar uno.

Ejemplo propuesto: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$

NOTA: Para factorizar polinomios debemos seguir los siguientes pasos.

- 1.- Sacar factor común
- 2.- Identidades notables
- 3.- Ruffini

NOTA: Operaciones en el infinito

Suma y resta	Producto	Cociente	Potencia
$\infty \pm k = \infty$ $-\infty \pm k = -\infty$ $\infty + \infty = \infty$ $-\infty - \infty = -\infty$	$\infty \cdot \infty = \infty$ Si $k > 0$ $\infty \cdot k = \infty$ $-\infty \cdot k = -\infty$ Si $k < 0$ $\infty \cdot k = -\infty$ $-\infty \cdot k = \infty$	Si $k \neq 0$ $\frac{k}{\pm \infty} = 0$ $\frac{k}{0} = \pm \infty$	$\infty^k = \infty \quad (k > 0)$ $\infty^k = 0 \quad (k < 0)$ $k^\infty = \infty \quad (k > 1)$ $k^\infty = 0 \quad (0 < k < 1)$

NOTA: Indeterminaciones

$\infty - \infty$	$0 \cdot \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	0^0	∞^0	1^∞
-------------------	------------------	-------------------------	---------------	-------	------------	------------

3.- Continuidad de funciones

Veamos la continuidad de las funciones elementales:

- Funciones **Polinómicas** son continuas en todo su dominio, es decir $\mathbb{R}$
- Funciones **Racionales**: son continuas en todos los números reales excepto los valores de x que anulan al denominador.
- Funciones **Irracionales**:
 - Si n es par: son continuas en todos los puntos que hacen el radicando mayor o igual a 0
 - Si n es impar: es continua donde lo sea el radicando.
- Funciones **exponenciales**: son continuas en todo su dominio, es decir $\mathbb{R}$
- Funciones **logarítmicas**: es continua en todos los números reales que hacen que el argumento sea positivo.

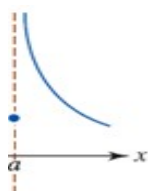
Una función **f** es continua en un punto "**a**" si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

Una función será continua en un intervalo abierto (a, b) si es continua en todos los puntos pertenecientes a ese intervalo.

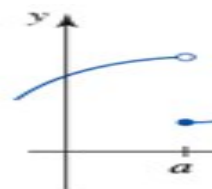
Si una función no es continua en un punto, se dice que es **discontinua** en él. Existen varios tipos de discontinuidades:

a) **Inevitable**: los límites laterales no coinciden $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

- De salto finito: Ambos límites laterales tienen un valor finito.



- De salto infinito: Uno de los límites laterales tiene un valor finito y el otro infinito.



b) **Evitable**: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq f(a)$

Ejemplo: Calcula el valor de m para que la función $f(x) = \begin{cases} mx^3 - 3x & x \leq -2 \\ 2x + 2m & x > -2 \end{cases}$ sea continua en todos los números reales.

- La función es continua antes de -2 ya que es una función polinómica.
- La función es continua después de -2 ya que es una función polinómica.
- Para que sea continua en $x = -2$ tiene que verificarse que $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2)$
 - $f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} mx^3 - 3x = m(-2)^3 - 3 \cdot (-2) = -8m + 6$
 - $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} 2x + 2m = 2(-2) + 2m = 2m - 4$
 - Para que sea continua $-8m + 6 = 2m - 4 \rightarrow m = 1$

4.- Asíntotas

Una asíntota es una línea recta que, prolongada indefinidamente, se acerca a una curva sin llegar nunca a cortarla. Hay tres tipos de asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas.

Asíntotas verticales:

Sea " a " un número real, la recta vertical $x = a$ es una asíntota vertical de la función $y = f(x)$ si se verifica que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$.

Asíntotas horizontales

Sea " l " un número real, la recta horizontal $y = l$ es una asíntota horizontal de la función $y = f(x)$ si se verifica que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ o $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$.

Asíntotas oblicuas

La recta no horizontal $y = mx + n$ con $m \neq 0$ es una asíntota oblicua de la función $y = f(x)$ si se verifica que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (mx + n) = 0$ con

- $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$
- $n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx$

Nota: Si hay asíntota horizontal no hay oblicua.

Ejemplo: Hallar las asíntotas de la función $f(x) = \frac{1-2x^2}{3+2x-x^2}$

Asíntotas verticales

Las posibles asíntotas verticales se encuentran en los valores que anulan el denominador

$3+2x-x^2=0 \rightarrow x=-1, x=3$ estudiaremos los límites cuando x tiende a -1 y a 3.

- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-2x^2}{3+2x-x^2} = \frac{-1}{0} \rightarrow$ Tenemos que estudiar los límites laterales.
 - $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1-2x^2}{3+2x-x^2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1-2x^2}{3+2x-x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$
 -

Hay asíntota vertical en $x=-1$

- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-2x^2}{3+2x-x^2} = \frac{-17}{0} \rightarrow$ Tenemos que estudiar los límites laterales.
 - $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1-2x^2}{3+2x-x^2} = \frac{-17}{0^+} = -\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1-2x^2}{3+2x-x^2} = \frac{-17}{0^-} = +\infty$

Hay asíntota vertical en $x=3$

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-2x^2}{3+2x-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 = 2$$

Hay una asíntota horizontal en $y=2$

Asíntotas oblicuas: Como hay asíntota horizontal no hay oblicua.