

3 - Problemas adicionais de cálculo de derivadas e aplicacións

56 (xuño 2014 A2) Os beneficios (en centos de miles de euros anuais) estimados por unha pequena empresa durante un período de catro anos, axustáronse á función $B(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, $0 \leq x \leq 4$, onde $B(x)$ representa os beneficios da empresa aos x anos transcorridos dende a súa constitución ($x = 0$ corresponde ao ano 2006).

- a) ¿Nalgún ano a empresa non tivo beneficios? Xustifica a resposta.
- b) Determina os intervalos de tempo nos que os beneficios aumentaron e nos que diminuíron. ¿Que información nos proporcionan sobre a evolución dos beneficios neses catro anos? Calcula os beneficios máximo e mínimo e os anos en que se produciron.
- c) Utilizando os resultados anteriores e calculando, se o hai, o punto de inflexión, representa a gráfica de $B(x)$.

a) A empresa non tivo beneficios no ano 2006 e no 2009. b) No intervalo $(0, 1)$ e no $(3, 4)$ os beneficios aumentaron. No intervalo $(1, 3)$ os beneficios diminuíron. A empresa foi aumentando os seus beneficios dende o instante da súa constitución, ano 2006, ata o ano 2007. Os beneficios diminuíron entre o 2007 e o 2009, volvendo aumentar ata o ano 2010. No ano 2007 e no 2010, tiveron un beneficio máximo anual de 400.000 euros. No 2009 (e no 2006) o seu beneficio foi mínimo de 0 euros, é dicir, non tiveron beneficios. c) O punto de inflexión preséntase no $(2, 2)$. <https://geogebra.org/classic/eawwz7mu>

57 (xuño 2014 B2) Estímase que o número de unidades vendidas de certo produto N , aos t meses de introducilo no mercado, vén dado por $N(t) = 200 \left(5 - \frac{10}{2+t} \right)$, $t \geq 0$.

- a) O número de unidades vendidas ¿aumenta ou diminúe ao transcorrer os meses? Xustifica a resposta, estudando o crecemento ou decrecemento da función $N(t)$.
- b) Determina entre que meses as vendas son superiores a 500 e inferiores a 800 unidades.
- c) As vendas tenden a estabilizarse arredor dalgunha cantidade? Xustifica a resposta.

a) O número de unidades vendidas aumenta ao transcorrer os meses: $N'(t) > 0$, para todos os valores de t , logo $N(t)$ é crecente en todo $\mathbb{R}$, e en particular no intervalo $(0, +\infty)$. b) $N(t) > 500 \Leftrightarrow t > 2$; $N(t) < 800 \Leftrightarrow t < 8$. Logo entre o segundo e o oitavo mes as vendas superan as 500 unidades e son inferiores a 800 unidades. c) As vendas tenden a estabilizarse arredor das 1000 unidades. <https://www.geogebra.org/classic/ftcuszn6>

58 (setembro 2014 A2) O beneficio B (en miles de euros) para unha compañía que gasta unha cantidade x (en miles de euros) en publicidade estímase por: $B(x) = -0,1x^3 + 6x^2 + 400$, $0 \leq x \leq 60$.

- a) Calcula a cantidade de diñeiro que a compañía debe gastar en publicidade para que lle produza un beneficio máximo e calcula o devandito beneficio. ¿Que cantidade de diñeiro en publicidade lle produce un beneficio mínimo?
- b) Representa a gráfica da función, utilizando os resultados anteriores e calculando concavidade, convexidade e punto de inflexión.

a) Deben gastar 40.000 euros en publicidade, para que o seu beneficio sexa máximo, sendo o devandito beneficio de 3.600.000 euros. Se non gastan nada en publicidade, ou se gastan 60.000 euros o beneficio que obteñen é mínimo. b) $B''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 20$. No intervalo $(0, 20)$ a función é cóncava cara arriba (convexa), no intervalo $(20, 60)$ é cóncava cara abaixo (cóncava) 0'25 puntos. O punto $(20, 2000)$ é o punto de inflexión. <https://geogebra.org/classic/sn4d6uuu>

