

1º TRIMESTRE

UD1: Funciones, límites y continuidad.

Dominio de una función.

Operaciones con funciones.

Límites de funciones.

Continuidad de funciones.

Asíntotas.

UD2: Derivadas

Tasa de variación media.

Derivada de una función en un punto.

Interpretación geométrica de la derivada.

Cálculo de derivadas. Operaciones. Regla de la cadena.

Regla de l'hôpital.

UD3: Aplicación de las derivadas

Crecimiento y decrecimiento de una función.

Curvatura y puntos de inflexión.

Optimización.

Representación de funciones.

Unidad 1: Funciones, límites y continuidad

1.- Funciones

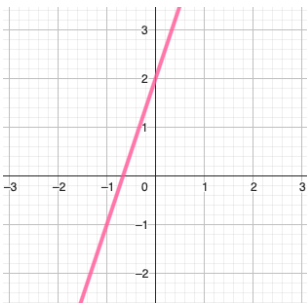
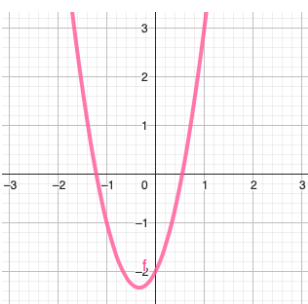
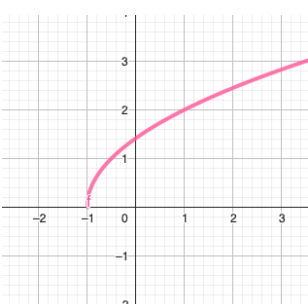
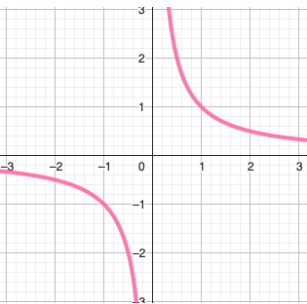
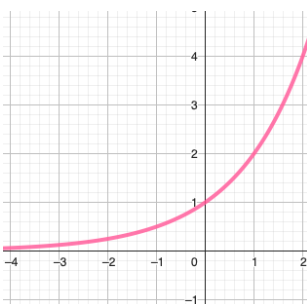
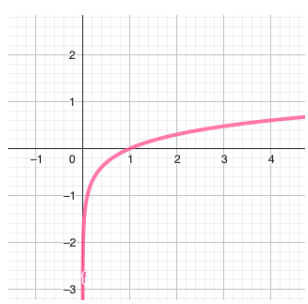
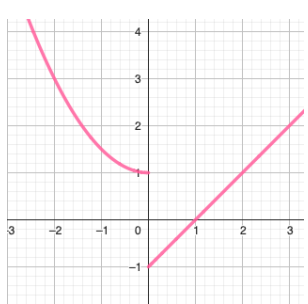
Concepto de función

Se dice que f es una función real de variable real, si a cada número real $x \in \text{Dom}f$ le hace corresponder otro número real único, $f(x)$ al que llamaremos imagen de x :

$$f: \text{Dom}f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x)$$

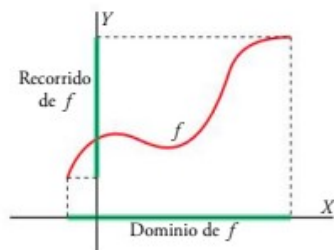
Funciones elementales

Rectas	Parábolas	Radicales	Racionales
$f(x) = mx + n$	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = \sqrt{p(x)}$	$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$
			
Exponenciales	Logarítmicas	Funciones definidas a trozos	
$f(x) = a^x$	$f(x) = \log_a x$	$f(x) = \begin{cases} p(x) & \text{si } x < a \\ q(x) & \text{si } x \geq a \end{cases}$	
			

1.1 Dominio de una función

El **dominio** de una función $f(x)$ es el conjunto de los valores que puede tomar la variable independiente x , es decir, los valores de x para los que existe función. Se representa por $\text{Dom}(f)$.

El **recorrido o imagen** de una función $f(x)$ es el conjunto de los valores que puede tomar la variable dependiente y se representa por $\text{Im}(f)$.



Para calcular el dominio analíticamente debemos tener en cuenta el tipo de función con la que estamos trabajando, vamos a ver como se calcula el dominio de las más comunes:

- Funciones **Polinómicas**: son de la forma $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + d$. Su dominio son todos los números reales: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- Funciones **Racionales**: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ están definidas mediante un cociente de polinomios.

Su dominio son todos los reales excepto los valores de x que anulan al denominador.

- Funciones **radicales**: $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ son expresiones que tienen x dentro de una raíz. Su dominio viene dado por el índice n :
 - Si n es par: el dominio es el conjunto de los reales que hacen positivo al radicando (ya que las raíces con índice par de números negativos no tienen solución real)
 - Si n es impar: el dominio coincide con el dominio del radicando.
- Funciones **exponenciales**: son de la forma $f(x) = a^x$ su dominio son todos los números reales: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- Funciones **logarítmicas**: son expresiones con x en el argumento de un logaritmo. Su dominio estará formado por todos los números reales que hacen que el argumento sea positivo. (No existen logaritmos de números negativos ni el logaritmo de cero).

Ejemplo: Calcula el dominio de las siguientes funciones:

- $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 7x - 3$ función polinómica $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$ función racional $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$
- $f(x) = \sqrt{2x-12}$ función irracional $2x - 12 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 12 \Rightarrow x \geq 6$ $\text{Dom}(f) = [6, +\infty)$
- $\log(x+3)$ función logarítmica $x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$ $\text{Dom}(f) = (-3, +\infty)$

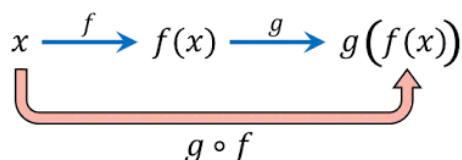
1.2 Operaciones con funciones

• **Suma y resta:** $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

• **Producto:** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

• **Cociente:** $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

• **Composición:** $g \circ f(x) = g(f(x))$



Ejemplo: $f(x) = (x-3)^2$ y $g(x) = x+1$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+1) = ((x+1)-3)^2 = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g((x-3)^2) = (x-3)^2 + 1 = x^2 - 6x + 10$$

• Función inversa

Se llama función inversa de f a otra función f^{-1} que verifica que si $f(a) = b$ entonces $f^{-1}(b) = a$. Se cumple que $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$.

Ejemplo: Para obtener la función inversa de $f(x) = x^3 - 1$ tenemos que despejar la x

$$y = x^3 - 1 \rightarrow \sqrt[3]{y+1} = x \rightarrow \sqrt[3]{x+1} = f^{-1}(x)$$

2.- Límites de funciones

Si se quiere estudiar hacia que valor se aproxima una función cuando la variable independiente toma valores próximos a un número real dado, resulta imprescindible introducir un nuevo concepto: **límite de una función en un punto.**

Si a y b son dos números reales, la expresión $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ quiere decir que siempre que x tome valores próximos al número a , tanto mayores como menores, los correspondientes valores de f se aproximan al número b .

Ejemplo:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 1$

x	2,9	2,99	3,01	3,1
$f(x)$	9,41	9,94	10,06	10,61

Vemos que antes y después de 3 $f(x)$ se acerca a 10 por lo tanto $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 1 = 10$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

x	0,01	0,001	-0,001	3-0,01
$f(x)$	-0,5	0,8	-0,82	-0,98

Vemos que antes y después de 0 $f(x)$ no se aproxima a ningún número, por lo tanto no tiene límite.

Límites laterales: En algunos casos no existe el límite en un punto, entonces veremos los límites laterales:

- Límite lateral de f cuando x tiende al número “a” por la izquierda es el número b, si al tomar valores próximos a “a” pero menores que “a”, los correspondientes valores se aproximan al número b y se denota por $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.
- Límite lateral de f cuando x tiende al número “a” por la derecha es el número b, si al tomar valores próximos a “a” pero mayores que “a”, los correspondientes valores se aproximan al número b y se denota por $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
- El límite de una función cuando x tiende a un punto existe si existen los límites laterales y coinciden $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Límites infinitos: En algunas ocasiones al acercarse la x a “a” la función $f(x)$ toma cada vez valores más grandes.

