

Unidade 5 – Cálculo Integral - Exercícios

1 - Integrais imediatas

1) Obtén a integral indefinida en cada caso:

- a) $\int 3x \, dx = 3x + C$ b) $\int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} + C$ c) $\int x^7 \, dx = \frac{x^8}{8} + C$
- d) $\int 3x^5 \, dx \Rightarrow F(x) = \frac{x^6}{2} + C$ e) $\int \frac{1}{x^3} \, dx \Rightarrow F(x) = \frac{1}{-2x^2} + C$ f) $\int \sqrt{x^3} \, dx \Rightarrow F(x) = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$
- g) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \, dx \Rightarrow 3\sqrt[3]{x} + C$ h) $\int \frac{5}{x^2} \, dx \Rightarrow F(x) = \frac{-5}{x} + C$ i) $\int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + C$
- j) $\int (3x^3 - 5x^2 + 2) \, dx = \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 2x + C$ k) $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$ l) $\int e^t \, dt = e^t + C$
- m) $\int 3500 \cdot 1,05^t \, dt$
 $= \frac{3500}{\ln 1,05} \cdot 1,05^t + C \approx 71736 \cdot 1,05^t + C$ n) $\int 3500 \cdot 1,05^{-t} \, dt$
 $= \frac{-3500}{\ln 1,05} \cdot 1,05^{-t} + C \approx -71736 \cdot 1,05^{-t} + C$ o) $\int (200 + 100e^{-t}) \, dt$
 $= 200t - 100e^{-t} + C$
- p) $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x} \, dx = \int \left(x^3 - 5x + 3 - \frac{4}{x} \right) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{5}{2}x^2 + 3x - 4\ln|x| + C$
- q) $\int \frac{1}{x-5} \, dx = \ln|x-5| + C$ r) $\int \frac{x^2 + 3x - 1}{3} \, dx = \frac{1}{3} \left(\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - x + C_1 \right) = \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + C_2$
- s) $\int (1 + \sqrt[3]{x^2}) \, dx = x + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$ t) $\int (\sqrt[5]{x^2} - 3x^2 + 7) \, dx = \frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}} - x^3 + 7x + C$ u) $\int \left(\frac{4}{x} + \frac{6}{x^3} + e^x \right) dx$
 $= 4\ln|x| - \frac{3}{x^2} + e^x + C$
- v) $\int (2x - 4)(3x + 1) \, dx$
 $= \int (6x^2 - 10x - 4) \, dx = 2x^3 - 5x^2 - 4x + C$ w) $\int (2^x + 3^x) \, dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$ x) $\int \frac{2x}{x^2 + 1} \, dx = \ln|x^2 + 1| + C$
- y) $\int \frac{6x + 6}{x^2 + 2x + 7} \, dx = 3 \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 7} \, dx = \ln|x^2 + 2x + 7| + C$

2) Obtén a integral indefinida en cada caso:

- a) $\int \frac{(\ln x)^3}{x} \, dx \Rightarrow F(x) = \frac{(\ln x)^4}{4} + C$ b) $\int \left(\frac{3-5x}{2} \right)^3 \, dx$
 $\Rightarrow F(x) = \frac{-1}{10} \left(\frac{3-5x}{2} \right)^4 + C$ c) $\int \frac{x-1}{x^2-2x+1} \, dx$
 $\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \ln|x^2-2x+1| + C$
- d) $\int \frac{e^x}{1+e^x} \, dx \Rightarrow F(x) = \ln(e^x + 1) + C$ e) $\int 7^{2x-5} \, dx \Rightarrow F(x) = \frac{7^{2x-5}}{2\ln 7}$ f) $\int \sqrt{3x+1} \, dx \Rightarrow F(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x^2 + C$
- g) $\int \frac{x^2+2}{x^3+6x+1} \, dx$
 $\Rightarrow F(x) = \frac{1}{3} \ln|x^3+6x+1| + C$ h) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx \Rightarrow F(x) = -2e^{\sqrt{x}} + C$ i) $\int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+3}} \, dt \Rightarrow F(x) = \sqrt{t^2+2t+3} + C$
- j) $\int 2x(x^2+1)^{20} \, dx$
 $\Rightarrow F(x) = \frac{(x^2+1)^{21}}{21} + C$ k) $\int \frac{3}{s+1} \, ds$
 $\Rightarrow F(x) = 3\ln|s+1| + C$ l) $\int \frac{x}{(x^2+3)^5} \, dx \Rightarrow F(x) = \frac{-1}{8} \cdot (x^2+3)^{-4} + C$
- m) $\int 5^{x^3-6x+1} \cdot (x^2-2) \, dx$
 $\Rightarrow F(x) = \frac{1}{3\ln 5} 5^{x^3-6x+1} + C$ n) Obter a única función $f(x)$ cuxa derivada é $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 2x + e^x + 1$ tal que $f(0) = 2$
 $\Rightarrow f(x) = 2\sqrt{x} - x^2 + e^x + x + 1$; pois $C = 1$

