

## UD9. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

### 1.- CONCEPTOS ELEMENTALES

Cuando se hace un estudio estadístico el investigador decide si analizará toda la población o una muestra elegida previamente.

- **Población**: es el conjunto formado por todos los elementos de los que se quiere estudiar alguna característica. Cada elemento de la población se llama **individuo**.
- **Muestra**: es un subconjunto de la población, se toma cuando la población es muy numerosa. Debe elegirse de forma que sea representativa de toda la población estudiada. El número de elementos de la muestra se llama **tamaño de la muestra** y se representa por la letra  $N$ .



Una vez tengamos elegida la población, y la muestra en caso necesario, tendremos que elegir las características o propiedades que queremos estudiar. Cada una de las características o propiedades es una **variable estadística**. Dependiendo de los posibles valores que puedan tomar se clasifican en **variables cualitativas** o **cuantitativas**.

- **Variables cualitativas**: si los valores que toma son cualidades, no se pueden expresar mediante un número.  
Por ejemplo: nacionalidad, deporte, partido político, color de los ojos, ...
- **Variables cuantitativas**: si los valores que toma son numéricos.
  - **Discretas**: cuando solo puede tomar valores enteros.  
Por ejemplo: número de hermanos, edad,...
  - **Continuas**: cuando puede tomar cualquier valor de un intervalo dado. Estos valores los agruparemos en intervalos llamados **clases**.  
Por ejemplo: peso, temperatura,...

### 2.- TABLAS DE FRECUENCIAS

Cuando las variables del estudio están escogidas, tenemos que recoger los datos. Para ello, podemos buscar datos en Internet (Instituto Gallego de Estadística o Instituto Nacional de estadística), o podemos recoger nuestros propios datos con encuestas.

Después de recopilar los datos, para organizarlos y analizarlos se utiliza una tabla, llamada **tabla de frecuencias**, en las que distinguiremos varias columnas:

- $x_i$ : valores que toma la variable (cualitativa o cuantitativa discreta) o punto medio del intervalo (cuantitativa continua), llamado **marca de la clase**.
- $f_i$  se llama **frecuencia absoluta** y es el número de veces que la variable toma el valor  $x_i$ . La suma de las frecuencias absolutas es igual al  $n.º$  total de datos,  $N$ .
- $F_i$  se llama **frecuencia absoluta acumulada** y se calcula sumando los valores de las frecuencias absolutas de los valores que son menores o iguales que él.  $F_i$

representa el número de veces que la variable toma un valor menor o igual que  $x_i$ .

- $h_i$  se llama **frecuencia relativa** y se calcula dividiendo cada  $f_i$  entre el número total de datos,  $N$ . Esta frecuencia nos informa acerca de la proporción o el peso que tiene algún valor en la población o en la muestra.
- $H_i$  se llama **frecuencia relativa acumulada** y se calcula sumando los valores de las frecuencias relativas de los valores que son menores o iguales que él.  $H_i$  representa la proporción de datos que hay menores o iguales al valor  $x_i$  correspondiente.

Ejemplo variable cuantitativa discreta: Estas son las edades de los integrantes de un equipo deportivo:

14 15 13 13 14      15 15 18 14 13      15 13 14 15 16      14 15 13 13 15

- a) Elabora la tabla de frecuencias.

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ | %    |
|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| 13    | 6     | 6     | 0,3   | 0,3   | 30%  |
| 14    | 5     | 11    | 0,25  | 0,55  | 25%  |
| 15    | 7     | 18    | 0,35  | 0,9   | 35%  |
| 16    | 1     | 19    | 0,05  | 0,95  | 5%   |
| 18    | 1     | 20    | 0,05  | 1     | 5%   |
| Total | 20    |       | 1     |       | 100% |

- b) ¿Cuántos chicos y chicas tienen 15 años? Hay 7 integrantes de 15 años.  
 c) ¿Cuántos chicos y chicas tienen 14 años o menos? Hay 11 integrantes con 14 años o menos.  
 d) ¿Qué porcentaje de chicos y chicas tiene 13 años? El 30% de los chicos y chicas tiene 13 años.

Ejemplo variable cuantitativa continua: Las notas en la materia de matemáticas de un grupo de alumnos y alumnas han sido:

3,1 7 2 5,6 6,1      7,3 4,7 5,2 7,1 3      2,8 2,9 4,1 4,9 7,8      6,4 6,2 5,2 5,4 5,3

- a) Elabora la tabla de frecuencias

La nota mínima es 2 y la máxima es 7,8. Tomamos, por ejemplo, intervalos de amplitud 1:

| clase | $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ | %   |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| [2,3) | 2,5   | 3     | 3     | 0,15  | 0,15  | 15% |
| [3,4) | 3,5   | 2     | 5     | 0,1   | 0,25  | 10% |
| [4,5) | 4,5   | 3     | 8     | 0,15  | 0,4   | 15% |
| [5,6) | 5,5   | 5     | 13    | 0,25  | 0,65  | 25% |
| [6,7) | 6,5   | 3     | 16    | 0,15  | 0,8   | 15% |
| [7,8) | 7,5   | 4     | 20    | 0,2   | 1     | 20% |
| Total |       | 20    |       | 1     |       | 100 |

- b) ¿Cuántos alumnos y alumnas tienen una nota superior o igual a 5 e inferior a 6? Hay 5 alumnos y alumnas que tienen una nota igual o superior a 5 e inferior a 6.

- c) ¿Cuántos alumnos y alumnas tienen una nota inferior a 7? Hay 16 alumnos y alumnas con nota inferior a 7.
- d) ¿Qué porcentaje de alumnado tiene una nota superior o igual a 3 e inferior a 4? El 10% del alumnado tiene una nota igual o superior a 3 e inferior a 4.
- e) ¿Cuál es el porcentaje de aprobados? El porcentaje de aprobados es del 60%

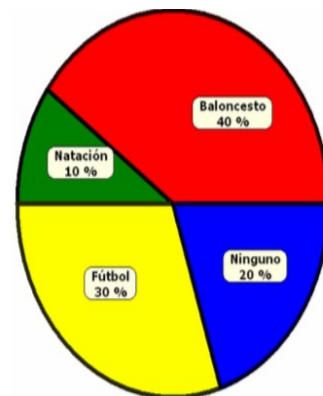
### 3.- GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Los datos obtenidos en un estudio estadístico los podemos representar con diferentes gráficos. Los gráficos nos ayudan a analizar los datos a simple vista.