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ si x toma valores próximos a “a” (tanto a la izquierda como a la derecha) los valores de f se hacen arbitrariamente más grandes.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ si x toma valores próximos a “a” (tanto a la izquierda como a la derecha) los valores de f se hacen arbitrariamente más pequeños.

Límites en el infinito: Además de considerar el comportamiento de una función cuando x tiende a un punto, también podemos estudiar cuando toma cada vez valores más grandes o pequeños.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ x toma cada vez valores más grandes.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ x toma cada vez valores más pequeños.

El límite cuando x tiende a 0 es 2.	El límite cuando x tiende a 0 es infinito.	El límite cuando x tiende a 0 no existe.
El límite cuando x tiende a infinito es -3.	El límite cuando x tiende a infinito es infinito.	

2.1 Cálculo de límites

Para calcular un límite sustituimos la variable por el valor al que tiende y hacemos las operaciones, como resultado del límite podemos obtener un valor finito, infinito o indeterminado. Indeterminado quiere decir que no podemos saber el valor del límite de forma inmediata, sino que hay que trabajar más para saberlo.

1.-
$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3}{x + 1} = \frac{(-2)^2 - 3}{-2 + 1} = -1$$

2.- Las expresiones de tipo $\infty \pm k$ siempre dan ∞ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x - 5 = \infty - 5 = \infty$$

3.- Las expresiones de tipo $\infty \cdot \infty$ dan ∞ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^x = \infty \cdot e^\infty = \infty \cdot \infty = \infty$$

4.- Las expresiones de tipo $k \cdot \infty$ dan ∞ ($k > 0$).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 3x = 3 \cdot \infty = \infty$$

5.- Las expresiones de tipo $\frac{k}{0}$ con $k \neq 0$ pueden dar más o menos infinito, hay que estudiar los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} = \frac{3}{0} \rightarrow \text{no tiene límite ya que los laterales no coinciden.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x} = \frac{3}{0^+} = \infty$$

6.- Las expresiones de tipo $\frac{k}{\pm \infty}$ siempre dan 0.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x+5} = \frac{3}{-\infty} = 0$$

7.- Cuando tenemos el límite de una función polinómica cuando x tiende a infinito, solo tenemos en cuenta el término de mayor grado, el valor de las potencias de grado inferior es insignificante comparado con el signo.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty^2 = \infty$$

8.- En las potencias el valor del límite depende del valor de k

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^5 = \infty^5 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-5} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 1}{x^5} = \frac{1}{\infty^5} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 3^x = 3^\infty = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^\infty = \infty$$

9.- Indeterminaciones de tipo $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\infty}{\infty}$

a) Grado $P(x) >$ grado $Q(x) \rightarrow$ el resultado es ∞

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 30x^2 - 3}{3x^3 + 30x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{3} = \frac{5 \cdot \infty}{3} = \infty$$

b) Grado $P(x) <$ grado $Q(x) \rightarrow$ el resultado es 0

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 30x^2 - 3}{3x^5 + 30x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4}{3x^5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{3x} = \frac{5}{3 \cdot \infty} = \frac{5}{\infty} = 0$$

c) Grado $P(x) =$ grado $Q(x) \rightarrow$ el resultado depende de los coeficientes de mayor grado

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 30x^2 - 3}{3x^4 + 30x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

En el caso de que aparecieran radicales, las pasamos a potencia y procedemos de la misma forma

10.- Indeterminaciones de tipo $\frac{0}{0}$ suelen aparecer en expresiones que tienen un cociente de polinomios o radicales de polinomios

a) Para polinomios, factorizamos numerador y denominador, y simplificamos.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1 - 2 + 1}{1 + 2 - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+3} = \frac{0}{4} = 0$$

b) Para radicales de polinomios, multiplicamos por el conjugado.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x}+2 = 2+2 = 4$$

11.- Indeterminaciones de tipo 1^∞ , para resolver estas indeterminaciones aplicamos la siguiente

fórmula $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{h(x)} \right)^{h(x)} \right]^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)}$

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x = 1^\infty$ para aplicar la fórmula queremos tener el exponente igual al denominador, transformamos nuestro límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{x^2} \right]^{\frac{1}{x^2} \cdot x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1$$

En otras ocasiones no tendremos el 1+ el cociente, por lo que tendremos que sumar y restar uno.

Ejemplo propuesto: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$

NOTA: Para factorizar polinomios debemos seguir los siguientes pasos.

- 1.- Sacar factor común
- 2.- Identidades notables
- 3.- Ruffini

NOTA: Operaciones en el infinito

Suma y resta	Producto	Cociente	Potencia
$\infty \pm k = \infty$ $-\infty \pm k = -\infty$ $\infty + \infty = \infty$ $-\infty - \infty = -\infty$	$\infty \cdot \infty = \infty$ Si $k > 0$ $\infty \cdot k = \infty$ $-\infty \cdot k = -\infty$ Si $k < 0$ $\infty \cdot k = -\infty$ $-\infty \cdot k = \infty$	Si $k \neq 0$ $\frac{k}{\pm \infty} = 0$ $\frac{k}{0} = \pm \infty$	$\infty^k = \infty$ ($k > 0$) $\infty^k = 0$ ($k < 0$) $k^\infty = \infty$ ($k > 1$) $k^\infty = 0$ ($0 < k < 1$)

NOTA: Indeterminaciones

$\infty - \infty$	$0 \cdot \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	0^0	∞^0	1^∞
-------------------	------------------	-------------------------	---------------	-------	------------	------------

3.- Continuidad de funciones

Veamos la continuidad de las funciones elementales:

- Funciones **Polinómicas** son continuas en todo su dominio, es decir $\mathbb{R}$
- Funciones **Racionales**: son continuas en todos los números reales excepto los valores de x que anulan al denominador.
- Funciones **Irracionales**:
 - Si n es par: son continuas en todos los puntos que hacen el radicando mayor o igual a 0
 - Si n es impar: es continua donde lo sea el radicando.
- Funciones **exponenciales**: son continuas en todo su dominio, es decir $\mathbb{R}$
- Funciones **logarítmicas**: es continua en todos los números reales que hacen que el argumento sea positivo.

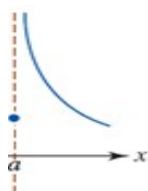
Una función **f** es continua en un punto "**a**" si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

Una función será continua en un intervalo abierto (a, b) si es continua en todos los puntos pertenecientes a ese intervalo.

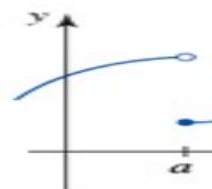
Si una función no es continua en un punto, se dice que es **discontinua** en él. Existen varios tipos de discontinuidades:

a) **Inevitable**: los límites laterales no coinciden $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

- De salto finito: Ambos límites laterales tienen un valor finito.



- De salto infinito: Uno de los límites laterales tiene un valor finito y el otro infinito.



b) **Evitable**: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq f(a)$

Ejemplo: Calcula el valor de m para que la función $f(x) = \begin{cases} mx^3 - 3x & x \leq -2 \\ 2x + 2m & x > -2 \end{cases}$ sea continua en todos los números reales.

- La función es continua antes de -2 ya que es una función polinómica.
- La función es continua después de -2 ya que es una función polinómica.
- Para que sea continua en $x = -2$ tiene que verificarse que $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2)$
 - $f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} mx^3 - 3x = m(-2)^3 - 3 \cdot (-2) = -8m + 6$
 - $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} 2x + 2m = 2(-2) + 2m = 2m - 4$
 - Para que sea continua $-8m + 6 = 2m - 4 \rightarrow m = 1$

4.- Asíntotas

Una asíntota es una línea recta que, prolongada indefinidamente, se acerca a una curva sin llegar nunca a cortarla. Hay tres tipos de asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas.