3 Exemplo 1 2026 – Competencial Análise — O radon é un gas radioactivo invisible e inodoro, que pode acumularse en interiores de edificios, especialmente en plantas baixas e espazos con pouca ventilación. A exposición durante períodos prolongados de tempo a altas concentracións de radon é perigosa, podendo orixinar cancro de pulmón. Estudos recentes revelan que o risco de cancro aumenta un 16% por cada 100 becquerelios por metro cúbico (Bq/m³). Este risco incrementase en persoas fumadores. É importante medir os niveles de radon nas vivendas e, no caso de ser altos, empregar métodos para baixar o nivel. Para estudar a radioactividade producida polo radon nun edificio histórico, unha profesora de Física realizou medicións con material da Universidade de Santiago de Compostela nas que se empregaron medidas correctoras. Observouse que segue o modelo matemático $R(t) = 200 + k e^{-t}$, sendo t os meses transcorridos e $R(t)$ a cantidade de radon medida en Bq/m³.

- Calcule o valor de k sabendo que no momento inicial ($t=0$) a cantidade de radon é 300.
- Represente graficamente a evolución da cantidade de radon co paso do tempo (estude, polo menos, a súa monotonía e a súa tendencia).
- Determine a cantidade de radon que se acumula dende o primeiro ata o segundo mes $\left(\int_1^2 R(t) dt\right)$.

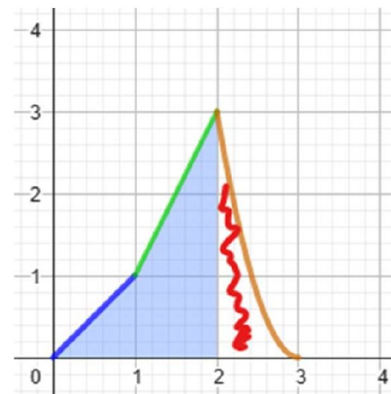
4 Exemplo 2 2026 – Competencial Análise — En outubro de 2025, o IBEX acadou o seu máximo histórico, superando os 16000 puntos. Aínda que inflúen outros factores, a evolución da bolsa está influenciada por cambios políticos, económicos e sociais. Hai períodos de crecemento cando hai confianza ou en momentos de expansión económica. A longo prazo tenden a crecer pero en períodos cortos o seu comportamento pode ser volátil, ás veces por movementos especulativos dos inversores. O valor de cotización das accións dunha empresa en decenas de euros ao longo dos días,

dende que saíu a Bolsa, ven dado pola función $V(t) = \begin{cases} -0,04t^2 + 2,4t & \text{se } 0 \leq t < 40 \\ \frac{40t - 320}{t} & \text{se } t \geq 40 \end{cases}$. Responda estes tres apartados:

- Estude se o valor da acción creceu ou decreceu ao longo do tempo. Fundamente a súa resposta.
- Se unha persoa mercou 15 accións aos 30 días de saír a Bolsa e vendeunas aos 45 días, tivo ganancias ou perdas? A canto ascenderon estas?
- Se un inversor merca accións aos 30 días de saír a Bolsa e mantenas no tempo, cal sería a ganancia máxima que podería esperar por acción? Fundamente a súa resposta.