- **Diagrama de sectores:** Puede aplicarse a cualquier tipo de variable, aunque es el más adecuado para variables cualitativas. Es un círculo dividido en sectores de ángulo proporcional a la frecuencia de cada valor. La amplitud de cada sector se obtiene multiplicando la frecuencia relativa por  $360^\circ$ .

Ejemplo:

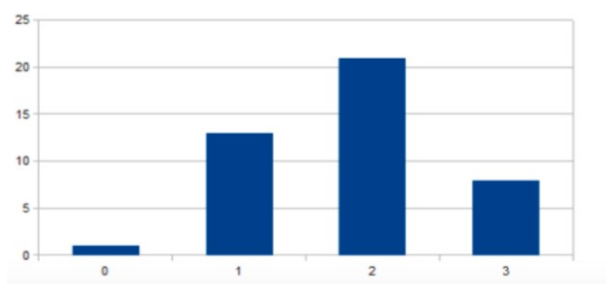
| Deporte    | $f_i$ | $h_i$ | Ángulo del sector                 |
|------------|-------|-------|-----------------------------------|
| Baloncesto | 12    | 0,4   | $0,4 \cdot 360^\circ = 144^\circ$ |
| Natación   | 3     | 0,1   | $0,1 \cdot 360^\circ = 36^\circ$  |
| Fútbol     | 9     | 0,3   | $0,3 \cdot 360^\circ = 108^\circ$ |
| Ninguno    | 6     | 0,2   | $0,2 \cdot 360^\circ = 72^\circ$  |
| Total      | N=30  | 1     |                                   |



- **Diagrama de barras:** Puede aplicarse a variables cualitativas o cuantitativas discretas, aunque se considera el idóneo para las variables cuantitativas discretas. Cada valor se corresponde con una barra de longitud proporcional a su frecuencia. Las barras deben ser de la misma anchura y debemos dibujarlas separadas.

Ejemplo:

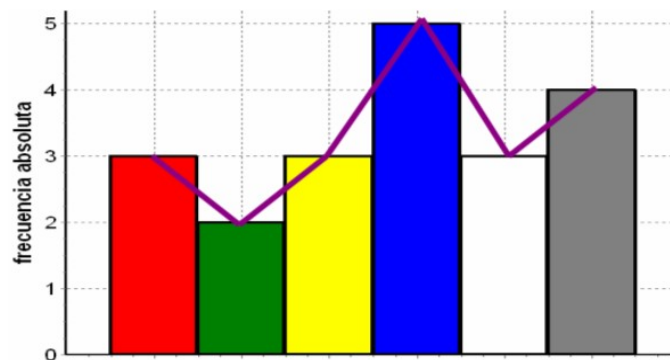
| N.º coches en casa | $f_i$ |
|--------------------|-------|
| 0                  | 1     |
| 1                  | 13    |
| 2                  | 21    |
| 3                  | 8     |
| Total              | N=43  |



- **Histograma:** se utilizan cuando los datos vienen agrupados en intervalos o clases. Cada valor se representa con un rectángulo de anchura el intervalo correspondiente y con la altura proporcional a su frecuencia. Las barras debemos dibujarlas juntas.

Ejemplo:

| Clases | $f_i$ |
|--------|-------|
| [2,3)  | 3     |
| [3,4)  | 2     |
| [4,5)  | 3     |
| [5,4)  | 5     |
| [6,7)  | 3     |
| [7,8)  | 4     |



#### 4.- MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN Y POSICIÓN

Las **medidas de centralización** son la media, la mediana y la moda. Nos indican en torno a que valor distribuyen los datos.

Los cuartiles (deciles y percentiles) son **parámetros de posición**. Dividen un conjunto de datos en grupos con el mismo número de individuos.

La media, mediana y los cuartiles solo se pueden calcular cuando la variable es cuantitativa. La moda se puede calcular para cualquier tipo de variable.

- **Media** ( $\bar{x}$ ): es la suma de todos los datos dividida entre el n.º total de datos. Si trabajamos con pocos datos los sumamos y dividimos entre el n.º de datos. En caso contrario aplicamos la fórmula:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i}{n}$$

fórmula:

Si los datos están agrupados en intervalos, se toma como  $x_i$  la marca de la clase de cada intervalo.

- **Moda** ( $M_o$ ): es el valor que más se repite en los datos, es decir, el que tiene mayor frecuencia absoluta. Si los datos están agrupados en intervalos, el **intervalo modal** es el que presenta mayor frecuencia. Puede haber más de una moda o puede que no haya moda porque todos los valores tengan la misma frecuencia absoluta.
- **Mediana** ( $M_e$ ): es el valor que ocupa la posición central una vez ordenados los datos en orden creciente, es decir, el valor que es mayor que el 50% y menor que el otro 50%. Si el número de datos es impar: la mediana es el dato que ocupa la posición central. Si el número de datos es par: la mediana es la media aritmética de los valores centrales. Si los datos están agrupados en intervalos, el **intervalo mediano** es el que contiene a la mediana.
- Cuando los datos están ordenados de menor a mayor. Los **cuartiles** son tres valores  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  que dividen a los datos en 4 partes iguales. El **primer cuartil**,  $Q_1$ , es el dato mayor que el 25% de los datos. El **segundo cuartil**,  $Q_2$ , es el dato mayor que el 50% de los datos. Es decir,  $Q_2 = M_e$ .

El **tercer cuartil**,  $Q_3$ , es dato mayor que el 75% de los datos.

- **Deciles y percentiles**: Si se divide el conjunto de los datos ordenados en 10 partes iguales, los valores que separan cada una de las partes se llaman deciles. Si se divide en 100 partes, se llama percentiles.

## 5.- MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Para conocer la distribución de los datos respecto de los valores centrales estudiamos las medidas de dispersión: **recorrido o rango**, **varianza** y **desviación típica**.

