

Unidade 2 – Gráficas de Funcións e Cálculo Integral. Teoría

1 - Cálculo Integral

1.1.- Concepto de primitiva. Integral indefinida.

Chamamos **función primitiva dunha función $f(x)$** a outra función $F(x)$ tal que $F'(x)=f(x)$. O nome de **primitiva** fai referencia a que F é a **antiga** función, antes de ser derivada.

Exemplo: Sexa $f(x)=3x^2-x+3$. Entón $F(x)=x^3-\frac{x^2}{2}+3x$ é unha primitiva de $f(x)$, xa que $F'(x)=f(x)$.

Polo mesmo motivo, $G(x)=x^3-\frac{x^2}{2}+3x+5$ tamén é unha primitiva de $f(x)$

Propiedade: Se $F(x)$ é unha primitiva de $f(x)$, entón tamén é unha primitiva $F(x)+C$, sendo $C \in \mathbb{R}$ unha constante.

Definición: chamamos **integral indefinida** dunha función $f(x)$ ao **conxunto de todas as súas primitivas**. Representase por $\int f(x)dx$; léese “**integral indefinida de $f(x)$ diferencial de x** ”.

Exemplos: $\int 4x^3 dx = x^4 + C$; $\int 3 dx = 3x + C$; $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$; $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

1.2.- Integrales inmediatas

Son aquelas que podemos obter con cálculos simples, invertendo a operación de derivar

Función simple	Función composta
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \forall n \neq -1$	$\int f(x)^n \cdot f'(x) dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C, \forall n \neq -1$
$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int f(x)^{-1} \cdot f'(x) dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$

1.3.- Propiedades das integrais

Son propiedades que se obteñen a partir das propiedades das derivadas

- **Integral da suma** é suma de integrais: $\int [f(x)+g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- **Os factores constantes** saen fóra da integral: $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$
- O produto e o cociente de funcións **NON teñen integrais obvias ou inmediatas**; nin sequera hai unha fórmula ou algoritmo que permita calcular estas integrais de forma mecánica: $\int (f(x) \cdot g(x)) dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$

Exemplos: $\int \left(4x^3 + \frac{1}{x^2}\right) dx = x^4 - \frac{1}{x} + C$; $\int \frac{7}{x^2} dx = 7 \cdot \int \frac{1}{x^2} dx = 7 \cdot \frac{-1}{x} + C = \frac{-7}{x} + C$

- **Regra da cadea:** podemos integrar unha función composta $f(g(x))$ se na expresión aparece a derivada de $g(x)$:
 $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x))$, con $F(x)$ primitiva de $f(x)$

Exemplos: $\int \frac{2x}{x^2} dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln x^2 + C$; $\int 2x e^{x^2} dx = e^{x^2} + C$

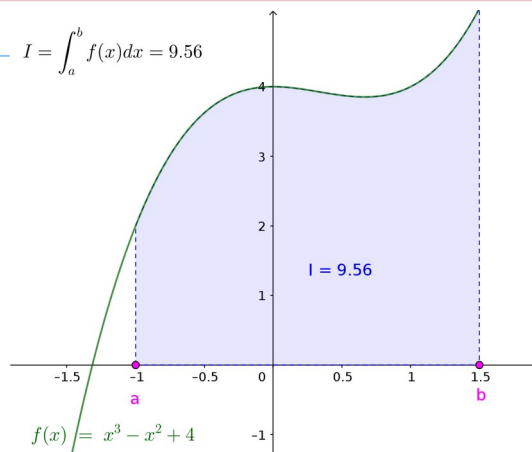
2 - Cálculo de Áreas

2.1.- Integral definida

Definición: Sexa $f(x)$ unha función **continua** nun intervalo $[a,b]$ e **non negativa** nese intervalo: $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$. Chamamos **integral definida** á área situada entre a **gráfica de $f(x)$** , o **eixe OX** e as rectas verticais **$x=a$** e **$x=b$** .

A integral definida denótase por $\int_a^b f(x) dx$

NOTA: Se $f(x)$ ten valores positivos e negativos, entón $\int_a^b f(x) dx$ non nos dá a área entre OX e a gráfica de f , pois as partes correspondentes á parte negativa da función compútanse como un área de signo negativo que resta á área total:



A **integral definida** é a **diferencia entre áreas sobre OX e baixo OX**.

Propiedade: Sexa $c \in [a, b]$ un punto do intervalo $[a, b]$. Entón podemos partir o intervalo de integración en tantos anacos como sexa necesario: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$. Gráficamente, dividimos a rexión pola recta $y=c$.

2.2.- Regra de Barrow

Regra de Barrow: Se $f(x)$ é unha **función continua** en $[a, b]$ e $F(x)$ é unha primitiva calquera de $f(x)$, entón

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = (F(x)) \Big|_a^b$$

Propiedades da regra de Barrow: (1) Se $a=b$, a integral definida vale cero: $\int_a^a f(x) dx = 0$.

(2) Se intercambiamos os límites de integración, o valor da integral definida cambia de signo: $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

2.3.- Área entre dúas funcións

Área entre dúas funcións: Se f e g son funcións continuas en $I=[a,b]$ e ademais $f(x) \geq g(x)$ para calquera x do intervalo $[a,b]$, entón a área comprendida entre ambas funcións sobre o intervalo I é $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$

Resumindo: se $f(x)$ é continua en $[a,b]$, entón

Primitiva	Integral indefinida	Integral definida	Regra de Barrow
Calquera F tal que $F'=f$	Todas as primitivas de f	Se $f(x) \geq 0$, área sobre $[a,b]$	Nexo entre integral definida e primitiva
$F(x)$ tq $F'(x)=f(x)$	$F(x)+C=\int f(x) dx$	$A=\int_a^b f(x) dx$	$A=\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = (F(x)) \Big _a^b$

NOTAS:

- Se **$f(x)$** ten valores positivos e negativos, a área delimitada pola curva e os eixes obtense dividindo o intervalo **$[a,b]$** en intervalos separados onde f non cambie de signo. Cando **$f < 0$** , a área é o valor oposto da integral.
- Temos que seguir a mesma estratexia cando nun intervalo $[a,b]$ o comportamento das funcións **f** e **g** cambia entre $f(x) < g(x)$ e $f(x) > g(x)$. Atoparemos os puntos onde se produce este cambio resolvendo a ecuación $f(x)=g(x)$, que son os **puntos de corte entre ambas funcións**.