Asíntotas verticales:

Sea " a " un número real, la recta vertical $x = a$ es una asíntota vertical de la función $y = f(x)$ si se verifica que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$.

Asíntotas horizontales

Sea " l " un número real, la recta horizontal $y = l$ es una asíntota horizontal de la función $y = f(x)$ si se verifica que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ o $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$.

Asíntotas oblicuas

La recta no horizontal $y = mx + n$ con $m \neq 0$ es una asíntota oblicua de la función $y = f(x)$ si se verifica que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (mx + n) = 0$ con

- $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$
- $n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx$

Nota: Si hay asíntota horizontal no hay oblicua.

Ejemplo: Hallar las asíntotas de la función $f(x) = \frac{1-2x^2}{3+2x-x^2}$

Asíntotas verticales

Las posibles asíntotas verticales se encuentran en los valores que anulan el denominador

$$3+2x-x^2=0 \rightarrow x=-1, x=3 \text{ estudiaremos los límites cuando } x \text{ tiende a } -1 \text{ y a } 3.$$

- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-2x^2}{3+2x-x^2} = \frac{-1}{0} \rightarrow$ Tenemos que estudiar los límites laterales.
 - $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1-2x^2}{3+2x-x^2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1-2x^2}{3+2x-x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$
 -

Hay asíntota vertical en $x=-1$

- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-2x^2}{3+2x-x^2} = \frac{-17}{0} \rightarrow$ Tenemos que estudiar los límites laterales.
 - $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1-2x^2}{3+2x-x^2} = \frac{-17}{0^+} = -\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1-2x^2}{3+2x-x^2} = \frac{-17}{0^-} = +\infty$

Hay asíntota vertical en $x=3$

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-2x^2}{3+2x-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 = 2$$

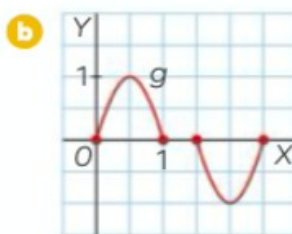
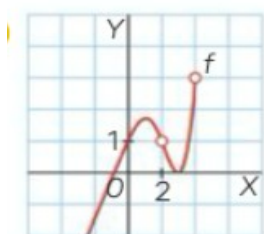
Hay una asíntota horizontal en $y=2$

Asíntotas oblicuas: Como hay asíntota horizontal no hay oblicua.

Unidad 1: Boletín

1.- Funciones

1.- Determina el dominio y recorrido de las siguientes funciones.



2.- Determina el dominio de las siguientes funciones:

- | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--|
| a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ | f) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 14x - 5}$ | k) $f(x) = \log(25 - x^2)$ |
| b) $f(x) = (x - 2)^2$ | g) $f(x) = \sqrt{2x - 12}$ | l) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2}$ |
| c) $f(x) = \frac{2x + 3}{3x^2 + 5x}$ | h) $f(x) = \sqrt{x^4 - x^2}$ | m) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x + 2}}$ |
| d) $f(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$ | i) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - 14x - 5}$ | n) $f(x) = \sqrt{(x - 1)(2x + 3)}$ |
| e) $f(x) = \frac{7x}{x - 2}$ | j) $f(x) = \log(x - 3)$ | o) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x - 1)(2x + 3)}}$ |

3.- Dibuja una posible gráfica para la función f siendo $Dom(f) = [0, 1] \cup [5, 7]$ y $Rec(f) = [0, 2]$.

4.- Representa las siguientes funciones:

- | | | |
|--|--|--|
| a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ -x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ | b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si } x < 3 \\ -x + 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ | c) $f(x) = \begin{cases} -x + 4 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 4x + 4 & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ 5 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$ |
|--|--|--|

5.- Transforma las siguientes funciones con valor absoluto en funciones a trozos:

- | | | | |
|---|---------------------|---------------------|-------------------------|
| a) $f(x) = x + 1 $ | b) $f(x) = 1 - x $ | c) $f(x) = x - 2 $ | d) $f(x) = x - 5 + 3$ |
| e) $f(x) = 4 - x - 1$ f) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{ x - 1 } & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ | | | |

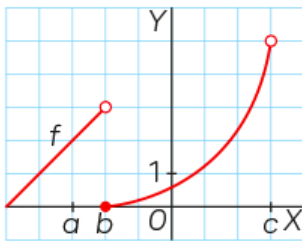
6.- Sean $f(x)=x^2-x-2$, $h(x)=\frac{1}{x^2-4}$ y $t(x)=1-x^2$, calcula:

- a) $(f-t)(x)$ b) $(f \circ t)(x)$ c) $t^{-1}(x)$
d) $(t \circ h)(x)$ e) $h^{-1}(x)$ f) $(f \circ t^{-1})(x)$

7.- Dadas las funciones $f(x)=\sqrt{x-1}$ y $g(x)=\frac{1}{x-3}$, calcula:

- a) $f^{-1}(x)$ b) $g^{-1}(x)$ c) $(f \circ g)(x)$
d) $(g \circ f)(x)$ e) $(f \circ g^{-1})(x)$ f) $(g \circ f \circ f^{-1})(x)$

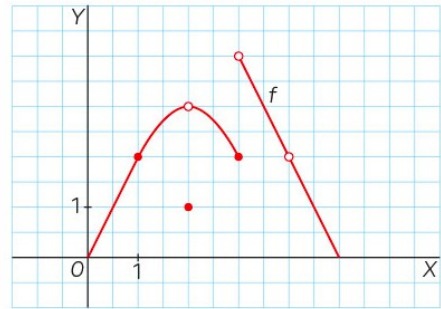
2.- Límites de funciones



8.- Dada la función de la figura, calcula $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, los límites laterales y el límite de f en a , b y c .

9.- Calcula:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
e) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ f) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ g) $f(0)$ h) $f(1)$
i) $f(2)$ j) $f(3)$ k) $f(4)$ l) $f(5)$



10.- Calcula los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 - 4x - 5$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{3x+2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x-3}$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|}{2-x}$
e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{2-x}$ f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x^2-2x+1}$ g) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$ h) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$
i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$ j) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x^2-x}$ k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^2-x}$ l) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x^2-2x+1}$
m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$ n) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2}$ o) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x+2}{7-x}$ p) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{(x+1)^4}$
q) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{x-3}$ r) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x+1}{(5-x)^3}$ s) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{(x-4)^2}$

11.- Calcula los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2+1}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+1}{3x-2}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+3x^2-1}{2x^3+8}$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x-7}$
- e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x}{2^x}$ f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7^{-x}}{2}$ g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5+1}{3x^7-1}$ h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-2x}{7x^2+1}$
- i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{2^{-x}}$ j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-2}{2x+5}$ k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-3}{7x-2}$ l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5-x}{x+5}$
- m) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-2x}{x^2+1}$ n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2+5}$ o) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2-4}$ p) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+1}{4x^2-3}$
- q) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3-x^2}{x^5+x^2}$

12.- Calcula los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-x+3}{2-x^2-2x^3}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x+6}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+5}{\sqrt{4x^2-x+2}}$
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3-3x^2-3}}{2x+1}$ e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3+3x^2}}{x+5}$ f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-6}{\sqrt[5]{x^{13}-x^5}}$
- g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$ h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3x} - \frac{3}{2x+1} \right)$ i) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)$
- j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ k) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-7x+10}{x^2-4}$ l) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}$

13.- Calcula los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^x$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+5} \right)^{x+1}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2} \right)^x$
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2-1}{2x^2+1} \right)^{x^2-3}$ e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-3}{4x+1} \right)^{\frac{5x^2-1}{4x+2}}$ f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+4} \right)^{\frac{x^2}{x+5}}$

3.- Continuidad

14.- Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 - 1$ b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$
d) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ e) $f(x) = \frac{3x-6}{x^2+1}$

15.- Encuentra el mayor conjunto de números reales donde sean continuas las siguientes funciones

a) $f(x) = 2x^3 - 5x$ b) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$ c) $f(x) = \frac{3x+7}{x-2}$
d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+5x+4}$ e) $f(x) = \sqrt{x^2+x+5}$ f) $f(x) = \sqrt{9x^2-4}$

16.- Halla el valor de k para que la f sea continua en $x=1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} & \text{si } x \neq 1 \text{ y } x \neq 2 \\ 2k+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

17.- Dada la función $f(x) = \frac{x^3+3x^2-x+3}{x^2-1}$.

a) Estudia su continuidad

b) ¿Qué valores hay que adjudicar a $f(1)$ y $f(-1)$ para que la función sea continua en $\mathbb{R}$?