- **Recorrido o rango** (R): es la diferencia entre el mayor y el menor valor de  $x_i$ . Si los datos están agrupados en intervalos es la diferencia entre el extremo superior del intervalo mayor y el extremo inferior del menor.
- **Varianza** ( $s^2$  o  $\sigma^2$ ): se calcula mediante la fórmula:  $\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{N} - \bar{x}^2$   
Cuanto más pequeña sea más concentrados estarán los valores alrededor de la media.
- **Desviación típica** ( $s$  o  $\sigma$ ): se calcula como la raíz cuadrada positiva de la varianza.
- **Coefficiente de variación**: se calcula mediante la fórmula:

El resultado de suele expresar en %, y cuanto menor es, más representativa de la función es la media.

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

**Ejemplo**: La edad de los 50 socios de un club deportivo juvenil viene dado por :

|            |    |    |    |    |    |    |
|------------|----|----|----|----|----|----|
| Edad       | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| N.º socios | 5  | 8  | 10 | 12 | 9  | 6  |

- Calcula media, moda, mediana y cuartiles.
- Calcula el rango, la varianza y la desviación típica.

| $x_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $h_i$ | $H_i$ | $x_i \cdot f_i$ | $x_i^2 \cdot f_i$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-----------------|-------------------|
| 16    | 5     | 5     | 0,1   | 0,1   | 80              | 1280              |
| 17    | 8     | 13    | 0,16  | 0,26  | 136             | 2312              |
| 18    | 10    | 23    | 0,2   | 0,46  | 180             | 3240              |
| 19    | 12    | 35    | 0,24  | 0,7   | 228             | 4332              |
| 20    | 9     | 44    | 0,18  | 0,88  | 180             | 3600              |
| 21    | 6     | 50    | 0,12  | 1     | 126             | 2646              |
| N     | 50    |       |       |       | $\Sigma=930$    | $\Sigma=17410$    |

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{N} = \frac{930}{50} = 18,6$$

$$Mo = 19$$

$$\begin{aligned} \frac{N}{4} &= \frac{50}{4} = 12,5 & Q_1 &= 17 \\ \frac{2N}{4} &= \frac{100}{4} = 25 & Q_2 &= Me = 20 \\ \frac{3N}{4} &= \frac{150}{4} = 37,5 & Q_3 &= 20 \end{aligned}$$

$$R = 21 - 16 = 5$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{N} - \bar{x}^2 = \frac{17410}{50} - 18,6^2 = 2,24$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2,24} = 1,5$$

## AZAR Y PROBABILIDAD

### 1. TÉCNICAS DE RECuento. COMBINATORIA

La **combinatoria** es una parte de las Matemáticas que se encarga de estudiar los distintos agrupamientos que pueden realizarse con los elementos de un conjunto.

a) **Permutaciones sin repetición de n elementos**: posibles ordenaciones de un conjunto de n elementos distintos. Acción: **ordenar**.

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1. \quad (\text{se lee } n \text{ factorial}). \quad \text{Por convenio } 0! = 1.$$

En la calculadora: con la tecla  $x!$  se calcula “factorial de x”, siendo x un número entero no negativo.

Ejemplo: ¿Cuántos números de 4 cifras distintas pueden escribirse con los dígitos 2, 3, 5 y 8?

Solución:  $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  números

b) **Variaciones sin repetición de n elementos tomados de r en r**: posibles muestras ordenadas de r elementos distintos que se pueden extraer de un conjunto de n elementos ( $r \leq n$ ). Acción: **elegir con orden**.

$$V_{r,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1)$$

En la calculadora: con la tecla  $nPr$  se calcula  $V_{r,n}$

Ejemplo: En una carrera con 10 atletas, ¿de cuántas formas distintas podrían repartirse las medallas de oro, plata y bronce?

Solución:  $V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$  formas distintas

c) **Combinaciones sin repetición de m elementos tomados de n en n**: posibles muestras sin orden de r elementos distintos que se pueden extraer de un conjunto de n elementos ( $n \leq m$ ). Acción: **elegir sin orden**.

$$C(m,n) = \frac{m!}{(m-n)!n!}$$

En la calculadora: con la tecla  $nCr$  se calcula la combinación sin repetición.

Ejemplo: En una reunión de 10 personas debe nombrarse una comisión formada por tres de ellas. ¿Cuántas comisiones distintas podrían nombrarse?

Solución:  $C_{(10,3)} = \frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{3628800}{5040 \cdot 6} = 120$  formas de elegir a 3 personas de un grupo de 10.

## 2. LEYES DE AZAR. EXPERIMENTOS ALEATORIOS

Un experimento se llama **aleatorio** cuando no se puede predecir el resultado. Hay una serie de características que caracterizan este tipo de experimentos:

- En las mismas condiciones iniciales, pueden dar lugar a diferentes resultados finales.
- Todos los resultados posibles se conocen por adelantado.
- En general, el experimento puede repetirse en las mismas condiciones indefinidamente.

Si realizamos un experimento, pero podemos predecir el resultado, se llama **experimento determinista**.

### Ejemplos:

- Experimentos deterministas: Averiguar la hipotenusa de un triángulo rectángulo, conocidos los catetos.
- Experimento aleatorio: Resultado de lanzar una moneda o un dado, averiguar el resultado de un partido de baloncesto, antes de que se juegue.

### 2.1- Espacio muestral, suceso y espacio de sucesos

Dado un experimento aleatorio, se llama **espacio muestral** y se designa por E, al conjunto de todos los resultados posibles distintos de dicho experimento aleatorio.

A los elementos que forman el espacio muestral E, se les conoce como **sucesos elementales**.

Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral. Se representan con letras mayúsculas.

El **espacio de sucesos**, S, es el conjunto formado por todos los sucesos asociados a ese experimento.