59 (setembro 2014 B2) Os ingresos (en millóns de euros) obtidos por certa factoría no período comprendido dende o ano 2000 ao 2010, estimáronse pola función $I(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x-5)^2 + 17 & \text{se } 1 \leq x < 7 \\ -x^2 + 18x - 59 & \text{se } 7 \leq x \leq 11 \end{cases}$, onde x é o tempo transcorrido en anos ($x = 1$ corresponde ao ano 2000)

- a) Calcula os ingresos obtidos no ano 2002 e no ano 2007.
- b) Determina a evolución dos ingresos no período comprendido dende o 2000 ata o 2010 (crecemento e decrecemento da función $I(x)$). Calcula os ingresos máximo e mínimo.
- c) Determina entre que anos dese período os ingresos non superaron os 18 millóns.

a) No ano 2002, $I(3) = 18$, logo os ingresos son 18 millóns de euros. No ano 2007, $I(8) = 21$, logo os ingresos son 21 millóns de euros. b) Nos intervalos $(1, 5)$ e $(9, 11)$ $I(x)$ é decrecente. Nos intervalos $(5, 7)$ e $(7, 9)$ $I(x)$ é crecente. Os ingresos diminuíron dende o ano 2000 ata o 2004 e tamén dende o ano 2008 ata o ano 2010. Dende o ano 2004 ata o 2008 os ingresos aumentaron. A factoría tivo uns ingresos mínimos de 17 millóns de euros e uns ingresos máximos de 22 millóns de euros. c) $1/4 \cdot (x - 5)^2 + 17 \leq 18 \Rightarrow 3 \leq x \leq 7$ e $-x^2 + 18x - 59 \leq 18$ non ten solución no intervalo $[7, 11]$. A factoría non superou os 18 millóns de euros entre os anos 2002 e 2006. Tamén se pode contestar a este apartado buscando as interseccións da recta $y = 18$ coa gráfica da función $I(x)$ <https://geogebra.org/classic/mzrwmd7d>

60 (xuño 2013 A2) A cantidade de madeira (en metros cúbicos) que se extrae dunha explotación forestal durante un período de cinco días vén dada pola función: $M(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$, $0 \leq t \leq 5$, onde t é o tempo transcorrido en días.

- a) Estuda en que períodos se rexistrou un aumento e nos que se rexistrou unha diminución da cantidade de madeira extraída.
- b) ¿En que día ou días se extraeu a máxima cantidade de madeira?, ¿e a mínima? Calcular a cantidade máxima e mínima de metros cúbicos de madeira extraída.
- c) Representa graficamente a función $M(t)$, calculando, se os hai, os puntos de inflexión.

a) Dende o instante inicial ao segundo día e dende o cuarto ao quinto día, rexistrouse un aumento da cantidade de madeira extraída. Dende o segundo ao cuarto día rexistrouse unha diminución” b) No segundo e no quinto día extraeuse a máxima cantidade de madeira. A cantidade mínima extraeuse no instante inicial. A cantidade máxima extraída foi 20 metros cúbicos de madeira e a cantidade mínima extraída foi 0 metros cúbicos de madeira. c) O punto de inflexión preséntase no $(3, 18)$. <https://geogebra.org/classic/b4vc8zt4>

61 (xuño 2013 B2) O prezo de venda (en euros) dun artigo deportivo dende o momento inicial da súa comercialización

axústase á función $P(t) = \begin{cases} -\frac{1}{5}t^2 + 4t + 80 & \text{se } 0 \leq t < 15 \\ 87 + \frac{32}{t-11} & \text{se } t \geq 15 \end{cases}$ onde t é o tempo transcorrido en meses.

