

1 - Conxuntos numéricos

1.1.- Números racionais

Os números racionais $\mathbb{Q}$ son calquera que poida poñerse como fracción (división entre dous números enteiros). Logo os elementos do conxunto $\mathbb{Q}$ poden ser:

- os **números naturais** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- os **números enteiros** $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Notar que calquera n° natural tamén é enteiro; denótase $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- os **números decimais limitados** ou **exactos** (número *limitado* ou *finito* de cifras decimais)
- os **números decimais ilimitados periódicos** (número *infinito* de cifras decimais **que se repiten de forma regular**)

Como $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ están incluídos en $\mathbb{Q}$, escribimos esta relación como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Poñede exemplos e veremos que sempre son o mesmo que unha fracción (e viceversa).

1.2.- Números irracionais

Os números irracionais son calquera número que non sexa racional. Logo só poden ser os **números decimais ilimitados NON periódicos** (número *infinito* de cifras decimais **que NON se repiten de forma regular**).

Estes números proveñen de:

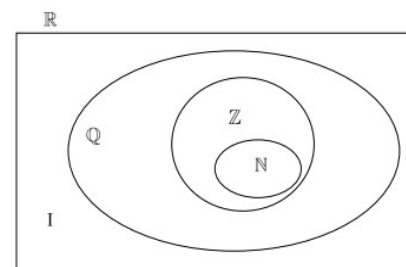
- raíces e radicais de números enteiros que non son exactas como $\sqrt{2}$ ou $\sqrt[5]{400}$
- ou son resultado de infinitas operacións, como $\pi = 4 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \dots \right)$ (Fórmula de Leibnitz) ou

$$\pi = 2 \cdot \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \right) \quad (\text{Fórmula de Wallis})$$

1.3.- Esquema de clasificación dos números reais

O conxunto dos números reais $\mathbb{R}$ está formado pola unión dos números racionais $\mathbb{Q}$ (fraccións) e dos números irracionais I (decimais non periódicos).

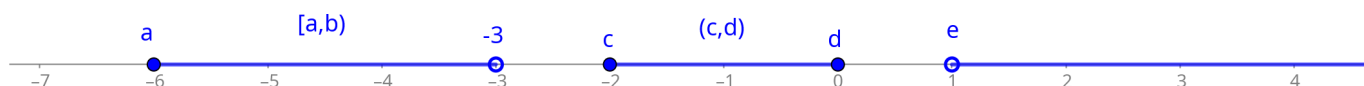
Os números reais represéntanse na recta numérica, e hai unha equivalencia entre números e puntos da recta:



- Calquera punto da recta se corresponde con un número enteiro ou decimal
- Calquera número enteiro ou decimal se corresponde con un punto da recta

Polo tanto **punto da recta $\approx$ número**.

2 - Intervalos e semirrectas



Son conxuntos de números reais (subconxuntos de $\mathbb{R}$) que se poden representar como un segmento ou semirrecta (con ou sen extremos)

- **Intervalo** de extremos **a** e **b**: é o conxunto de números (ou puntos) comprendidos entre **a** e **b**.
- **Semirrecta** de extremo **a**: é o conxunto de números maiores (ou menores) que **a**.
- Se no conxunto incluímos os extremos **a** e **b**, diremos que é un **intervalo pechado**. Denótase con corchetes e os bordes representase cun punto sólido (recheo de cor). Como conxunto denótase da forma $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$
- Se no conxunto NON incluímos os extremos **a** e **b**, diremos que é un **intervalo aberto**. Denótase con parénteses e os bordes representase cun punto oco. Como conxunto denótase da forma $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$
- Se o conxunto só ten un extremo **a**, diremos que é unha **semirrecta** (aberta ou pechada). Como conxunto denótase da forma $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / a < x\}$ ou $[-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / a \geq x\}$
- Tamén hai intervalos semiabertos ou semipechados con un extremo de cada tipo.

2.1.- Operacións con conxuntos

Permite expresar subconxuntos de $\mathbb{R}$ máis complexos.

A unión $\cup$ de dous conxuntos está formada por todos os elementos que pertencen a algún dos dous conxuntos.

A intersección $\cap$ de dous conxuntos está formada polos elementos que pertencen a ambos os conxuntos á vez.

Exemplo: Dados os conxuntos $A = (-4, 3)$ e $B = (-2, 4]$ os conxuntos $A \cup B$ e $A \cap B$ son:

$$A \cup B = (-4, 3) \cup (-2, 4] = (-4, 4]$$

$$A \cap B = (-4, 3) \cap (-2, 4] = (-2, 3)$$

3 - Propiedades das potencias

Permiten simplificar operacións con potencias se as bases ou os expoñentes se repiten.