5 Exemplo 3 2026 – Competencial Análise — O pasado 2 de setembro, Madrid acolleu o maior campionato de escalada celebrado en España, con máis de 400 participantes. É un deporte con gran expansión polo que tamén aumentan as empresas que venden material para a súa práctica. Segundo os encargados dunha empresa de publicidade, os logotipos relacionados coa escalada deberían transmitir a esencia deste deporte: verticalidade e conexión coa natureza. Por iso mesmo, empregan liñas e formas xeométricas que parecen indicar montañas ou escaladores en movemento. As cores empregadas soen ser azuis, verdes ou tons terra. A representación do logotipo dunha marca de material para practicar escalada é a que se mostra a continuación e a función que o delimita superiormente ten a expresión

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 2x - a & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ b(x-3)^2 & \text{se } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$



Responda estes dous apartados: a) Calcule os valores de a e b . b) No logotipo orixinal, a proporción da área azul respecto á área total é de $2/3$. Tendo en conta o anterior, poderíase afirmar se o logotipo da figura é orixinal ou unha falsificación?

6 Exemplo 4 2026 – Competencial Análise — O éxito do turismo normalmente é debido á combinación de varios factores: boas infraestruturas, prezos razoables, paisaxes únicos, patrimonio cultural interesantes, gastronomía,... Galicia recolle tódolos factores anteriores polo que converteuse nun destino ideal para descansar e desfrutar. A oferta hoteleira de calidade está a incrementarse nos últimos anos. No mes de outubro de 2025 os hoteis galegos recibiron máis de medio millón de persoas. O hotel de cinco estrelas Miradoiro das Mareas, situado nunha zona turística en auxe, ofrece 80 habitacións a un prezo de 450 euros por noite e 500 euros con almorzo incluído. Durante a tempada de verán, o hotel está cheo todos os días. Responda estes dous apartados:

- a) Exprese mediante unha función a facturación diaria do hotel en temporada estival.
- b) O hotel foi adquirido recentemente por unha gran cadea hoteleira “Hoteles Rincón del Océano”, que non permite a opción de só aloxamento, pero os seus responsables deciden subir o prezo das habitacións con almorzo. Se por cada 10 euros que aumenta o prezo das habitacións con aloxamento e almorzo, perde unha reserva deixando de ingresar os cartos desa habitación, canto debería aumentar o prezo para maximizar os ingresos diarios?

7 [2025 Ordinaria P3.2] Dada a función $f(x) = ax^2 + bx - 3$ sendo a, b números reais

- a) 3.2.1. Calcule a e b sabendo que dita función pasa polo punto $(4, 5)$ e ten un mínimo en $x = 1$.
- b) 3.2.2. Para $a = 1$ e $b = -2$, calcule a área limitada por $f(x)$ e a recta $y = x - 3$.

a) $f'(x) = 2ax + b$; $a = 1$ e $b = -2$. b) Puntos de corte: $x = 0$ e $x = 3$; $A = 9/2 u^2$ <https://www.geogebra.org/classic/vakjk5ev>

8 [2025 Extraord P3.2] Dada a función $f(x) = -8x^2 + 24x - 10$.

- a) 3.2.1. Realice a súa representación gráfica estudando os seus puntos de corte cos eixes, monotonía e extremo relativo.
- b) 3.2.2. Calcule a área do recinto limitado pola gráfica da función f e as rectas $x = 1$, $x = 2$ e $y = 4$.

9 (Ord. 2024 P4) — Considérese a seguinte función: $f(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + c$ onde a, b, c son números reais.

- a) Calcular a, b, c sabendo que a función $f(x)$ pasa por $(2, 8)$ e que ten un extremo relativo en $(0, 16)$.
- b) Para $a = b = 0$ e $c = 16$ calcule a área a rexión limitada pola función e a recta $y = 8$.

a) $a = b = 0$ e $c = 16$ b) $A = 64/3 u^2$

10 (Extraord.. 2024 P3) — A función $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b, c son números reais pasa pola orixe de coordenadas e ten un máximo no punto $P(4, 16)$.

- a) Calcule os valores de a, b, c .
- b) Realice a representación gráfica da función $f(x)$ e determine a área comprendida entre a dita función e o eixe OX.

a) $a = -1$; $b = 8$; $c = 0$; $f(x) = -x^2 + 8x$ b) $A = 256/3 u^2 \approx 85,33 u^2$.