18.- Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x+6 & \text{si } x < 1 \\ x+7 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2x+6 & \text{si } x < 1 \\ x-7 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
c) $f(x) = 5 - |2x-6|$ d) $f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 2x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

19.- Determina a y b para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x < 0 \\ ax+b & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x-5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

20.- Determina m y n para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq 0 \\ mx+n & \text{si } 0 < x < 2 \\ -1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

21.- Sea la siguiente función $f(x) = \begin{cases} ax+3 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{2x-1}{x+15}} & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & x > 1 \end{cases}$

a) Comprueba que es continua en 1

b) Calcula el valor de a para que sea continua en $\frac{1}{2}$

4.- Asíntotas

22.- Calcula todas las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ b) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$ c) $f(x) = \frac{3}{x+5}$ d) $f(x) = \frac{x^3+2x+7}{x^2+x+1}$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt{x}}$ f) $f(x) = \sqrt{x^2+3}$ g) $f(x) = 2x-3+\frac{5}{x-4}$ h) $f(x) = x - \frac{x^2}{x-3}$

23.- Sea la función $f(x) = a + \frac{b}{x+c}$ con a, b y c números reales. Calcúlalos sabiendo que:

- La gráfica de f presenta en $-\infty$ una asíntota horizontal de ecuación $y = -2$.
- La gráfica de f presenta en $x = 1$ una asíntota vertical.
- El punto (6, 3) pertenece a la gráfica de f.

Unidad 1: Boletín repaso

1.- Calcula la inversa de las siguientes funciones

a) $a(x) = 2x - 3$

c) $c(x) = 5 + \log_{10}(2x)$

e) $e(x) = e^{2x-3}$

b) $b(x) = \frac{x+4}{2x-5}$

d) $d(x) = \sqrt{x^2+3}$

2.- Calcula las siguientes composiciones usando las composiciones del ejercicio anterior.

a) $(a \circ e)(x)$

b) $(d \circ b)(x)$

c) $(d^{-1} \circ a)(x)$

d) $(e \circ c \circ c^{-1})(x)$

3.- Calcula los siguientes límites

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2+1}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+7^x}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+1}{3x-2}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x-7}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+5}{2} - \frac{x^2-2}{x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-2}$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 6x^2 + 8x - 3}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{16x^2+4} - 4x$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+x-1}{3x^2-2} \right)^{2x+1}$

4.- Indica si existe el siguiente límite $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ siendo $f(x) = \begin{cases} 3x & x \leq 2 \\ x^2 & x > 2 \end{cases}$

5.- Halla b para la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x-b}{b+1} & x < 0 \\ x^2+b & x \geq 0 \end{cases}$ sea siempre continua.

6.- Estudia la continuidad de la siguiente función $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 4-x & x > 1 \end{cases}$. Si hay alguna discontinuidad indica el tipo y después represéntala.

7.- Estudia la continuidad de la siguiente función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x-2|} & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$. Si hay alguna discontinuidad indica el tipo.

8.- Calcula las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3}$

b) $f(x) = \frac{x^2+2}{x-2}$

Soluciones:

1.- a) $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$ b) $f^{-1}(x) = \frac{5x+4}{2x-1}$ c) $f^{-1}(x) = \frac{10^{x-5}}{2}$ d) $f^{-1}(x) = \sqrt{x^2-3}$

e) $f^{-1}(x) = \frac{\ln x + 3}{2}$

2.-

3.- a) 0 b) 0 c) $\frac{5}{3}$ d) 2 e) ∞ f) 1 g) 1 h) 0 i) $\sqrt[3]{e^2}$

4.- No tiene límite puesto que los límites laterales no coinciden.

5.- Después de 0 es continua por ser una función polinómica, antes de 0 es continua ya que es una función racional cuyo denominador no se anula, vemos si es continua en cero con la condición de continuidad.

Para que sea continua en todo $\mathbb{R}$ $b=0$ o $b=-2$.

6.- Es continua antes y después de 1 por ser una función polinómica, analizamos la continuidad en uno con la condición de continuidad. No es continua en $x=1$.

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$, en $x=1$ presenta una discontinuidad de salto finito.

7.- Primero tenemos que sacar el valor absoluto. Antes y después de 2 la función es continua por ser una función racional cuyo denominador no se anula. Comprobamos si es continua en $x=2$ con la condición. No es continua en $x=2$. La continuidad de la función es $\mathbb{R} - \{2\}$, en $x=2$ presenta una discontinuidad de salto infinito.

8.- a) AV en $x=\sqrt{3}$ y $x=-\sqrt{3}$ (hay que estudiar los límites laterales), AH en $y=0$ y no hay AO.

b) AV en $x=2$ (hay que estudiar los límites laterales), AH no hay y AO $y=x+2$.

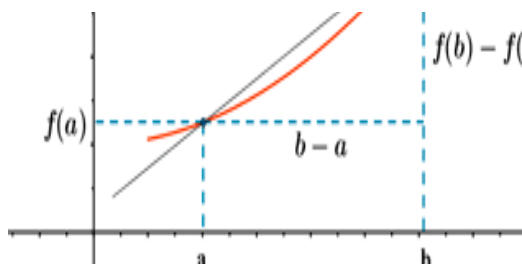
Unidad 2: Derivadas

1.- Tasa de variación media

Para conocer como varía una función en un determinado intervalo, se estudia la **tasa de variación media** (TVM). Dada una función $y=f(x)$ la TVM en el intervalo $[a,b]$ se define como: $TVM f[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

La TVM nos mide el aumento o disminución de dicha función en un intervalo $TVM[a,b]$ es el valor de la pendiente de la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

- Si $TVM f[a,b] > 0$ entonces f es creciente en $[a,b]$
- Si $TVM f[a,b] < 0$ entonces f es decreciente en $[a,b]$



$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Ejemplo: $f(x) = x^2 - x + 3$ vamos a calcular la TVM en el intervalo $[2, 2+h]$

$$TVM f[2, 2+h] = \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 - (2+h) + 3 - (2^2 - 2 + 3)}{h} = \frac{h^2 + 3h + 5 - 5}{h} = \frac{h^2 + 3h}{h} = h + 3$$

2.- Derivada de una función en un punto

Para medir el aumento o disminución de una función en un punto dado, utilizaremos la TVM en un intervalo muy próximo a este punto $(a, a+h)$ cuando $h \rightarrow 0$. A este valor le llamamos **derivada de la función en el punto** $x=a$ y se denota por $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ejemplo: Derivada de $f(x) = x^2$ en $x=2$

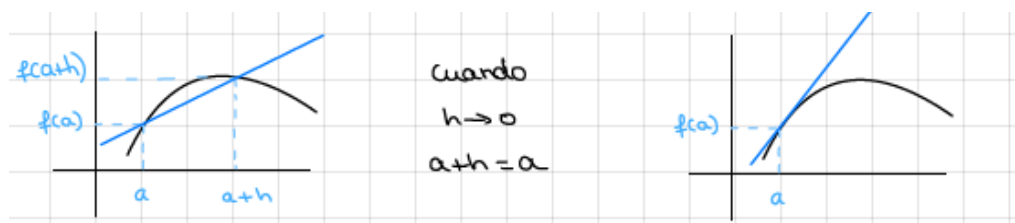
$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h + 4 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h + 4 = 4$$

Propuesto: Derivada de $f(x) = \frac{2}{x-1}$ en $x=-1$

3.- Interpretación geométrica de la derivada

Geométricamente $f'(a)$ representa el valor de la **pendiente de la recta tangente** a la gráfica de $y=f(x)$ en el punto $(a, f(a))$, siendo la ecuación de dicha tangente:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$



Ejemplo: Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \frac{4}{x-2}$ en el punto $(3, 4)$

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3) \rightarrow y - 4 = f'(3)(x - 3) \text{ vamos a calcular } f'(3)$$

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{3+h-2} - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4-4-4h}{h+1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h}{h(h+1)} = -4$$

$$y - 4 = (-4)(x - 3) \rightarrow y - 4 = -4x + 12 \rightarrow y = -4x + 16$$

4.- Cálculo de derivadas

En lugar de tener que aplicar límites cada vez que tengamos que calcular una derivada vamos a ver una serie de reglas para derivar funciones.