Propiedade		Base Enteira	Base racional
MESMO EXPOÑENTE	Potencia dun produto	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n$
	Potencia dun cociente	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n$
MESMA BASE	Produto de potencias coa mesma base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$
	Cociente de potencias coa mesma base	$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$
	Potencias de expoñente cero	$a^0 = 1$	$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$
	Potencia de outra potencia	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n \cdot m}$
EXPOÑENTE NEGATIVO	Inverso dun número	$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$
	Potencia inversa	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
EXPOÑENTE RACIONAL	Radical	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	
	Caso xeral	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$	

NON Propiedade		Contra-exemplo
Potencia dun produto sen base nin expoñente igual (en xeral non se poden reducir a unha única potencia)	$a^n \cdot b^m \neq (a \cdot b)^{n+m}$	$2^3 \cdot 5^2 = 8 \cdot 25 = 200$ pero $(2 \cdot 5)^{3+2} = 10^5 = 100000$
Potencias de sumas ou restas (a fórmula para o cálculo só é fácil con $n=2$)	$(a+b)^n \neq a^n + b^n$ $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$	$(6+3)^2 = 9^2 = 81$ pero $6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45$ e sen embargo $(6+3)^2 = 6^2 + 3^2 + 2 \cdot 6 \cdot 3 = \dots = 81$

4 - Radicais

4.1.- Raíces cadradas

A raíz cadrada é a operación inversa de elevar ao cuadrado: $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$

Cualquer número real positivo $a \in \mathbb{R}^+$ ten dúas raíces cadradas que son opostas entre si: $+\sqrt{9}=3$ y $-\sqrt{9}=-3$ pois $3^2=9$ e $(-3)^2=9$. A operación $\sqrt{}$ SEMPRE é positiva

4.2.- Raíces n-ésimas

A raíz n-ésima (**enésima**) é a operación inversa a elevar á n-ésima potencia:

$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$	n é o <i>índice</i> da raíz a é o <i>radicando</i> b é a <i>raíz n-ésima</i> $\sqrt[n]{a}$ se lle chama <i>radical</i>
---	---

O número de raíces que ten un número real $a \in \mathbb{R}$ depende da **paridade** do índice **n** e do signo do radicando **a**:

$\sqrt[n]{a}$ con a positivo	$\sqrt[n]{a}$ con a negativo	$\sqrt[n]{0}$
$a > 0 \rightarrow \begin{cases} n \text{ par} : 2 \text{ raíces} \\ n \text{ impar} : 1 \text{ raíz} \end{cases}$	$a < 0 \rightarrow \begin{cases} n \text{ par} : \text{non hai raíces} \\ n \text{ impar} : 1 \text{ raíz} \end{cases}$	$a = 0 \rightarrow 1 \text{ raíz}$

4.3.- Propiedades dos radicais

Propiedade		Exemplos
Relación entre potencias e radicais (converteremos a operación ao formato máis útil)	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ e $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt{49} = \sqrt[2]{49} = 49^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{2^8} = a^{\frac{8}{3}}$
Amplificación e simplificación de radicais (permite aumentar/reducir o índice)	$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:d]{a^{m:d}}$	$\sqrt[5]{7^{10}} = \sqrt[5:5]{7^{10:5}} = \sqrt[1]{7^2} = 49$
Producto de radicais (do mesmo índice!) (permite unir ou separar radicais)	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{21}$; $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{6} = \sqrt[5]{12}$
Extracción de radicais ou introdución de factores (permite simplificar o radicando ou unir expresións en un único radical)	$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[4]{x^5 \cdot y} = \sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{x \cdot y} = x \cdot \sqrt[4]{x \cdot y}$
Cociente de radicais (permite unir ou separar radicais)	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt[7]{20}}{\sqrt[7]{5}} = \sqrt[7]{4}$
Potencia de un radical (permite cambiar de orden potencia e raíz)	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	$(\sqrt[7]{13})^2 = \sqrt[7]{13^2}$

Raíz de un radical (permite unir ou separar radicais)	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$	$\sqrt[6]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[18]{2}$
Suma ou resta de radicais idénticos (é o único caso no que se poden sumar ou restar radicais)	$p \cdot \sqrt[n]{a} + q \cdot \sqrt[n]{a} = (p+q) \sqrt[n]{a}$	$3\sqrt[5]{2} - 8\sqrt[5]{2} + 4\sqrt[5]{2} = -\sqrt[5]{2}$
NON Propiedade Suma ou resta de radicais NON idénticos (Non podes facer isto. PUNTO)	$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$	Contraexemplo $\sqrt[3]{8+1} = \sqrt[3]{9} \notin \mathbb{Q}$ $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2+1 = 3 \in \mathbb{Q}$

4.4.- Racionalización de radicais.