- a) ¿Cal é o prezo inicial do artigo? ¿E despois de transcorridos 15 meses?
- b) Estuda en que meses se produce un aumento e nos que se produce unha diminución do prezo do artigo. ¿Cal é o prezo máximo que alcanza o artigo? ¿E o prezo mínimo?
- c) Despois de transcorridos 15 meses, ¿haberá algún mes no que o prezo sexa inferior a 85 euros? Razoa a resposta.

a) Prezo inicial do artigo: $P(0) = 80$ euros. Prezo despois de transcorridos 15 meses: $P(15) = 95$ euros. b) No $(0, 10)$, $P(t)$ é crecente e no $(10, 15)$, $P(t)$ é decrecente. No $(15, +\infty)$ $P(t)$ é decrecente. Prodúcese un aumento do prezo nos dez primeiros meses da súa comercialización e a partir do décimo mes o prezo do artigo diminúe. O prezo máximo que alcanza o artigo: $P(10) = 100$ euros. O prezo mínimo que alcanza o artigo: $P(0) = 80$ euros. c) $87 + 32/(t-11) < 85$ é imposible, xa que $t > 15$. Logo despois de transcorridos 15 meses, o prezo non será nunca inferior a 85 euros. Tamén se podería facer un esbozo da gráfica da función $P(t)$ e chegaríase ao mesmo resultado.

62 (setembro 2013 A2) Sexa a función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

- a) Calcula a , b , c e d , sabendo que a función presenta os seus extremos relativos nos puntos $(0, 0)$, e $(1, 1)$.
- b) Determina que tipo de extremos relativos son cada un dos puntos anteriores.
- c) Representa a gráfica da función, determinando os puntos de corte cos eixes e o punto de inflexión.

a) $f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$; $f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$; $f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b = 0$; $f(1) = 1 \Rightarrow a + b = 1$ obtendo $a = -2$ e $b = 3$.
 b) $x = 0$ é un mínimo e $x = 1$ é un máximo. c) Puntos de corte cos eixes: $(0, 0)$ e $(3/2, 0)$. Punto de inflexión: $(1/2, 1/2)$ <https://geogebra.org/classic/wkyr2cgj>

63 (setembro 2013 B2) O número de nacementos anuais (en centos) que se producen nunha cidade a partir do ano 2000

vén dado pola función $N(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 - 3t + 15 & \text{se } 0 \leq t < 8 \\ 10 - \frac{6}{t-6} & \text{se } t \geq 8 \end{cases}$ t é o tempo transcorrido en anos ($t = 0$ é o ano 2000).

a) ¿Cantos nacementos se produciron no ano 2000?

b) Estuda entre que anos se produciu un decrecemento da natalidade. Determina en que ano se produciu o menor número de nacementos e cal foi ese número.

c) ¿Cal é a tendencia do número de nacementos no futuro? Razoa a resposta.

a) $N(0) = 15$ logo no ano 2000 producíronse 1500 nacementos. b) No $(0, 6)$, $N(t)$ é decrecente. Dende o ano 2000 ata o 2006 produciuse un decrecemento da natalidade. Non hai decrecemento dende o ano 2006. Ano no que se produciu o menor número de nacementos, en $t = 6$ $N(t)$ é mínimo 0'25. Número mínimo de nacementos: O menor número de nacementos produciuse no 2006 e foron 600 nacementos. c) A tendencia é de 1000 nacementos.

64 (xuño 2012) un ámbito controlado, o tamaño dunha poboación de aves, $P(t)$ (en centos), axústase á función

$P(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & \text{se } 0 \leq t \leq 10 \\ 95 - \frac{250}{t} & \text{se } t > 10 \end{cases}$, onde t é o tempo transcorrido en anos.

a) ¿A partir de que ano crecerá a poboación $P(t)$? ¿Nalgún ano a poboación é mínima?

b) Determina o valor ao que tende a poboación de aves co paso do tempo.

c) Calcula o intervalo de tempo no que a poboación se mantén entre 5000 e 7500 aves.

65 (xuño 2010) O número N de exemplares vendidos (en miles) dunha revista destinada ao público adolescente é

estimado pola función $N(t) = \begin{cases} 3t(10-t) & \text{se } 0 \leq t \leq 8 \\ \frac{624t}{t^2+144} + 24 & \text{se } t > 8 \end{cases}$ onde t é o tempo transcorrido en semanas. Determina: os períodos

nos que aumentan e nos que diminúen as vendas da revista, cando se acada o maior número de vendas e a canto ascenden. ¿A que valor tende o número de vendas co paso do tempo?