11 (Extraord. 2023 P3) — O número de exemplares vendidos dunha revista (en miles de unidades) nos primeiros cinco meses del ano ven dado pola función $N(t) = \begin{cases} 8 - t(t-2) & \text{se } 0 \leq t \leq 3 \\ 2t - 1 & \text{se } 3 < t < 5 \end{cases}$

- a) Estude o crecemento e decrecemento do número de exemplares vendidos. Calcule en que momentos se produciron o máximo e o mínimo número de ventas e a canto ascenderon.
- b) Represente graficamente a función $N(t)$. Calcule a area da rexión delimitada pola gráfica da función $N(t)$, o eixe de abscisas e as rectas $t = 0$ e $t = 5$.

a) O número de exemplares vendidos crece desde o momento inicial ata transcorrido 1 mes e desde transcorridos 3 meses ata transcorridos 5 meses. O máximo número de ventas prodúcese transcorrido 1 mes e tamén transcorridos 5 meses e ascende a 9000 exemplares. O número mínimo de ventas prodúcese transcorridos 3 meses e é de 5 000 exemplares. b) Área = $38 u^2$

12 (2022 Extraordinaria P4) — Dada a función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - a & \text{se } x > 1 \end{cases}$

- a) Calcule o valor do parámetro a para que a función $f(x)$ sexa continua en todo $\mathbb{R}$.
 b) Para $a=2$ calcule os extremos relativos da función $f(x)$ e represéntea.
 c) Calcule a área da rexión delimitada pola función $f(x)$, para $a=2$, e as rectas $Y=0$, $X=0$ e $X=2$.

a) Se $a=2$ f é continua todo $\mathbb{R}$. b) En $(-\infty, 0)$ e $(1, \infty)$ f é crecente e en $(0, 1)$ é decrecente. Ten un máximo relativo en $(0, 1)$ e un mínimo relativo en $(1, 0)$ c) $A = 5/3 \text{ u}^2$ <https://geogebra.org/classic/ugfara5k>

13 (2022 Ordinaria P4) — Dada a función $f(x) = x^3 - ax^2 + 8x$

- a) Calcule o valor do parámetro " a " tendo en conta que a función $f(x)$ presenta un punto de inflexión en $x = 2$.
 b) Para $a = 6$, calcule a área do recinto limitado pola gráfica da función $f(x)$ e o eixe OX .

a) $a=6$ b) $A=8 \text{ u}^2$

14 (2021 Ord P3) — Un fabricante de automóviles fai un estudo sobre os beneficios, en miles de euros, ao longo dos dez últimos anos, e comproba que estes se axustan á función $B(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3$ se $0 \leq t \leq 10$, (t en anos). (a) Que beneficios obtivo a empresa o último ano do estudo? (b) Determine os períodos de crecemento e decrecemento dos beneficios. En que anos se producen os beneficios máximos e mínimos e a canto ascenden? (c) Calcule $\int_1^2 B(t) dt$

a) O último ano obtivo 7000 € de beneficio b) Os beneficios aumentan entre o inicio e o terceiro ano $(0, 3)$ e entre os anos 9 e 10 $(9, 10)$. Diminúen entre o terceiro e noveno ano $(3, 9)$. c) $I = 80,25$

15 (2020 Ord P4) — Dada a función $f(x) = -4x^2 + 12x - 5$

- a) Realice a súa representación gráfica estudando os seus puntos de corte cos eixes, monotonía e extremo relativo.
 b) Calcule a área do recinto limitado pola gráfica da función $f(x)$, o eixe OX e as rectas $x=1$, $x=2$.

a) Corta a OY en $(0, -5)$ e corta a OX en $(1/2, 0)$, e $(5/2, 0)$. É crecente en $(-\infty, 3/2)$ e decrecente en $(3/2, +\infty)$. Ten un máximo en $x_0 = 3/2$ que vale $y = f(3/2) = 4$. b) $A = 11/3 \text{ u}^2$

16 (2020 Modelo) Considerase a función $f(x) = \begin{cases} 9 - 2x & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 9 - (x - 4)^2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

- a) Representa a gráfica da función estudando previamente os puntos de corte cos eixes de coordenadas, os intervalos de crecemento e decrecemento, os extremos e concavidade ou convexidade.
 b) Calcula de forma exacta a área pechada por dita función e os dous eixes de coordenadas.