- Derivada de la **función constante**
Si $f(x) = k$ con $x \in \mathbb{R}$ entonces $f'(x) = 0$
- Derivada de la **función identidad**
Si $f(x) = x$ entonces $f'(x) = 1$
- Derivada de la función x^n
Si $f(x) = x^n$ entonces $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- Derivada de la **función logarítmica**
Si $f(x) = \log_a x$ entonces $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
Si $f(x) = \ln x$ entonces $f'(x) = \frac{1}{x}$

- Derivada de la **función exponencial**

Si $f(x)=a^x$ entonces $f'(x)=a^x \cdot \ln a$

Si $f(x)=e^x$ entonces $f'(x)=e^x$

- Derivada de las **funciones trigonométricas**

Si $f(x)=\operatorname{sen} x$ entonces $f'(x)=\cos x$

Si $f(x)=\cos x$ entonces $f'(x)=-\operatorname{sen} x$

Si $f(x)=\operatorname{tg} x$ entonces $f'(x)=1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

Si $f(x)=\operatorname{cotg} x$ entonces $f'(x)=\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$

Si $f(x)=\operatorname{arc} \operatorname{sen} x$ entonces $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Si $f(x)=\operatorname{arc} \cos x$ entonces $f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Si $f(x)=\operatorname{arc} \tan x$ entonces $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

4.1- Operaciones con derivadas

- Derivada de una **suma o resta de funciones**: $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

Ejemplo:

$$f(x)=x^5+x^2 \quad f'(x)=5x^4+2x$$

$$f(x)=\ln x+x^2 \quad f'(x)=\frac{1}{x}+2x$$

$$f(x)=\operatorname{sen} x+\cos x \quad f'(x)=\cos x-\operatorname{sen} x$$

- Derivada del **producto de un número por una función** $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$

Ejemplo:

$$f(x)=5x^4 \quad f'(x)=5 \cdot (4x^3)=20x^3$$

- Derivada del **producto de dos funciones** $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Ejemplo:

$$f(x)=x^3 \cdot \operatorname{sen} x \quad f'(x)=3x^2 \cdot \operatorname{sen} x + x^3 \cdot \cos x$$

$$f(x)=(x^2+1) \cdot \ln x \quad f'(x)=2x \cdot \ln x + (x^2+1) \cdot \frac{1}{x}$$

- Derivada del **cociente de funciones** $\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{x}{\operatorname{sen} x} \quad f'(x) = \frac{1 \cdot \operatorname{sen} x + x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2+5} \quad f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+5) + x \cdot 2x}{(x^2+5)^2}$$

4.2- Regla de la cadena

La derivada de la función f compuesta con g se obtiene utilizando la denominada regla de la cadena $[(g \circ f)(x)]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Ejemplos:

- $h(x) = \cos(x^4) \rightarrow g(x) = \cos x \text{ y } f(x) = x^4$

$$h(x)' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \operatorname{sen}(x^4) \cdot 4x^3$$

- $h(x) = (3x+2)^5 \quad h(x)' = 5(3x+2)^4 \cdot 3$

- $h(x) = \operatorname{sen}(\ln x) \quad h(x)' = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$

- $h(x) = (\cos x)^6 \quad h(x)' = 6 \cos^5 x \cdot (-\operatorname{sen} x)$

5.- Regla de l'hôpital

En el cálculo de límites, cuando tenemos una indeterminación $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ podemos aplicar la regla de l'hôpital que consiste en derivar numerador y denominador y posteriormente hacer el

límite $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1$

Función	Derivada
$f(x)=k$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=n \cdot x^{n-1}$
$f(x)=\sqrt[n]{x}$	$f'(x)=\frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x \cdot \ln a$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=\log_a x$	$f'(x)=\frac{1}{x \ln a}$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\frac{1}{x}$
$f(x)=\operatorname{sen} x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\operatorname{sen} x$
$f(x)=\operatorname{tg} x$	$f'(x)=1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x)=\operatorname{cotg} x$	$f'(x)=\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$
$f(x)=\operatorname{arc} \operatorname{sen} x$	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\operatorname{arc} \cos x$	$f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\operatorname{arc} \tan x$	$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$
$k \cdot f(x)$	$k \cdot f'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x)+f(x) \cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x)-f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$
$(g \circ f)(x)$	$g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Unidad 2: Boletín

1.- Tasa de variación media

- 1.- Para la función $f(x)=\sqrt{x+4}$ calcula su TVM en los intervalos $[0;1]$, $[0;0,01]$ y $[0;0,001]$ ¿Puedes dar una estimación de su tasa de variación instantánea?
- 2.- Una enfermedad se ha expandido durante los últimos tres meses según la función $f(t)=3t^2-t^3$, que mide los contagios en función del mes.
- a) Representa con ayuda de GeoGebra la función y calcula la TVM para dos primeros meses y para el último. ¿Qué observas?
- b) Analizando la tasa de crecimiento de la enfermedad durante los tres meses, ¿se puede decir que la enfermedad ha sido controlada por completo?

2.- Derivada de una función en un punto

- 3.- Calcula si es posible la derivada de las siguientes funciones.
- a) $f(x)=x^2-3x$ en $x=-1$ y $x=2$
- b) $f(x)=x^3+x-5$ en $x=0$ y $x=5$
- c) $f(x)=x^2-5$ en $x=-2$ y $x=2$
- 4.- Aplicando la definición, halla las siguientes derivadas en los puntos indicados
- a) $f(x)=2x^2-3x$ en $x=0$
- b) $f(x)=x^3$ en $P(1,1)$
- c) $f(x)=\frac{2}{x}$ en $x=4$

3.- Interpretación geométrica de la derivada

- 5.- Halla la ecuación de las rectas tangentes a la curva $y=x^4-2x^2-x$ en los puntos $A(-1,0)$ y $B(1,-2)$
- 6.- Calcula los puntos de corte con los ejes de la tangente a la curva $y=\frac{1}{x-1}$ en el punto $P(2,1)$. Si A y B son dichos puntos, ¿qué relación hay entre las longitudes de los segmentos AP y PB?
- 7.- Halla en qué puntos la recta tangente a la curva $y=x^3-5x^2+3x-2$ es horizontal y calcula, en cada caso, la ecuación de dicha tangente.
- 8.- Halla la recta tangente a la curva $f(x)=\sin x$ en el origen de coordenadas

4.- Cálculo de derivadas

9.- Calcula la derivada de las siguientes **funciones elementales**.

- a) $f(x)=5$ b) $f(x)=5x$ c) $f(x)=x^{10}$ d) $f(x)=\sqrt{x}$
e) $f(x)=\sqrt[5]{x}$ f) $f(x)=e^x$ g) $f(x)=7x^2$ h) $f(x)=3^x$
i) $f(x)=\log_3 x$

10.- Calcula la derivada de las siguientes **sumas de funciones**.

- a) $f(x)=3x^2+1$ b) $f(x)=8x^4+x^3-2x$ c) $f(x)=x^3+\operatorname{sen} x$
d) $f(x)=3\cos x+\ln x$ e) $f(x)=x-\operatorname{tg} x$ f) $f(x)=5x^5-\arccos x$
g) $f(x)=\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x^5}$ h) $f(x)=\frac{-2}{3}\sqrt{x^3}-\sqrt{15x}-\sqrt[3]{x^5}$ i) $f(x)=e^x-\cos x+\operatorname{arctg} x$

11.- Calcula la derivada de los siguientes **productos de funciones**.