66 (setembro 2010) Unha fábrica produce diariamente un total de 20 artigos de dous modelos diferentes A e B . O custo de produción diario (en euros) vén dado por $C = 6x^3 + 450y - 2500$, sendo x o número de modelos do tipo A e y o número de modelos do tipo B . ¿Cantos modelos de cada tipo debe producir diariamente para minimizar o custo de produción diario? Calcula ese custo de produción mínimo.

67 (xuño 2009) Un modelo para os custos de almacenamento e envío de materiais para un proceso de manufactura, ven

dado pola función $C(x) = 100 \left(100 + 9x + \frac{144}{x} \right)$, $1 \leq x \leq 100$ sendo $C(x)$ o custo total (en euros) de almacenamento e transporte e x a carga (en toneladas) de material.

a) Calcula o custo total para unha carga dunha tonelada e para unha carga de 100 toneladas de material.

b) ¿Qué cantidade x de toneladas de material producen un custo total mínimo? Xustifica a resposta e calcula dito custo mínimo.

c) Se deciden non admitir custos de almacenamento e envío superiores ou iguais a 75000 euros, ¿ata que carga de material poderían mover?

68 (xuño 2008) Supoñamos que o valor V , en euros, dun produto diminúe ou se deprecia co tempo t , en meses, onde

$$V(t) = 50 - \frac{25t^2}{(t+2)^2}, t \geq 0$$

- Calcular o valor inicial do produto, $V(0)$. ¿A partir de que mes o valor do produto é inferior a 34 euros?
- Determinar a velocidade de depreciación do produto, é dicir, $V'(t)$.
- Achar o $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t)$. ¿Hai algún valor por debaixo do cal nunca caerá V ? Xustificar a resposta.

69 (xuño 2008) O número de prazas ocupadas dun aparcamento ao longo das 24 horas dun día, vén expresado pola

$$\text{función } N(t) = \begin{cases} 1680 + 20t & , \text{ se } 0 \leq t < 8 \\ -10t^2 + 260t + 400 & , \text{ se } 8 \leq t < 16 \\ -10t^2 + 360t - 1200 & , \text{ se } 16 \leq t \leq 24 \end{cases}$$

- ¿A que hora do día presenta o aparcamento unha ocupación máxima?, ¿cantos coches hai a esa hora?
- ¿Entre que horas a ocupación do aparcamento é igual ou superior a 2000 prazas?

70 (setembro 2008) — A distancia (en millas) entre un barco pesqueiro que saíu a faenar durante un período de 10 días

e o seu porto base ven dada pola función $M(t) = \begin{cases} 36 - (2t - 6)^2 & \text{se } 0 \leq t \leq 5 \\ 4(10 - t) & \text{se } 5 < t \leq 10 \end{cases}$ onde t é o tempo transcorrido (en días) dende a súa saída do porto base.

- ¿Despois de cantos días é máxima a distancia do pesqueiro ao seu porto base?, ¿a cantas millas se atopaba?
- ¿Durante que períodos aumentaba a distancia ao seu porto base? ¿en que períodos disminuía?
- ¿A partir de que día, despois de alcanzar a distancia máxima, se atopaba a menos de 12 millas do porto base?

71 (setembro 2008) Unha institución de beneficencia estatal quere determinar cantos analistas debe contratar para o procesamento de solicitudes da seguridade social. Estímase que o custo (en euros) $C(x)$ de procesar unha solicitude é unha función do número de analistas x dada por: $C(x) = 0,003x^2 - 0,216 \ln x + 5$, sendo $x > 0$ e $\ln x$ o logaritmo neperiano.

- Se o obxectivo é minimizar o custo por solicitude $C(x)$, determinar o número de analistas que deberían contratarse.
- ¿Cal é o custo mínimo que se espera para procesar unha solicitude?