Se un radical aparece no denominador dunha expresión, pode ser útil obter unha nova expresión igual pero sen radicais no denominador. A esta transformación se lle chama **racionalizar** e para isto debemos multiplicar NUM e DEN por unha *expresión axeitada* que depende do radical do denominador (amplificar a fracción multiplicando por 1).

Distinguimos dous casos:

Un único termo no denominador (un único sumando, non hai máis sumas nin restas) Amplificamos completando o radical	$\frac{X}{\sqrt[n]{a}} = \frac{X}{\sqrt[n]{a}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a^2}}{\sqrt[n]{a^2}} = \frac{\sqrt[n]{a^2} \cdot X}{\sqrt[n]{a^3}} = \frac{\sqrt[n]{a^2} \cdot X}{a}$
Dous termos no denominador (dous sumandos) Amplificamos co conxugado do denominador. O conxugado do binomio $x+y$ é $x-y$ (e viceversa)	$\frac{X}{3-\sqrt{a}} = \frac{X}{3-\sqrt{a}} \cdot \frac{3+\sqrt{a}}{3+\sqrt{a}} = \frac{X \cdot (3+\sqrt{a})}{3^2 - \sqrt{a}^2} = \frac{X \cdot (3+\sqrt{a})}{9-a}$

Exemplos: $\frac{5}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{5^{3-2}}}{\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5^{3-2}}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{5}}{5} = \sqrt[3]{5};$

$\frac{7}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{7 \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{7\sqrt{2}+7\sqrt{3}}{2-3} = -7\sqrt{2}-7\sqrt{3}$

5 - Logaritmos

Se lle chama **logaritmo** (en base **b** de **a**) ao expoñente **x** tal que $b^x = a$. Escribimos entón que $x = \log_b a$. Chamamos *logaritmo a x*, *base a b* e *argumento a a*.

Exemplos: $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$ $\log_3 81 = 4$ porque $3^4 = 81$ $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ porque $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

O logaritmo é un expoñente

Poderemos calcular algúns logaritmos de forma exacta, pero a inmensa maioría só se poden calcular con máquina.

Os logaritmos máis usados son:

- Logaritmo de base $b=10$ (en enxeñería e ciencias experimentais), chamado *logaritmo decimal*: $\log_{10} a = \log a$
- Logaritmo de base $b=2$ (en ciencias da información), chamado *logaritmo binario*: $\log_2 a = \lg a$
- Logaritmo de base $b=e$ (en matemáticas e resto de ciencias), chamado *logaritmo neperiano*: $\log_e a = \ln a$

5.1.- Inconsistencias no cálculo de logaritmos

Non é posible usar bases negativas con expoñentes decimais

Se a base é negativa, a potencia racional é INDEFINIBLE: $(-2)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(-2)^3} \nexists$ pero $(-2)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-2)^3} \approx -1,52$

Logo **non podemos usar bases negativas** cando traballemos con logaritmos ou expoñentes fraccionarios.

Non é posible usar argumentos negativos

Partindo de bases positivas, non podemos chegar a resultados negativos: $2^x = -4 \Rightarrow$ imposible, logo $a \geq 0$.

Non é posible usar bases 0 ou 1

Se a base é 1, o logaritmo NON TEN sentido: $1^x = 4 \Rightarrow$ imposible, logo $b \neq 1$.

Se a base é 0, o logaritmo NON TEN sentido: $0^x = 4 \Rightarrow$ imposible, logo $b \neq 0$.

Non podemos usar un argumento nulo

Se o argumento é 0, o logaritmo NON TEN sentido: $2^x = 0 \Rightarrow$ imposible, logo $a \neq 0$.

En resumen: $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$, sendo $a > 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$

5.2.- Propiedades dos logaritmos

Supoñemos que $\log_b a$ é unha expresión numérica válida, é dicir, $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$. Entón

a) O logaritmo é unha función crecente (para bases grandes): $x > y \Leftrightarrow \log_b x > \log_b y$ se $b > 1$.

En particular, números distintos teñen logaritmos distintos: $x \neq y \Leftrightarrow \log_b x \neq \log_b y$.

b) O **logaritmo da base** é 1: $\log_b b = 1$ porque $b^x = b \Rightarrow x = 1$

c) O **logaritmo de 1** é 0: $\log_b 1 = 0$ porque $b^x = 1 \Rightarrow x = 0$

d) O **logaritmo dun produto** é igual á suma dos logaritmos $\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$ porque ...