- a) $f(x)=x^2 \cdot \operatorname{sen} x$ b) $f(x)=e^x \cdot \cos x$ c) $f(x)=(x^5+3) \cdot (x+1)$ d) $f(x)=(x^2+x-1) \cdot (e^x)$

12.- Calcula la derivada de los siguientes **cocientes de funciones**.

- a) $f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$ b) $f(x)=\frac{5x^4-3x^3}{x-1}$ c) $f(x)=\frac{4^x}{x^3}$ d) $f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$
e) $f(x)=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\operatorname{sen} x}$ f) $f(x)=\frac{x^2 \cdot \operatorname{tg} x}{e^x}$ g) $f(x)=\frac{2^x \cdot x^2}{\ln x}$

13.- Calcula la derivada de las siguientes funciones usando la **regla de la cadena**.

- a) $f(x)=(x+1)^3$ b) $f(x)=\ln x^2$ c) $f(x)=e^{x^2-5x+3}$
d) $f(x)=\cos(3^x)$ e) $f(x)=\operatorname{sen}\left(1-\frac{1}{x}\right)$ f) $f(x)=\sqrt{\ln(\operatorname{sen} x)}$
g) $f(x)=\ln(4x^2 \cdot \cos x)$ h) $f(x)=e^{x^2}-\tan(x^3-1)$ i) $f(x)=\frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{x}$
j) $f(x)=\arcsen\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ k) $f(x)=\ln(\ln x)+\operatorname{arctg}(x^3-1)$

14.- Calcula las siguientes derivadas.

a) $f(x) = \sqrt{3}$

b) $f(x) = 5x^4 + 2x^3 + 7x^2$

c) $f(x) = x^4 - 3x$

d) $f(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{5x}{4} - \frac{1}{6}$

e) $f(x) = (x^4 + 3x^2) \cdot (2 - 6x - x^2)$

f) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

g) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 5}$

h) $f(x) = \frac{x^3 - x + 3}{x^2 + 2x - 1}$

i) $f(x) = (x - 1)^5$

j) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + x - 3)^6$

k) $f(x) = (2x^2 - 1) \cdot (x^3 + 4x - 2)^4$

l) $f(x) = \sqrt{x^3 - 2}$

m) $f(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{2x - 1} \right)^3$

n) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot \sqrt{5x - 4}$

o) $f(x) = \sqrt{(3x - 5)^5 - 1}$

p) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x} - x}{(3x - 1)^2}$

r) $f(x) = e^x \cdot (x^2 - 7x - 3)$

s) $f(x) = e^{3x^3 - 5x + 1}$

t) $f(x) = \frac{e^{x^3} + x^3}{x}$

u) $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^x$

v) $f(x) = 7^{2x}$

w) $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$

x) $f(x) = 3^{x^3 - x}$

y) $f(x) = e^x \cdot \ln x$

z) $f(x) = \ln e^x$

15.- Calcula las siguientes derivadas.

a) $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

b) $f(x) = \frac{2^x - x}{3^x}$

c) $f(x) = \frac{x \cdot e^x}{\ln x}$

d) $f(x) = \ln(x^3 - 2x - 1)$

e) $f(x) = \log_2(3x^2 - 1)$

f) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln(7x^2)$

g) $f(x) = 5x \cdot \log_5 x^4$

h) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 5x})$

i) $f(x) = \sin(x^2 + e^{2x})$

j) $f(x) = \sqrt{\cos x}$

k) $f(x) = \sin(5x^2 - 2x + 1)$

l) $f(x) = 2\sin(x^2 + 1)$

m) $f(x) = x \cdot \cos(3x - 2)$

n) $f(x) = \frac{x + \sin x}{\cos(4x)}$

o) $f(x) = \tan^2(2x)$

p) $f(x) = \sin x \cdot \tan(x^2)$

r) $f(x) = \arcsin(e^x)$

s) $f(x) = \arctg(1 + x^2)$

t) $f(x) = \sqrt{\arccos x}$

u) $f(x) = \ln(\sin x + \arcsin x)$

16.- Calcula los siguientes límites usando la regla de l'hôpital.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \sin x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^3 - 1}$

Unidad 3: Aplicación de las derivadas

1.- Crecimiento y decrecimiento de una función

Sea $y=f(x)$ existe una relación entre el signo de la derivada y el hecho de que sea creciente o decreciente en ese punto.

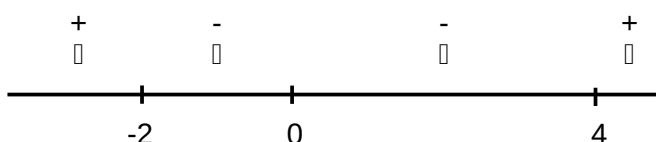
- Si $f'(a)>0$ entonces f es **creciente** en x_0 .
- Si $f'(x_0)<0$ entonces f es **decreciente** en x_0 .
- Si $f'(x_0)=0$ entonces f presenta un **máximo o un mínimo** relativo en x_0 .

Se llaman puntos singulares de una función a los puntos donde la recta tangente a la gráfica de la función es una recta horizontal. Entre ellos están los máximos y los mínimos relativos, pero puede haber otros. Las abscisas de los puntos singulares son las soluciones de $f'(x)=0$.

Ejemplo: Sea $f(x)=6x^5-15x^4-80x^3+1$ estudia su crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos.

$$f'(x)=30x^4-60x^3-240x^2=30x^2(x^2-2x-8) \quad 30x^2(x^2-2x-8)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 30x^2=0 \rightarrow x=0 \\ x^2-2x-8=0 \rightarrow x=-2 \quad x=4 \end{cases}$$

Los puntos singulares son $x=-2$, $x=0$ y $x=4$ veamos si son máximos o mínimos, así como el crecimiento y decrecimiento.



$f(x)$ es creciente de $(-\infty, -2) \cup (4, \infty)$.

$f(x)$ es decreciente de $(-2, 0) \cup (0, 4)$.

En $x=-2$ hay un máximo relativo.

En $x=4$ hay un mínimo relativo.

En $x=0$ no hay ni máximo ni mínimo relativo.

1.1- Derivada segunda para el cálculo de extremos relativos

- Si $f''(a)>0$ la curva está por encima de la tangente entonces $(a, f(a))$ es un mínimo relativo.
- Si $f''(a)<0$ la curva está por encima de la tangente entonces $(a, f(a))$ es un máximo relativo.

Ejemplo: En el ejemplo anterior $f''(x)=120x^3-180x^2-480x$

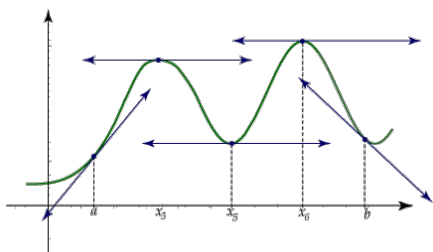
$$f''(-2)=120(-2)^3-180(-2)^2-480(-2)<0 \rightarrow \text{máximo relativo}$$

$$f''(0)=120(0)^3-180(0)^2-480(0)=0 \rightarrow \text{ni máximo ni mínimo relativo}$$

$$f''(4)=120(4)^3-180(4)^2-480(4)>0 \rightarrow \text{mínimo relativo}$$

2.- Curvatura y puntos de inflexión

La posición relativa de una curva y sus tangentes en los distintos puntos de su dominio define lo que se conoce como curvatura de la función en un punto. Los puntos en donde se produce el cambio de la posición relativa entre la curva y sus tangentes se denominan puntos de inflexión.