### Ejemplos:

- Lanzar una moneda al aire  $E = \{+, c\}$ , siendo + el suceso elemental “sacar cruz” y c el suceso elemental “sacar cara”
- Lanzar un dado al aire  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Averiguar el resultado de un partido de baloncesto  $E = \{\text{gana, pierde, empata}\}$

## 2.2- Tipos de sucesos

Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral. Tenemos dos tipos de sucesos:

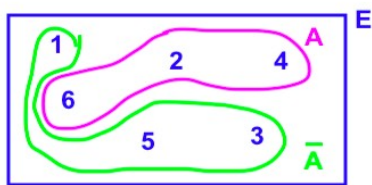
- **Elementales**: Cada uno de los posibles resultados del espacio muestral.
- **Compuestos**: Formado por dos o más sucesos elementales.
- Suceso **imposible** ( $\phi$ )  $\rightarrow$  No posee ningún suceso elemental.
- Suceso **seguro** (**E**)  $\rightarrow$  Se cumple siempre.
- El **suceso contrario o complementario** de un suceso  $A$  lo denotamos por  $\bar{A}$  (es el que se cumple cuando no se cumple  $A$ ).  $\bar{A}$  Está formado por todos los sucesos elementales de  $E$  que no están en  $A$ .

Ejemplo: Si tiramos un dado al aire el espacio muestral es  $E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Los sucesos elementales serían:  $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$  y  $\{6\}$
- Los sucesos compuestos podrían ser: Obtener un número par  $\{2, 4, 6\}$   
Obtener un número impar  $\{1, 3, 5\}$   
Obtener un número mayor que 3  $\{4, 5, 6\}$
- Un suceso imposible : Obtener un 7  $\{\phi\}$
- Un suceso seguro: Obtener un número menor o igual a 6 :  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = E$

Ejemplo: Sea  $A$  el suceso “sacar número par”, el suceso contrario  $\bar{A}$  será “sacar número impar”.

$$A = \{2, 4, 6\} \text{ y } \bar{A} = \{1, 3, 5\}$$

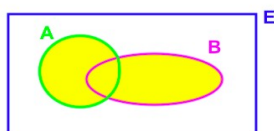


Para representar sucesos son de gran utilidad os **diagramas de Venn**.

## 2.3- Operaciones con sucesos

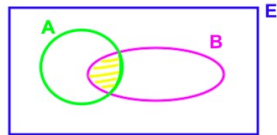
Los sucesos pueden operarse obteniendo otros sucesos nuevos.

- **Unión**: Unión de dos sucesos  $A$  y  $B$ ,  $A \cup B$ , es el suceso que se verifica cuando lo hace  $A$  o  $B$ , o ambos.

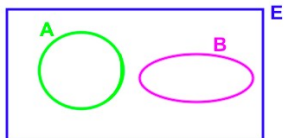


$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ o } x \in B\}$$

- **Intersección:** Intersección de dos sucesos A y B,  $A \cap B$ , es el suceso que se verifica cuando lo hace A y B a la vez. El suceso  $A \cap B$  está formado por los sucesos de A y de B.

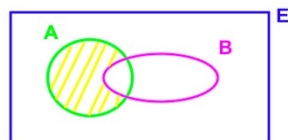


$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ y } x \in B\}$$



Cuando  $A \cap B = \emptyset$ , se dice que el suceso A y B son **incompatibles**. En caso contrario diremos que A y B son compatibles.

- **Diferencia:** Diferencia de A y B,  $A - B$ , es el suceso que se verifica cuando lo hace A pero no B. Está formado por los sucesos de A que no están en B.



$$A - B = \{x \in E / x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

$$A - B = A - (A \cap B) = \bar{B} \cap A$$

**Ejemplo:** Consideramos el experimento aleatorio “lanzar un dado”,  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  y los sucesos A=“sacar un número par”, B=“sacar un número mayor que 3” y C=“sacar un número impar”.

$$A = \{2, 4, 6\} \quad B = \{4, 5, 6\} \quad C = \{1, 3, 5\}$$

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\} \rightarrow \text{sacar un número par o un número mayor que 3.}$$

$$A \cap B = \{4, 6\} \rightarrow \text{sacar un número par y un número mayor que 3.}$$

$$A - B = \{2\} \rightarrow \text{sacar un número par que no sea mayor que 3}$$

$A \cup C = E \rightarrow$  sacar un número par o un número impar, se verifica siempre, por eso es el suceso seguro.

$A \cap C = \emptyset \rightarrow$  sacar un número par y uno impar, no es posible, no se verifica nunca, es el suceso imposible.

## 2.4- Propiedades

Sea E el espacio muestral de un experimento aleatorio y sean A, B y C sucesos de dicho espacio muestral. Se verifican las siguientes propiedades:

- **Conmutativa:**  $A \cup B = B \cup A$  y  $A \cap B = B \cap A$
- **Asociativa:**  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$   
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$
- **Distributiva:**  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$   
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- **Complementario:**  $A \cup \bar{A} = E$   
 $A \cap \bar{A} = \phi$
- **Leyes de Morgan:**  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$   
 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

## 3.- CONCEPTO DE PROBABILIDAD

La **probabilidad** de un suceso, indica el grado de probabilidad de que ocurra un suceso.

Se escribe  $P(A)$  (probabilidad del suceso A) y cumple:

- La probabilidad de cualquier suceso está comprendida entre 0 y 1. Si  $P(A)$  está próxima a 0 el suceso es poco probable y será más probable cuánto más se acerque a 1.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- La probabilidad del suceso imposible es 0:  $P(\phi) = 0$
- La probabilidad del suceso seguro es 1:  $P(E) = 1$

Cuando se repite un experimento aleatorio muchas veces, la frecuencia relativa con la que aparece un suceso tiende a estabilizarse hacia un valor fijo, a medida que aumentan el número de pruebas realizadas (este valor es una aproximación de la probabilidad de dicho suceso). Este resultado es conocido como **ley de los grandes números**.