▷ *Exemplo:* $\log 40 + \log 25 = \log (40 \cdot 25) = \log 1000 = \log 10^3 = 3$ (Comprobar!)

▷ *¿É certo que $\ln 40 + \ln 25 = \ln (40 \cdot 25)$?*

▷ *¿É certo que $\log (40 \cdot 25) = \log 40 + \log 25$?*

e) O **logaritmo dun cociente** é igual á diferenza dos logaritmos $\log_b \left(\frac{x}{y} \right) = \log_b x - \log_b y$ porque ...

▷ *Exemplo:* $\log 80 - \log 8 = \log \frac{80}{8} = \log 10 = 1$ (Comprobar!)

▷ *¿É certo que $\log 80 - \log 8 = \log \left(\frac{80}{8} \right)$?*

▷ *¿É certo que $\log (80 - 8) = \frac{\log 80}{\log 8}$?*

▷ *¿É certo que $\log (80 - 8) = \log \frac{80}{8}$?*

f) No logaritmo dunha potencia, **o expoñente sae fóra do logaritmo**: $\log_b a^n = n \cdot \log_b a$. Como unha raíz n-ésima é unha potencia de expoñente $\frac{1}{n}$, entón $\log_b \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log_b a = \frac{\log_b a}{n}$

▷ *Exemplo:* $\log 32 = 5 \cdot \log 2$ (Comprobar!)

▷ *Exemplo:* $\log \sqrt{2} = \frac{\log 2}{2}$ (Comprobar!)

g) **Cambio de base:** $\log_b a = \frac{\log_k a}{\log_k b}$

▷ *Exemplo:* $\log_3 40 = \frac{\log 40}{\log 3} = \frac{1,6021}{0,4771} = 3,3580$

6 - Aproximacións e erro

6.1.- Expresión decimal dos números reais. Erros e cotas

En moitos contextos nos que se usan números reais con moitas cifras decimais, substituímos por aproximacións, que son basicamente o resultado de cambiar as cifras de inferior valor por ceros: $\frac{2}{3} = 0,6666666... \approx 0,6600000... = 0,66$ ou $8520\,497,57\,€ \approx 8500\,000\,€$

Entón substituímos o número real x por unha aproximación a . Se $a > x$ a aproximación é **por exceso** e se $a < x$ a aproximación é **por defecto**. **Redondear** é tomar a aproximación que está máis cerca de x :

$$7,07 < \sqrt{50} = 7,07106781... < 7,08 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{50} \approx 7,07 & \text{por defecto (valor redondeado)} \\ \sqrt{50} \approx 7,08 & \text{por exceso} \end{cases}$$

Hai unha diferenza, máis ou menos grande, entre o número auténtico x e a aproximación a . Esa diferenza chámase **erro absoluto** E_a : *Erro absoluto* = $|\text{Valor real} - \text{Aproximación}|$, é dicir: $E_a = |x - a|$.

Para calcular E_a necesitamos saber todas as cifras de x , pero iso soe ser imposible, así que se usa unha cota deste erro. Unha cota do erro k é un número maior ou igual que o valor absoluto do erro $E_a = |x - a| \leq k$

$$E_a = |7,07106781... - 7,07| = 0,00106781... < 0,0011 \quad (\text{cota de } E_a)$$

Para poñer en perspectiva o erro absoluto trabállase mellor co **erro relativo** (que se soe dar en porcentaxe). Ten o mesmo problema no cálculo que E_a , así que o cálculo se adapta con unha cota de x (aproximación por exceso): $E_r = \left| \frac{E_a}{x} \right| \leq \left| \frac{E_a}{X_c} \right|$

7 - Notación científica

Un número N en notación científica consta de dous factores: un número decimal e unha potencia en base 10:

$N = \underbrace{a,bcd...}_{\text{cifras significativas}} \cdot 10^n$	n indica a orde de magnitude: - o expoñente é un número enteiro. - Se n é positivo o número é <i>grande</i> - Se n é negativo o número é <i>pequeno</i> - O número decimal está entre 1 e 10 (só ten unha cifra antes da coma decimal) - As cifras do n° decimal son as cifras significativas. A cantidade de cifras expresan a precisión da medida.
$1\text{ UA} = 1,496 \cdot 10^{11} m$	- A orden de magnitude é 10^{11} ou cen mil millóns - O expoñente é positivo, logo o número é <i>grande</i> - Ten 4 cifras significativas
$1\text{ Å} = 1 \cdot 10^{-10} m$	- A orden de magnitude é 10^{-10} ou dez mil millonésima - O expoñente é negativo, logo o número é <i>pequeno</i> - Ten 1 cifra significativa