a) <https://geogebra.org/classic/psfbvfmk> b) $A = 142/3 \text{ u}^2$

17 (2019 Xun B2) — Dada a función $f(x) = x^2 - 6x + 8$ (a) Realiza a súa representación gráfica estudando os seus puntos de corte cos eixes, monotonía e extremo relativo. (b) Calcula a área do recinto limitado pola gráfica da función e os eixes de coordenadas.

a) Dominio de f : todo $\mathbb{R}$. Punto de corte OY en $(0, 8)$ e corta a OX en $(4, 0)$ e $(2, 0)$. En $(-\infty, 3)$ f é decrecente e en $(3, \infty)$ f é crecente. En $x=3$ hai un mínimo relativo. $(3, -1)$ é o punto mínimo. b) $A = 8 \text{ u}^2$

18 (2019 Xull B2) — Considera a función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ 7 - x & \text{se } 4 < x \leq 7 \end{cases}$ (a) Representa a función estudando os seus puntos de corte cos eixes, monotonía e extremos relativos. ¿Para que valores de x é $f(x) \geq 0$? (b) Calcula a área do recinto limitado polos eixes e a parte da función tal que $f(x) \geq 0$

a) Dominio de f : $[0, 4] \cup (4, 7]$. Punto de corte con OY en $(0, 3)$ e corta a OX en $(7, 0)$. En $(0, 2)$ f é decrecente e en $(2, 4)$ f é crecente. En $(4, 7)$ f é decrecente. En $x = 2$ hai un mínimo e $f(2) = -1 \rightarrow (2, -1)$ mínimo. b) $A = 43/6 \text{ u}^2$

19 (2018 Xun A2) — Dada a función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$,

a) Calcula a primitiva F de f verificando que $F(2) = 1$.

b) Estuda o crecemento e decrecemento e representa graficamente a función f.

c) Calcula a área limitada pola curva $f(x)$ e o eixe X entre $x = 0$ e $x = 2$.

a) $C=1$ b) Dominio de f: todo $\mathbb{R}$. Puntos corte: con OY en $(0,0)$ e con OX en $(0,0)$, $(0,1)$ e $(0,2)$.
En $(-\infty, 1-\sqrt{3}/3)$ e $(1+\sqrt{3}/3, +\infty)$ f é crecente. En $(1-\sqrt{3}/3, 1+\sqrt{3}/3)$ f é decrecente. En $1-\sqrt{3}/3$ hai un máximo relativo e en $1+\sqrt{3}/3$ hai un mínimo relativo c) $A=1/2 u^2$ <https://www.geogebra.org/classic/sm29ppaj>

20 (2017 Xun B2) — Os beneficios dunha compañía en millóns de euros, nos seus primeiros sete anos, foron estimados pola función $B(x) = ax^3 - 3x^2 + bx$, $0 \leq x \leq 7$, onde x indica o tempo transcorrido en anos, desde a súa fundación.

(a) Calcula os valores de a e b sabendo que a compañía tivo uns beneficios máximos de 8 millóns de euros no segundo ano.

(b) Supoñamos que $a = 1/4$ e $b = 9$. Determina cando a empresa non tivo beneficios. Calcula $\int_0^6 B(x) dx$.

a) $a = 1/4$ e $b = 9$ b) Non tivo beneficios no sexto ano c) $I=27$

21 (2017 Set B2) — Sexan as función $f(x) = x^2 + 2x - 8$ e $g(x) = -x^2 + 4$. (a) Representa o recinto limitado polas gráficas de $f(x)$ e $g(x)$, estudando os puntos de corte cos eixes, máximos, mínimos e os puntos nos que se cortan ambas as funcións.

(b) Calcula a área do devandito recinto.

a) A función $f(x) = x^2 + 2x - 8$ corta aos eixes nos puntos $(0, -8)$, $(-4, 0)$ e $(2, 0)$. Presenta un mínimo no punto $(-1, -9)$. A función $g(x) = -x^2 + 4$ corta aos eixes nos puntos $(0, 4)$, $(2, 0)$ e $(-2, 0)$. Presenta un máximo no punto $(0, 4)$. Ambas funcións cortanse en $(-3, -5)$ e $(2, 0)$ b) $A = 125/3 u^2$

22 (2003 Set) — Determinar os parámetros a, b e c na función polinómica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, sabendo que ten un mínimo relativo no punto $(3, 0)$ e que a área, $\int_0^3 f(x) dx$, limitada pola gráfica da función $f(x)$ e o eixe x é $\frac{27}{4}$.