### 3.1- Regla de Laplace

- Dos sucesos se llaman **equiprobables** cuando tienen la misma probabilidad de ocurrir al realizar un experimento aleatorio.
- Si en un espacio muestral, todos los sucesos son equiprobables, entonces la probabilidad de cualquier suceso A se puede calcular mediante la **ley de Laplace**, según la cual, basta contar el número de sucesos elementales que componen A y el número de sucesos elementales que componen E:

$$P(A) = \frac{\text{Nº de casos favorables de } A}{\text{Nº de casos totales}}$$

Ejemplo: Consideramos el experimento aleatorio “lanzar un dado”,  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  y los sucesos  $A = \text{“sacar un número par”} = \{2, 4, 6\}$ ,  $B = \text{“sacar el número 2”} = \{2\}$ . Vamos a calcular  $P(A)$  y  $P(B)$

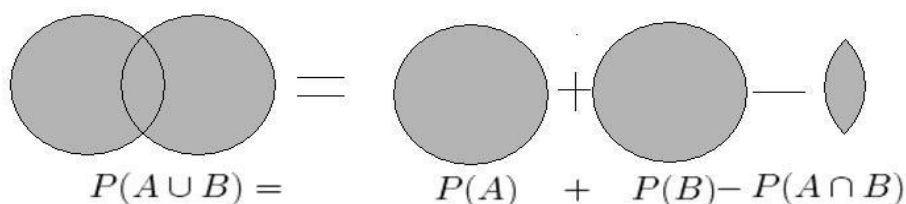
- $P(A) = \frac{\text{Nº de casos favorables de } A}{\text{Nº de casos totales}} = \frac{\text{Nº de elementos de } A}{\text{Nº de elementos de } E} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- $P(B) = \frac{\text{Nº de elementos de } B}{\text{Nº de elementos de } E} = \frac{1}{6}$

Ejemplo: Tenemos una bolsa con cuatro bolas rojas, dos blancas y 3 verdes, todas del mismo peso y tamaño. Consideramos los sucesos  $R = \text{“sacar bola roja”}$ ,  $B = \text{“sacar bola blanca”}$  y  $V = \text{“sacar bola verde”}$

- $P(R) = \frac{4}{9}$
- $P(B) = \frac{2}{9}$
- $P(V) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

### 3.2- Probabilidad de la unión de sucesos

Sean A y B dos sucesos tenemos:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



Si los sucesos son incompatibles ya sabemos que  $A \cap B = \emptyset$  y  $P(\emptyset) = 0$ , por ello  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

### 3.3- Probabilidad del suceso contrario

Sea A un suceso,  $\bar{A}$  es el suceso contrario. Si conocemos  $P(A)$  entonces también conocemos  $P(\bar{A})$  :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Ejemplo: Consideramos el suceso aleatorio “lanzar un dado” y los sucesos  $A$ =”sacar un número  $>3$ ” y  $B$ =”sacar un número par”

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \quad P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \quad P(A \cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \quad P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{2}$$

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

### 3.4- Sucesos independientes

Sea  $E$  el espacio muestral de un experimento aleatorio y  $A, B$  dos sucesos de  $E$ , decimos que los sucesos  $A$  y  $B$  son:

- **Independientes** si se verifica que  $P(A \cap B)=P(A) \cdot P(B)$  . Es decir, cuando la realización del segundo no está condicionada por la realización del primero.
- **Dependientes** si la realización del segundo está condicionada por la realización del primero. Se representa  $B/A$

Ejemplo: En el ejemplo anterior del dado

$$P(A \cap B)=\frac{1}{3}$$

$$P(A)=\frac{1}{2}$$

$$P(B)=\frac{1}{2}$$

$$P(A) \cdot P(B)=\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}=\frac{1}{4} \neq \frac{1}{3}=P(A \cap B) \rightarrow A \text{ y } B \text{ no son independientes}$$

### 3.5- Probabilidad condicionada

La probabilidad de un suceso  $A$  puede verse modificada si ha ocurrido previamente otro suceso  $B$ . Para medir la influencia entre esos sucesos, se define la **probabilidad de A condicionada por B**, se denota por  $P(A/B)$

$$P(A/B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{y} \quad P(B/A)=\frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Si  $A$  y  $B$  son sucesos independientes :  $P(A/B)=P(A)$

Ejemplo: Consideramos el suceso aleatorio “lanzar un dado” y los sucesos  $A$ =”sacar un número  $>3$ ” y  $B$ =”sacar un número par”. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número mayor que 3 sabiendo que ha salido un número par?

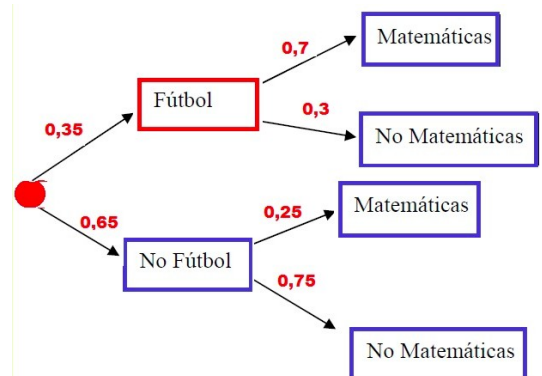
$$P(B)=\frac{1}{2} \quad P(A \cap B)=\frac{1}{3}$$

$$P(A/B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

### 3.6- Diagramas de árbol

Cuando realizamos experimentos encadenados, es útil el diagrama de árbol.

*Ejemplo*: El 35 % de los estudiantes de un centro docente practica el fútbol. El 70 % de los que practican el fútbol estudia Matemáticas, así como el 25 % de los que no practican el fútbol. Elaboramos el diagrama de árbol.



Indica la probabilidad de jugar al fútbol y la probabilidad de estudiar matemática:

$$P(F)=0,35$$

$$P(M)=P(M/F) \cdot P(F)+P(M/\bar{F}) \cdot P(\bar{F})=0,7 \cdot 0,35+0,25 \cdot 0,65=0,407$$

## TEMA 11: GEOMETRÍA

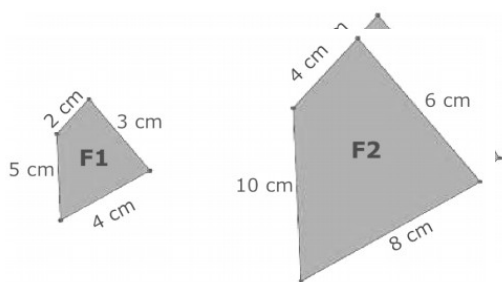
### 1. FIGURAS SEMEJANTES

Dos figuras son **semejantes** si sus longitudes correspondientes son proporcionales y sus ángulos son iguales. Es decir, si tienen la misma forma y solo se diferencian en su tamaño.