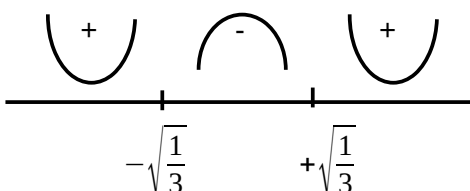
- Si $f''(a) > 0$ f es convexa en $x=a$ (la tangente por debajo de la función).
- Si $f''(a) < 0$ f es cóncava en $x=a$ (la tangente por encima de la función).
- Si $f''(a) = 0$ f presenta un punto de inflexión en $(a, f(a))$

Ejemplo: Estudia la curvatura de la siguiente función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4 = 0 \rightarrow f''(x) = 12x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{12}} = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

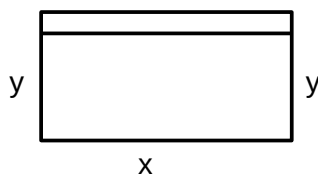


Convexa: $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \infty\right)$ Cóncava: $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$

3.- Optimización

El proceso de búsqueda del valor que hace máxima o mínima una función f se conoce como optimización

Ejemplo: En una granja ecológica se desea delimitar una parcela rectangular y así hacer un recinto para criar gallinas camperas. El presupuesto solo alcanza para comprar 200 m de malla de alambre así que se decide aprovechar un muro para uno de los lados y alambre para los otros tres. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela de área máxima?



Queremos maximizar el área por lo tanto queremos maximizar la función área $f(x) = x \cdot y$

Tenemos que encontrar el máximo de la función $f(x) = x \cdot y$ por lo tanto derivaremos e igualar a cero, pero no podemos derivar con dos

incógnitas, debemos buscar una relación entre ellas, sabemos que en total hay 200m de alambre

$$x + y + y = 200 \rightarrow x = 200 - 2y \text{ sustituimos la } x \text{ en nuestra función y obtenemos:}$$

$$f(y) = (200 - y) \cdot y = 200y - y^2$$

Derivamos e igualamos 0

$$f'(y) = 200y - 4y$$

$$f'(y) = 200y - 4y = 0 \rightarrow y = 50$$

$$f''(y) = -4 < 0 \rightarrow y = 50 \text{ es un máximo.}$$

Solución: Las dimensiones de la parcela han de ser 100x50 metros.

4.- Representación de funciones

Vamos a ver como representar las funciones elementales:

- **Recta** $f(x) = mx + n$

Se representan haciendo una tabla de valores.

- m es la pendiente: si $m > 0$ la función es creciente y si $m < 0$ la función es decreciente.
- n es la ordenada en el origen.

- **Parábola** $f(x) = ax^2 + bx + c$

- Para representarlas debemos seguir los siguientes pasos

$$1.- \text{Vértice } v = \frac{-b}{2a}$$

2.- Puntos corte ejes.

3.- Tabla de valores antes y después del vértice.

- Sabemos que las parábolas son simétricas respecto del vértice.
- Si $a > 0$ f es convexa y si $a < 0$ f es cóncava.
- En $x = v$ tendrá un mínimo o un máximo relativo.

- Funciones polinómicas $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

- Su dominio son todos los números reales y no tiene asíntotas de ningún tipo.

- Funciones **racionales** $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

- Su dominio son todos los números reales salvo los que anulan el denominador.
- Hay que estudiar las asíntotas ya que suelen tener.

- Funciones **radicales** $f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$

- Su dominio cuando n es impar son todos los números reales, y cuando n es par el dominio son todos los números tales que $p(x) \geq 0$.
- También hay que estudiar asíntotas.

- Funciones **exponenciales** $f(x) = a^x$

- Su dominio son todos los números reales.
- Todas las exponenciales pasan por el $(0,1)$
- No cortan al eje x (siempre por encima)
- Si $0 < a < 1$ f es decreciente
- Si $a > 1$ f es creciente

- Funciones **logarítmicas** $f(x)=\log_a x$

- Su dominio son todos los números que hagan positivo el argumento.
- Todas las exponenciales pasan por el $(1,0)$
- Si $0 < a < 1$ f es decreciente
- Si $a > 1$ f es creciente

- Funciones **trigonométricas**

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

$$f(x) = \cos x$$

- | | |
|--|--|
| - Su dominio son todos los números reales. | - Su dominio son todos los números reales. |
| - Recorrido $[-1,1]$ | - Recorrido $[-1,1]$ |
| - Periódica $T=2\pi$ | - Periódica $T=2\pi$ |
| - Simetría impar | - Simetría par |

Para **representar funciones** de forma general debemos seguir los siguientes pasos:

- 1) Dominio
- 2) Puntos de corte con los ejes (eje X $\rightarrow y=0$, eje Y $\rightarrow x=0$)
- 3) Signo de la función (positiva cuando $f(x)>0$, negativa si $f(x)<0$)
- 4) Simetría (par $f(-x)=f(x)$ e impar $f(-x)=-f(x)$)
- 5) Periodicidad (funciones trigonométricas)
- 6) Asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas)
- 7) Monotonía (crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos)
- 8) Curvatura (concavidad, convexidad y puntos de inflexión)

Ejemplo: Haz un estudio completo de la función $y = \frac{x^3}{x^2+2x+1}$ y después realiza un esbozo de la gráfica con los resultados obtenidos (se hará en el aula).

Unidad 3: Boletín

Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos

1.- Determina los máximos y mínimos relativos, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -2x^2 + 8x$ b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ c) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$ d) $f(x) = 3x^5 + 5x^3$

2.- Calcula qué valores deben tener las constantes a, b, c, d para que la función

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un mínimo relativo en el punto $P(-2, -3)$, un máximo relativo para $x = 1$ y además $f(0) = -1$.

3.- Halla los valores de las constantes a, b y c que hacen que la parábola $f(x) = -ax^2 + bx + c$ pase por $P(-1, 20)$ y tenga un máximo en $Q(3, 12)$.

4.- Esboza la gráfica de una función que tenga las tres características siguientes:

- $f'(x) > 0$ si $x < -3$ o si $x > 4$
- $f'(x) < 0$ si $-3 < x < 4$
- $f(-3) = 4$ y $f(4) = -2$

Curvatura: Concavidad, convexidad y puntos de inflexión

5.- Determina la curvatura de las siguientes funciones

a) $f(x) = -2x^2 + 8x$ b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ c) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$ d) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

6.- Calcula las abscisas de los puntos de inflexión $f(x)$ si $f''(x) = (x-2)(x-4)^2(x+5)$

Optimización

7.- Los beneficios de una fábrica de camisetas dependen del número de unidades producido cada día según la función $f(x) = -x^2 + 6x - 5$, donde x indica miles de camisetas producidas al día y f(x), miles de euros. Si las limitaciones de personal y máquinas obligan a producir entre 2000 y 3500 camisetas, ¿cuántas debe producir diariamente para obtener máximos beneficios?

8.- En una granja ecológica se desea delimitar una parcela rectangular y así hacer un recinto para criar gallinas camperas. El presupuesto solo alcanza para comprar 200 m de malla de alambre así

que se decide aprovechar un muro para uno de los lados y alambre para los otros tres. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela de área máxima?

9.- La asociación Huertas Urbanas ha conseguido una licencia del Ayuntamiento para vallar una parcela rectangular de 700 m^2 de superficie sobre una carretera a las afueras de la ciudad. Sobre la carretera ya hay un murete y la valla costará 10 € el metro lineal, mientras que para los otros tres lados el precio asciende a 16 € el metro lineal. Por razones obvias, ningún lado de la parcela debe medir menos de un metro. ¿Qué dimensiones debe tener la parcela para que la valla sea lo más barata posible?

10.- Un artista ha adquirido un listón de 6 m de largo del que quiere colgar dos grandes telas rectangulares, una a continuación de la otra y que ocupen todo el listón. La primera ha de ser naranja, y el lado que está sobre el listón debe ser un tercio del lado que cuelga; y la otra será verde y debe tener forma de cuadrado. ¿Qué dimensiones deben tener las telas para que su superficie sea la mínima posible?