$27a + 9b + 3c = 0$ (E1); $27a + 6b + c = 0$ (E2) $81/4 a + 9b + 9/2 c = 27/4$ (E3?) logo $a=1, b=-6, c=9$

23 (2002 Xun) — Dada a parábola $f(x) = x^2 + bx + c$, calcular b e c se pasa polo punto $(0, 2)$ e ten un mínimo en $x = 1$.

Calcular a área limitada por $f(x)$, o eixo x e as rectas $x=1$ e $y=-x+4$.

$b=-2; c=2;$

24 (2002 Set) — Dada a función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{se } x \leq 1 \\ x & \text{se } 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 & \text{se } x > 2 \end{cases}$ Calcula-la area limitada pola función e o eixo x.

25 (2001 Xun) — (a) Dada a función $f(x) = -x^2 + bx + c$, calcúlense os valores b e c se esa función pasa polo punto $(1, 4)$ e neste punto a ecuación da recta tanxente é $y = 4$. (b) Calcúlese a área comprendida entre a función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ e a recta $y = x + 1$.

3 - Problemas complementarios

26 Calcula a área que determina a curva $y = -x^2 + 4$ co eixe X entre as abscisas -1 e 1.

27 Calcula a área que determina a curva $y = x^2 + x - 2$ co eixe X entre as abscisas -1 e 2.

28 Calcula a área do recinto limitado pola recta $y = x$ e a parábola $y = x^2$.

29 Dadas as parábolas $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$ e $g(x) = -x^2 - x + 6$, atopa a área do recinto acoutado encerrado entre ambas.

30 Calcula a área do recinto limitado polas recta $y = x$, $y = 2x$ e a parábola $y = x^2$.

- 31 Calcula a área do recinto limitado pola recta $y=2-x$ e a curva $y=x^2$
- 32 Calcula a área da rexión do plano limitada polo eixe OX e a curva $y=x^3-9x$
- 33 Calcula a área do recinto limitado polas parábolas $y=x^2-4x$, $y=-\frac{1}{2}x^2+2x$
- 34 Calcula a área do recinto limitado polo eixe OX e a parábola $y=\frac{x^2}{4}-x$
- 35 Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola recta $x+y=7$ e a gráfica da parábola $f(x)=x^2+5$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade e convexidade)
- 36 Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica de $y=-x^2+1$ e as rectas tanxentes a esta parábola nos puntos de corte da parábola co eixe OX. (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade e convexidade)
- 37 Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x)=x^2-2x+1$, a súa recta tanxente no punto $(3,4)$ e o eixe OX. (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indica os puntos de corte cos eixos, o vértice e concavidade ou convexidade)
- 38 Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x)=-3x^2+3$ e a recta $y=-9$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indica os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade)
- 39 Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola parábola $y=-x^2+2x+3$, a recta tanxente no punto onde a parábola ten un extremo e a tanxente á parábola no punto no que a tanxente é paralela á recta $y=4x$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indica os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade)
- 40 Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica de $f(x)=x^3-4x^2+4x$ e a bisectriz do primeiro cadrante. (Nota: para o debuxo da gráfica de $f(x)$, é suficiente utilizar o apartado anterior e calcular os puntos de corte cos eixos)
- 41 Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x)=-x^2+9x$, e as rectas $y=20$, $x-y+15=0$. (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indica os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade)
- 42 Debuxa e calcula a área da rexión limitada polas gráficas da parábola $f(x)=4x-x^2$ e as rectas tanxentes á gráfica de $f(x)$ nos puntos correspondente a $x=0$ e $x=2$. (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indica os puntos de corte cos eixos de coordenadas, o seu vértice e concavidade ou convexidade)
- 43 Dada a función $f(x)=ax^3+bx+c$, determina a , b e c sabendo que $y=2x+1$ é a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto correspondente á abscisa $x=0$ e que $\int_0^1 f(x) dx = 1$
- 44 Unha inmobiliaria está interesada en adquirir uns terreos que poden ser representados nun determinado plano como a superficie encerrada entre a parábola $f(x)=-x^2+2x+4$ e a recta $g(x)=2x$. (a) Fai a representación gráfica simultánea destas dúas funcións. (b) Se unha unidade da área deste plano equivale a 1 km² e o prezo do quilómetro cadrado é de 30 millóns de euros, ¿que importe debe pagar a inmobiliaria por eses terreos?
- 45 Un publicista diseña un cartel publicitario que ten a seguinte forma: base horizontal de 10 m de lonxitude e o resto do contorno limitado pola función $f(x)=\begin{cases} -x^2+6x & \text{se } 0 \leq x \leq 5 \\ -x+10 & \text{se } 5 < x \leq 10 \end{cases}$
- Debuxa o contorno correspondente ao cartel publicitario e calcula a súa área.