Ejemplo:

F1 y F2 son semejantes porque:

- Los ángulos de F1 son iguales a los ángulos de F2
- Las medidas de los lados son proporcionales:



$$\frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{10}{5} = \frac{8}{4} = K = 2$$

Si dos figuras F1 y F2 son semejantes, las medidas de F2 se obtienen multiplicando las correspondientes medidas de F1 por un número positivo k llamado **razón de semejanza**.

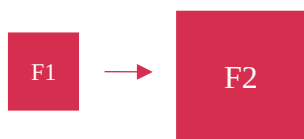
En el ejemplo anterior los lados de F2 se obtienen multiplicando los de F1 por dos.

La razón de semejanza se calcula dividiendo una medida de la figura F2 entre la correspondiente medida de F1.

En el ejemplo anterior  $4:2 = 2$

Si  $k > 1$  F2 es más grande que F1 (Ampliación) Si  $K < 1$  F2 es más pequeña que F1 (Reducción)

Ejemplo:  $k=2$



Ejemplo:  $k=0,5$



Si la razón de semejanza entre dos figuras es k, entre sus perímetros es k, entre sus áreas es  $k^2$  y entre sus volúmenes  $k^3$ .

Ejemplo:

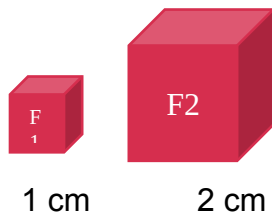


1 cm

2 cm

Relación entre perímetros:  $\frac{P_2}{P_1} = \frac{8}{4} = 2 = k$

Relación entre áreas:  $\frac{A_2}{A_1} = \frac{4}{1} = 4 = 2^2 = k^2$

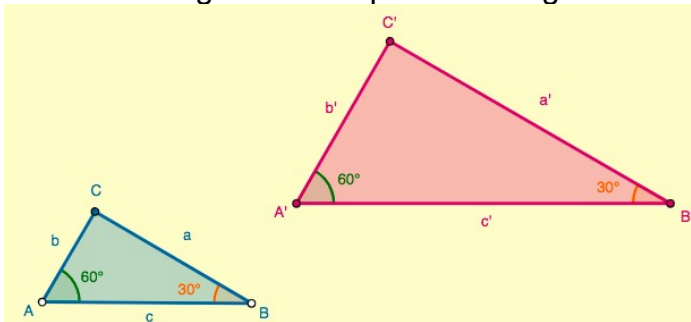


Relación entre volúmenes:  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{8}{1} = 8 = 2^3 = k^3$

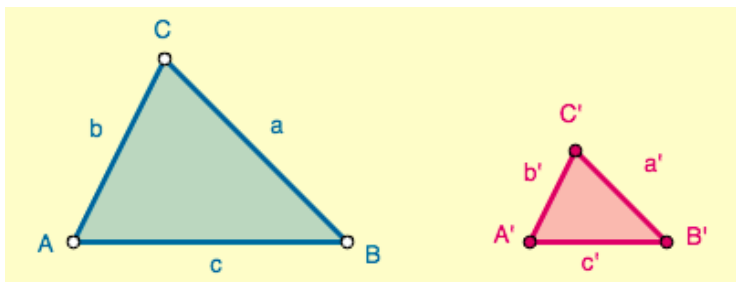
## 2. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Para saber si dos **triángulos son semejantes** basta comprobar que se cumple uno de los siguientes criterios:

- 1) Tienen los ángulos correspondientes iguales.

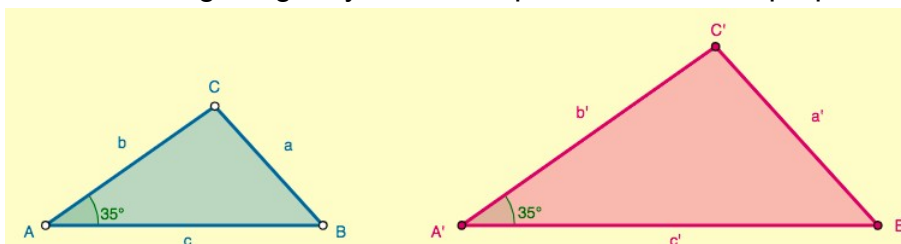


- 2) Tienen los lados correspondientes proporcionales



$$\begin{aligned} a &= k \cdot a' \\ b &= k \cdot b' \\ c &= k \cdot c' \end{aligned}$$

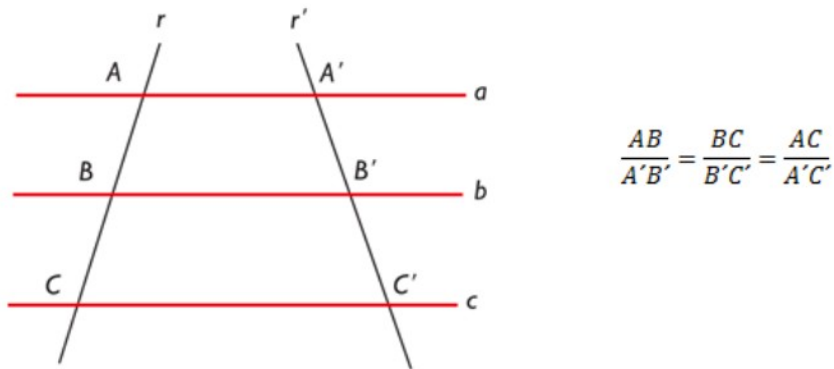
- 3) Tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales.



$$\begin{aligned} b' &= k \cdot b \\ c' &= k \cdot c \end{aligned}$$

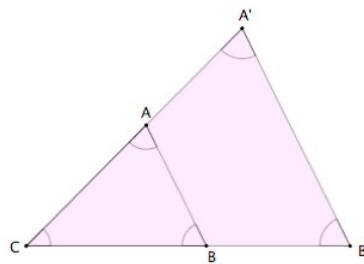
### 3. TEOREMA DE TALES

Si varias rectas paralelas cortan a dos secantes  $r$  y  $r'$  los segmentos que determinan sobre ellas son proporcionales.