72 (xuño 2007) Estúdase a evolución mensual do número de socios dunha entidade durante o ano 2005 e obsérvase que

$$\text{está modelada pola seguinte función } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x + a & , \text{ se } 0 \leq x \leq 6 \\ 50 & , \text{ se } 6 < x \leq 8 \\ 50 + (x - 8)(x - 12) & , \text{ se } 8 < x \leq 12 \end{cases} \text{ onde } x \text{ é o tempo en meses.}$$

- Se inicialmente a entidade se fundou con 50 socios, determinar o valor de a .
- Determinar en que mes o número de socios foi máximo e en que mes o número de socios foi mínimo.
- Se para cubrir gastos a entidade necesitaba máis de 47 socios, ¿en que meses tivo perdas?

73 (setembro 2007) O rendemento dos traballadores dunha factoría (valorado nunha escala de 0 a 100) durante unha

$$\text{xornada de 8 horas, vén dado pola función: } r(t) = \begin{cases} -10t^2 + 60t & , \text{ se } 0 \leq t < 4 \\ 80 & , \text{ se } 4 \leq t < 6 \\ 170 - 15t & , \text{ se } 6 \leq t \leq 8 \end{cases} \text{ sendo } t \text{ o tempo en horas.}$$

- Determinar os intervalos de crecemento e decrecemento. ¿Cal é o rendemento máximo?
- ¿En que instantes da súa xornada laboral o rendemento se sitúa na metade da escala?

74 (setembro 2007) Unha empresa estimou que o custo (en euros) de producir diariamente x unidades dun determinado produto vén dado pola función $C(x) = 2400 + 26x$, e que o ingreso diario (en euros) que obtén vendendo estas x unidades vén dado pola función $I(x) = 150x - x^2$

- a) Calcular a función $B(x)$ que expresa os beneficios (ingresos menos custos) diarios obtidos. ¿Entre que valores deberá estar comprendido o número de unidades producidas diariamente para que a empresa non teña perdas?
- b) Achar o número de unidades que ten que producir diariamente para que o beneficio sexa máximo. ¿A canto ascende o devandito beneficio?

75 (setembro 2006) A cantidade de auga (en hm^3) dun encoro durante o último ano vén dada pola función

$$C(t) = \frac{210000}{(2t - k)^2 + 6}, 0 \leq t \leq 12 \text{ onde } t \text{ é o tempo transcorrido en meses.}$$

- a) Determina o valor de k tendo en conta que a cantidade máxima de auga acadouna ó cuarto mes.
- b) Para o valor de $k = 8$, determinar os períodos nos que a cantidade de auga aumentou e nos que diminuíu. ¿A partir de que mes a cantidade de auga foi inferior a 1400 hm^3 ?

76 (setembro 2006) — Un vendedor de pólizas de seguros ten un soldo fixo mensual de 1000 euros, máis unha comisión que ven dada pola función $17x - 0,0025x^3$, onde x representa o número de pólizas vendidas. Se o vendedor ten mensualmente un gasto xeral de 200 euros, máis outro de 5 euros por póliza contratada, calcular o número de pólizas que debe contratar mensualmente para que a súa ganancia sexa máxima, ¿a canto ascende dita ganancia?

77 (xuño 2006) Nun hospital o número N de persoas afectadas por unha certa infección vírica, despois de t semanas, vén dado pola función $N(t) = \frac{350t}{2t^2 + kt + 8}$ sendo $t \geq 0$

- a) Sábese que o número de persoas afectadas ó cabo de 1 semana foi 50, calcúlese o valor de k .
- b) Para o valor de $k = -3$, calcular o máximo de persoas afectadas e a semana en que ocorre, ¿a partir de que momento, despois de acadar o valor máximo, o número de persoas afectadas é menor que 25?

78 (xuño 2005) O número de vehículos que pasaron certo día pola peaxe dunha autoestrada ven representado pola

$$\text{función } N(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2 & \text{se } 0 \leq t \leq 9 \\ 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2 & \text{se } 9 < t \leq 24 \end{cases} \quad \text{onde } N \text{ indica o número de vehículos e } t \text{ representa o tempo transcorrido (en}$$

horas) dende as 0:00 horas.