4 - Problemas de ABAU/PAU de otras comunidades

46 [Murcia 2025 Extraordinaria Ap2 Cu1] Dada la función: $f(x) = \frac{-9+x^2}{x^2-4}$

a) Determina su dominio y los puntos de corte de la gráfica de $f(x)$ con los ejes de coordenadas. b) Estudia sus asíntotas. c) Estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. d) Halla y clasifica sus extremos relativos. e) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$.

47 [Murcia 2025 Extraordinaria Ap2 Cu2] El beneficio mensual en euros de la hamburguesería Jamburguer, que el verano pasado abrió sus puertas en un conocido centro comercial de Murcia, viene dado por:

$B(x) = 144x - 0,1x^2 - 50000$ donde x es el número de hamburguesas vendidas mensualmente.

a) Si actualmente Jamburguer vende 750 hamburguesas al mes, ¿obtendrá pérdidas o ganancias? b) Evalúa e interpreta la primera derivada de $B(x)$ en $x = 750$ ¿Qué recomendarías al propietario? c) Estudia el crecimiento y decrecimiento de $B(x)$. d) Determina el número de hamburguesas que maximiza el beneficio mensual de esta hamburguesería. e) ¿Cuál es el beneficio máximo mensual?

48 [Murcia 2025 Extraordinaria Ap3 Cu1] Realiza:

a) Calcula $\int \left(\frac{2}{x-1} + 3\sqrt{x} \right) dx$ b) Calcula el área limitada por la función $f(x) = -x^2 + 4x$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=4$.

49 [Murcia 2025 Extraordinaria Ap3 Cu2] Realiza:

a) Calcula $\int \left(\frac{1}{x} + 3\sqrt{x} + \frac{1}{3}e^{3x} \right) dx$ b) Calcula el área limitada por la función $f(x) = 4 - x^2$, el eje OX y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

50 [La Rioja 2025 Extraordinaria Op 3.1] Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + 36x + 5$ (a : número real). Se pide:

a) Calcula el valor de " a " para que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(2, f(2))$ tenga por ecuación: $y = 37$. Estudia si la función posee un máximo o un mínimo relativo en $x=2$. b) Calcula el valor de " a " para que haya un cambio de concavidad de la función en $x = 5$. c) Qué valor debe tomar " a " para que se verifique la igualdad:

$$\int_2^4 (3x^2 + 2ax + 36) dx = 152$$

51 [La Rioja 2025 Extraordinaria Op 3.2] Un empresario ha realizado un estudio para analizar la evolución de su negocio durante 6 meses. Los ingresos, en miles de euros, vienen dados por la función: $f(t) = t^3 - 3t + 10$ con $0 \leq t \leq 6$ (t : meses transcurridos desde el inicio del estudio) Se pide:

a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. Calcula cuándo los ingresos han sido máximos y cuándo mínimos en el intervalo de tiempo considerado, $[0,6]$ e indica cuándo se han alcanzado. b) Calcula en qué momento los ingresos han sido de 12000 euros. c) Representa gráficamente la función en el intervalo $[0,6]$. d) Calcula en qué punto de la gráfica anterior, la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto es igual a 9. Indica la ecuación de dicha recta.

52 [La Rioja 2025 Ordinaria Op 3.2] El beneficio de una empresa, expresado en miles de euros, a lo largo de 6 meses viene dado por la función $f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 8$, $0 \leq t \leq 6$ siendo t el número de meses transcurridos.

a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento del beneficio. Calcula en qué mes ha obtenido la empresa el máximo beneficio en el intervalo de tiempo considerado, $[0,6]$ y cuál es valor de dicho beneficio. b) Estudia si hay o

no puntos de inflexión y en el caso de haberlos, calcúlalos. Representa gráficamente la función en el intervalo $[0, 6]$.

c) Calcula el área limitada por la gráfica de f , el eje X y las rectas $x=0$ y $x=2$.