#### 3.1- Triángulos en posición de Tales

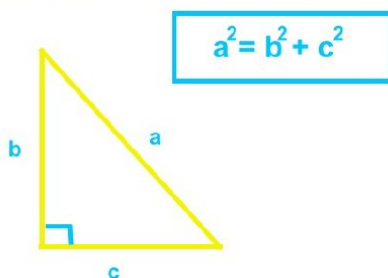
Dos triángulos están en posición de Tales si tienen un vértice en común y los lados opuestos a él son paralelos.



Los triángulos ABC y A'B'C están en posición de Tales. Estos triángulos siempre son semejantes porque tienen los ángulos iguales.

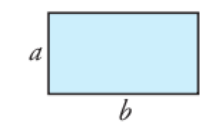
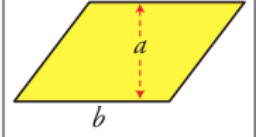
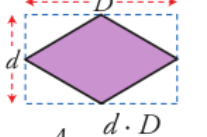
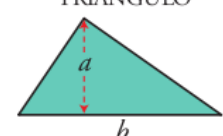
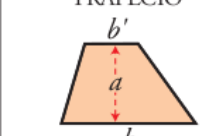
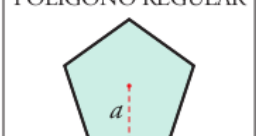
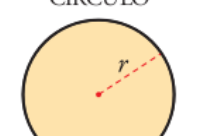
### 4. TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



b y c: catetos  
a : hipotenusa (lado opuesto al ángulo recto)

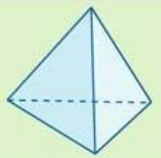
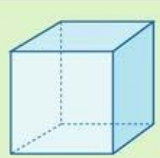
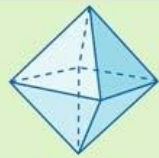
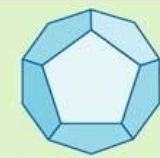
## 5. ÁREAS

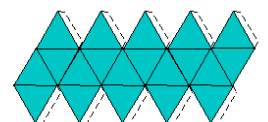
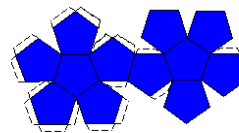
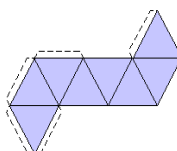
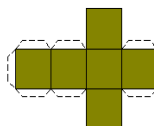
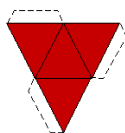
|                                                                                                                                                |                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                              |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>RECTÁNGULO</p>  <p><math>A = a \cdot b</math></p>          | <p>CUADRADO</p>  <p><math>A = l^2</math></p>                      | <p>PARALELOGRAMO</p>  <p><math>A = a \cdot b</math></p>                             | <p>ROMBO</p>  <p><math>A = \frac{d \cdot D}{2}</math></p> |
| <p>TRIÁNGULO</p>  <p><math>A = \frac{a \cdot b}{2}</math></p> | <p>TRAPECIO</p>  <p><math>A = \frac{b + b'}{2} \cdot a</math></p> | <p>POLÍGONO REGULAR</p>  <p><math>A = \frac{\text{Perímetro} \cdot a}{2}</math></p> | <p>CÍRCULO</p>  <p><math>A = \pi r^2</math></p>           |

## 6. CUERPOS GEOMÉTRICOS

### 6.1- Poliedros

Un **poliedro** es un cuerpo geométrico tridimensional cuyas caras son polígonos. Ahora vemos una serie de poliedros regulares y su desarrollo en el plano:

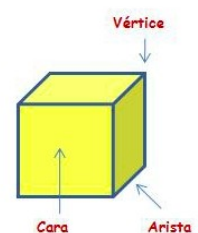
| Tetraedro                                                                           | Cubo                                                                                | Octaedro                                                                            | Dodecaedro                                                                           | Icosaedro                                                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |  |  |
| Las 4 caras son triángulos equiláteros.                                             | Las 6 caras son cuadrados.                                                          | Las 8 caras son triángulos equiláteros.                                             | Las 12 caras son pentágonos regulares.                                               | Las 20 caras son triángulos equiláteros.                                              |



En un poliedro podemos distinguir los siguientes elementos:

- **Caras:** son los polígonos que forman el poliedro.
- **Aristas:** son los segmentos en los que se cortan las caras.

**Vértices:** son los puntos donde se cortan las aristas.

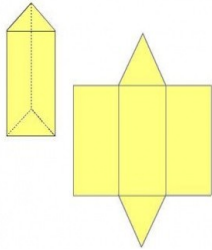


## 6.2- Prismas

Un **prisma** es un poliedro determinado por:

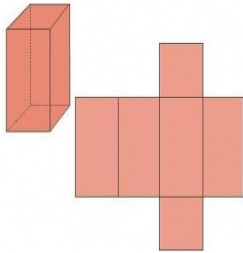
- Dos caras paralelas que son polígonos iguales (bases).
- Tantas caras laterales, que son paralelogramos, como lados tienen las bases

**Prisma de base triangular:**



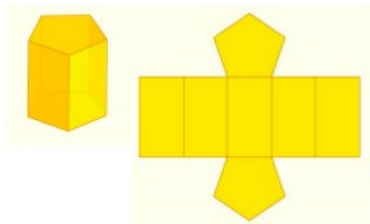
- Tiene por bases dos triángulos.
- Tiene tres caras laterales que son rectángulos.

**Prisma de base cuadrangular:**



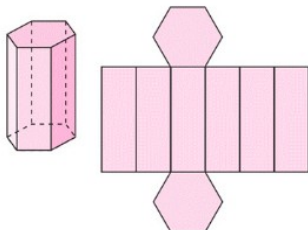
- Tiene por bases dos cuadrados.
- Tiene cuatro caras laterales que son rectángulos.

**Prisma de base pentagonal:**



- Tiene por bases dos pentágonos.
- Tiene cinco caras laterales que son rectángulos.