11.- Una envasadora de refrescos desea minimizar el coste de sus envases, que son latas cilíndricas en los que la chapa de las dos bases vale el doble que la chapa utilizada para la cara lateral. Si las latas deben contener 333 cm^3 de líquido, ¿cuáles son las dimensiones que hacen que el coste en material sea el menor posible? ¿Cuáles serían las dimensiones para reducir al máximo el material utilizado y así reducir el impacto ecológico?

12.- En el salón de una vivienda se desea poner una entrada de luz cuya parte inferior es un rectángulo, y la superior, un semicírculo. El presupuesto solo permite comprar 6 m de material para hacer el marco. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la parte rectangular para que entre un máximo de luz?

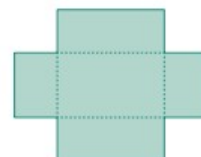
13.- Lucía comercializa su producción de arándanos en cajas de cartón sin tapa. Actualmente, cajas son paralelepípedos de base cuadrada y de área total 192 cm^2 las que tiene volumen máximo

a) ¿Cuál es dicho volumen?

Ha encontrado unas planchas de cartón de $15 \times 20 \text{ cm}$ que son más económicas y, cortando de las cuatro esquinas cuadraditos iguales, quiere construir una caja de volumen máximo.

b) ¿De qué tamaño deben ser esos cuadraditos?

c) ¿Cuál será el volumen?



Representación de funciones

14.- Representa haciendo un estudio completo las siguientes funciones

- a) $f(x) = (x^2 - 4)(x + 1)$ b) $f(x) = \frac{x^2}{x - 4}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ d) $f(x) = x e^x$
e) $f(x) = x \ln x$ f) $f(x) = \sin(3x)$ h) $f(x) = 5 \cos x$

Selectividad

15.- Junio 2022: Dibuje la gráfica de una función f continua y no negativa en el intervalo $[0,3]$, tal que

$f(0)=0$, $f(3)=0$, $f''>0$ en el intervalo $(0,1)$, $f''<0$ en el intervalo $(2,3)$ y f constante en el intervalo $(1,2)$

16.- Junio 2021: De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos lados sobre los ejes de coordenadas y un vértice sobre la recta $x+2y=4$ determine los vértices del que tienen mayor área.

17.- Julio 2021: Calcula los valores de a , b y c que hacen que $f(x)=ax^3+bx^2-3x+c$ cumpla $f(0)=1$ y tenga extremos relativos en $x=\pm 1$

18.- Junio 2020: Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)=x(\ln x-1)$. Calcule, si existen, los máximos y los mínimos relativos de la función f .

19.- Julio 2019: Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función $f(x)=x^2 \cdot \ln x$

20.-Septiembre 2018: Calcula los valores de a , b , c y d para que la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tenga un punto de inflexión en el punto $(0,5)$ y la tangente a su gráfica en el punto $(1,1)$ sea paralela al eje X .

21.- Junio 2018: Calcula los vértices del rectángulo de área máxima que se puede construir, si uno de los vértices es el , otro está sobre el eje X , otro sobre el eje Y y el otro sobre la recta $2x+3y=8$

22.- Junio 2018: Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos relativos de la función: $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$

1.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-3x^2}{x^2-x-6}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-5}{\sqrt[3]{x^2+2}}$

2.- Dada la siguiente función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < -2 \\ 2 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 3x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Halla el límite en el punto $x = -2$

b) Estudia la continuidad de la función. Indica las discontinuidades.

3.- Halla el valor de k para que la función $f(x) = \begin{cases} 2^{x-2} & \text{si } x \leq 3 \\ \sqrt{x+k} & \text{si } x > 3 \end{cases}$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

4.- Calcula la derivada de la función $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ en el punto de abscisas 1, usando la definición.

5.- Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{3x-7}{x+2}\right)^2}$

b) $f(x) = e^{\frac{-x}{2}} \cdot \tan^2 x$

c) $f(x) = \ln\left(\frac{\arcsen x}{3^x}\right)$

6.- Halla las rectas tangentes a la curva $f(x) = \frac{x^3-3x^2}{9}$ paralelas a la bisectriz del primer cuadrante.

7.- Un comerciante adquirió 10000kg de uvas y las tiene depositadas en un almacén. Sabe que las podría vender hoy a 2€ el kg y que su precio aumentará 5 céntimos cada día que pase hasta dentro de 20 días. De las uvas almacenadas se deteriorarán 10 kg por el cuadrado de los días que transcurran. ¿En que momento le convendrá vender las uvas para que su valor sea máximo? ¿Cuánto ganará?

8.- Hemos construido con planchas de acero un depósito ortoédrico de base cuadrada, abierto por arriba, con una capacidad de 108m³. ¿Qué dimensiones debe tener para que su superficie sea mínima y por lo tanto, el coste del acero usado sea el menor posible?

9.- De todos los conos cuya generatriz mide 10 cm, hallar la altura y el radio de aquel cuyo volumen es máximo.

10.- Determina la parábola que es tangente a la recta $y=2x-3$ en el punto $(2,1)$ y que pasa por el punto $(5,-2)$.

11.- Con 100 m de valla queremos delimitar una parcela rectangular aprovechando una pared, de modo que solo tengamos que vallar tres de sus lados. Calcula las dimensiones de la parcela de área máxima que podemos vallar.

12.- Representa las siguientes funciones:

a) $-3x^4 + 4x^3$ b) $\frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$ c) $\frac{-2}{x^2 - 1}$

Soluciones

1.- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{9}{5}$ c) $+\infty$

2.- a) No tiene límite en $x = -2$ ya que los límites laterales no coinciden. b) Es continua en

$\mathbb{R} - \{-2, 1\}$. En $x = -2$ discontinuidad salto finito, y en $x = 1$ evitable.

3.- $k = 1$

4.- $f'(1) = \frac{-1}{2}$

5.- a) $f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3x-7}{x+2}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{3(x-2)-(3x-7)}{(x+2)^2}\right)$

b) $f'(x) = \frac{-1}{2} \cdot e^{\frac{-x}{2}} \cdot \tan^2 x + e^{\frac{-x}{2}} \cdot 2 \tan x \cdot (1 + \tan^2 x)$

c) $f(x) = \frac{3^x}{\arcsen x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot 3^x - 3^x \ln 3 \cdot \arcsen x$

6.- $y = x - 3$

7.- El máximo se obtiene en el 9 día y gana 22515,5€.

8.- El mínimo se obtiene con un ortoedro de base 6m y altura 3m.

9.- Para que el volumen sea máximo a altura do

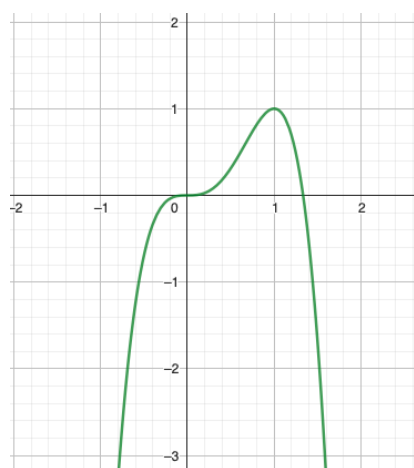
cono será $\frac{10}{\sqrt{3}}$ y el radio $10\sqrt{\frac{2}{3}}$

10.- $f(x) = -x^2 + 6x - 7$

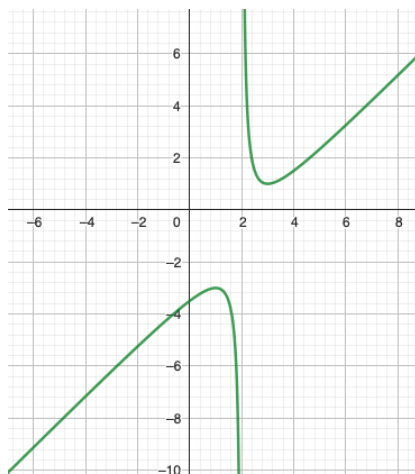
11.- La parcela debe medir 25x50 m para que el área sea máxima.

12.-

a)



b)



c)