53 (Valencia 2024 Ord – P4) — Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 24x & \text{se } x \leq -1 \\ (x-1)^2 + 3 & \text{se } x > -1 \end{cases}$ siendo a un número real.

a) Determina el valor de a para que esta función sea continua.

b) Supongamos que $a = 9$. Determina los máximos y mínimos locales que tiene esta función en el intervalo $]-9/2, -3/2[$.

c) Supongamos que $a = 0$. Calcula el área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX .

54 (Asturias 2024 Extraord – P4) — Dada la función $f(x) = -x^2 - 2x + 3$, se pide:

a) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 1$.

b) Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre $x = -2$ y $x = 2$.

55 (Asturias 2024 Ord – P4) — Dada la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$, se pide:

a) [0.5 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 0$.

b) [2 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -2$ y $x = 1$.

56 (Madrid 2024 Ord – P3) — (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente

expresión: $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + e^2 & \text{si } x < 1 \\ a \cdot e^{2x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Halle el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio.

b) Para $a = 1$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

57 (Madrid 2024 Extra – P2) (2 puntos)

a) Encuentre el valor del parámetro real a tal que $\int_0^2 (\sqrt{x} - a) dx = \frac{2}{3}$

b) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - b & \text{si } x < 0 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. Determine para qué valores del parámetro $b \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x)$ es una función continua en su dominio. *Estudie la derivabilidad de la función para esos valores del parámetro b [No se pregunta en Galicia].*

58 (Navarra 2024 Ord – EJ4) — Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x & \text{se } x < -1 \\ 4 - x & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad de $f(x)$, clasificando sus puntos de discontinuidad.

b) *Estudie la derivabilidad de $f(x)$. [No se pregunta en Galicia]*

c) Calcule $\int_0^2 f(x) dx$

59 (Navarra 2024 Ord – EJ4) — La primera derivada de cierta función $f(x)$ viene dada por $f'(x) = x \cdot (x-2)^2$.

- a) Determine los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.
- b) Determine los intervalos de concavidad y convexidad. ¿Para qué valores de x la función $f(x)$ presenta puntos de inflexión?
- c) Determine $f(x)$ sabiendo que $f(0)=5$

60 (Navarra 2024 Extra – EJ3 ii) — Calcule la primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=\frac{2x^3-3x+5}{x}$ que cumpla $F(1)=1$.

61 (Cantabria 2021 Modelo) — Dadas las funciones $f(x)=x^3-6x^2+9x$ y $g(x)=x^2-x$

- a) Obtener sus puntos de corte con los ejes OX y OY.
- b) Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.
- c) Dibujar las gráficas de ambas funciones indicando la región delimitada por ambas.
- d) Calcular el área de la región anterior.

62 (Asturias 2021 Ord.) — Dada la función $f(x)=\frac{a \cdot x}{3 \cdot x^2+1}$, se pide:

- a) Encontrar el valor de a que verifica que $F(0)=0$ y $F(1)=\frac{4}{3} \cdot \ln(4)$, donde F denota una primitiva de f .
- b) Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x=1$ y $x=1$.

63 (Asturias 2021 Extraord.) — Dada la función $f(x)=x^3+3x^2$, se pide:

- a) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2)=10$.
- b) Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x=-3,2$ y $x=-2$.

64 (Asturias 2020 Ord.) — Dada la función $f(x)=\frac{a}{x+1}$, se pide:

- a) Encontrar el valor de a que verifica que $F(0)=0$ y $F(1)=10 \cdot \ln(2)$, donde F denota una primitiva de f .
- b) Suponiendo que $a=10$, estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x=-3$ y $x=2$.

65 (Asturias 2020 Extraord.) — Dada la función $f(x)=\frac{6}{x+1}-2$, se pide:

- a) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0)=2$.
- b) Estudiar y representar gráficamente la función f en el intervalo $[0, \infty)$, Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre $x=0$ y $x=3$.

66 (Asturias 2023 Extraord. P4) — Dada la función $f(x)=e^x+2$, se pide:

- a) [0.5 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0)=3$.
- b) [2 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x=-1$ y $x=2$.