- a) Entre que horas aumentou o número de vehículos que pasaban pola peaxe? Entre que horas diminuíu?
- b) A que hora pasou o maior número de vehículos? ¿Cantos foron?

79 (xuño 2004) A función de custo total de produción de x unidades dun determinado produto é $C(x) = \frac{x^3}{100} + 8x + 20$

- a) Defínese a función de custo medio por unidade como $Q(x) = \frac{C(x)}{x}$, ¿cantas unidades x_0 é necesario producir para que sexa mínimo o custo medio por unidade?
- b) Que relación existe entre $Q(x_0)$ e $C'(x_0)$?

80 (xuño 2004) Unha enfermidade propágase de tal xeito que, despois de t semanas afectou a $N(t)$ centos de persoas,

$$\text{onde } N(t) = \begin{cases} 5 - t^2(t-6) & \text{para } 0 \leq t \leq 6 \\ -\frac{5}{4}(t-10) & \text{para } 6 < t \leq 10 \end{cases}$$

a) Estudar o crecemento e decrecemento de $N(t)$. Calcular o máximo de persoas afectadas e a semana na que se presenta ese máximo. Calcular tamén a semana na que se presenta o punto de inflexión no número de persoas afectadas.

b) A partir de que semana a enfermidade afecta a 250 persoas como máximo?

81 (setembro 2004) Os beneficios (en millóns de euros por ano) estimados para unha empresa axústanse á seguinte función $B(x) = \frac{5x}{x^2+4}$, $x \geq 0$ onde B representa os beneficios da empresa e x os anos transcorridos desde o momento da súa constitución ($x=0$).

a) Determinar os intervalos de crecemento e decrecemento de $B(x)$. Que información nos dan sobre a evolución dos beneficios ó longo do tempo?

b) Ó cabo de canto tempo obtén a empresa o máximo beneficio? Cal é este beneficio máximo?

82 (2003 Xun) (a) Determina a función $f(x)$ se se sabe que pasa polo punto $(0, 1)$ e que a súa derivada é $f'(x) = x^3 + 2x$

(b) Determina o punto da gráfica no que a recta tanxente ten pendente 0. ¿Que máis se pode afirmar dese punto?

Xustifíquese a resposta.

a) $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ onde $a=1/4$; $b=1$ e $c=1$ b) Igualando a primeira derivada a 0 obtense o punto da gráfica $(0,1)$. Xustificar que se trata dun mínimo porque a segunda derivada é positiva nese punto.

83 (setembro 2003) A produción y , en kg, dunha certa colleita agrícola, depende da cantidade de nitróxeno x , con que abonemos a terra (nas unidades apropiadas), segundo a función $y = \frac{1000x}{1+x^2}$, sendo $x > 0$

a) Estudar o crecemento e decrecemento da función. Calcular a produción máxima.

b) Se é rendible que a produción estea entre 400 kg e 500 kg (ambos incluídos), ¿que cantidade de nitróxeno necesitaríamos?

84 (xuño 2002) Dada a parábola $f(x) = x^2 + bx + c$, calcular b e c se pasa polo punto $(0, 2)$ e ten un mínimo en $x = 1$.

85 (xuño 2002) Unha empresa fabrica diariamente x toneladas do produto químico A ($0 < x < 4$) e y toneladas do produto químico B: a relación entre x e y ven dada por $y = \frac{24-6x}{5-x}$. Os beneficios obtidos con A son de 2000 euros por tonelada e con B son de 3000 por tonelada. ¿Cantas toneladas de A deben producirse diariamente para maximizar os beneficios?

86 (xuño 2001) A temperatura (en graos centígrados) dun trozo de metal sumerxido nunha solución durante 9 horas ven dada por $T(t) = -10 + \frac{20}{1+t}$, $0 \leq t \leq 9$. Pídese:

a) Temperatura inicial do metal

b) A temperatura, ¿aumenta ou diminúe co paso do tempo? Xustifíquese a resposta.

c) ¿Durante canto tempo a temperatura do metal supera os cero graos?