**Prisma de base hexagonal:**



- Tiene por bases dos hexágonos.
- Tiene seis caras laterales que son rectángulos.

$$\text{Área prisma} = \text{Área lateral} + \text{Área bases}$$

$$\text{Volumen prisma} = \text{Área base} \cdot \text{altura}$$

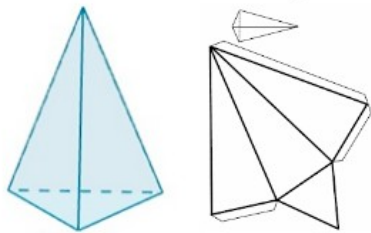
### 6.3- Pirámides

Una **pirámide** es un poliedro determinado por:

- Una cara poligonal denominada base.
- Tantas caras triangulares como lados tiene la base.

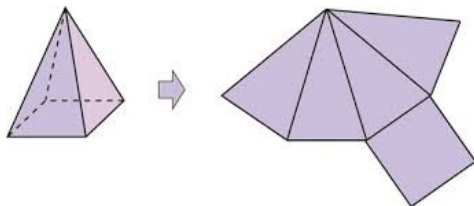
El punto donde convergen todos los triángulos se denomina **vértice**. La altura de una pirámide es la distancia del vértice a la base.

**Pirámide de base triangular:**



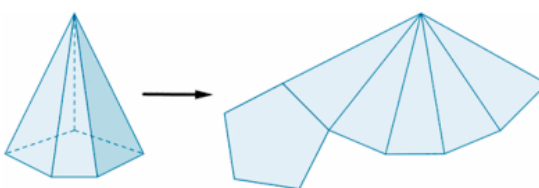
- Tiene por base un triángulo.
- Tiene tres caras laterales que son triángulos.

**Pirámide de base cuadrangular:**



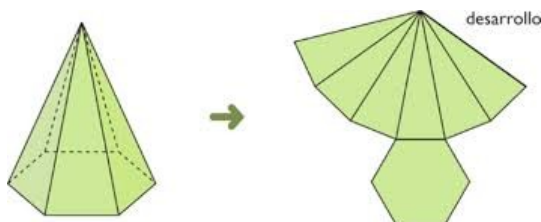
- Tiene por base un cuadrado.
- Tiene cuatro caras laterales que son triángulos..

**Pirámide de base pentagonal:**



- Tiene por base un pentágono.
- Tiene cinco caras laterales que son triángulos..

**Pirámide de base hexagonal:**

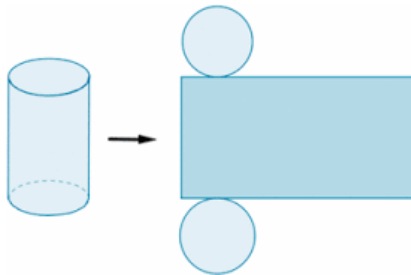


- Tiene por base un hexágono.
- Tiene seis caras laterales que son triángulos..

$$\begin{aligned}\text{Área pirámide} &= \text{Área lateral} + \text{Área bases} \\ \text{Volumen pirámide} &= (\text{Área base} \cdot \text{altura})/3\end{aligned}$$

### 6.4- Cilindro

Un cilindro recto es un cuerpo de revolución que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados. La recta en la que se sitúa el lado sobre el que gira se denomina eje de rotación y el lado paralelo a él es la generatriz. En un cilindro distinguimos la superficie lateral y dos bases que son dos círculos iguales.



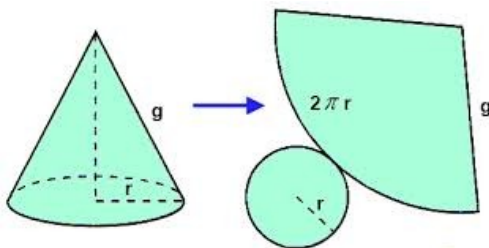
- Tiene por bases dos círculos.
- Tiene una cara lateral que es un rectángulo.

$$\text{Área cilindro} = \text{Área lateral} + \text{Área bases} = 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi \cdot r^2$$

$$\text{Volumen cilindro} = \text{Área base} \cdot \text{altura} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

### 6.5- Cono

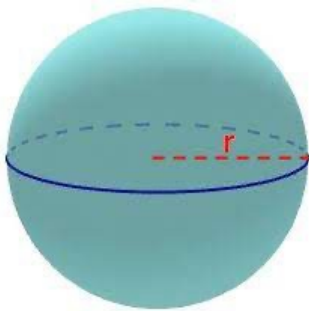
Un cono recto es un cuerpo de revolución que se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de los catetos. La recta en la que se sitúa el lado sobre el que gira se denomina eje de rotación y la hipotenusa es la generatriz.



- Tiene por base un círculo.
- Tiene una cara lateral que es un sector circular.

$$\text{Área cono} = \text{Área lateral} + \text{Área base} = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$$

$$\text{Volumen cono} = (\text{Área base} \cdot \text{altura})/3 = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

**6.6- Esfera**

$$\text{Área esfera} = 4\pi \cdot r^2$$

$$\text{Volumen esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

## UD 9. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. BOLETÍN

1. Indica, en cada caso, cuál es la población, los individuos, la variable y de qué tipo es. Indica también si lo mas conveniente es estudiar la población o la muestra.
  - a) La marca de coche de los profesores de Matemáticas del IES Mendiño.
  - b) N.º de asignaturas suspensas del alumnado de 4ºESO A.
  - c) Nombre de los jóvenes españoles de 12 años.
  - d) Peso de los bebés nacidos en 2020.
  
2. Se quiere saber el n.º de hijos de cada matrimonio de una ciudad. Para ello, se elige una muestra representativa de 50 matrimonios y se obtienen los siguientes datos:
 

2 2 4 1 3    5 3 2 1 6    3 4 1 2 0    2 3 1 7 4    2 3 0 5 1

4 3 2 4 1    5 2 1 2 4    0 3 3 2 6    1 5 4 2 0    3 2 4 3 1

  - a) Haz la tabla de frecuencias.
  - b) Indica el porcentaje de matrimonios que tiene un hijo.
  - c) ¿Cuántos matrimonios tienen menos de 5 hijos?
  - d) Dibuja el diagrama de barras
  
3. Las notas de 25 alumnos y alumnas en un examen de Física y Química han sido los siguientes:
 

7,2 3,5 5,4 6,1 4,5    8,3 5,4 2,5 8 6,5    3,5 7,5 6 5 4

6,5 5,5 4,2 6,7 1,5    5,3 6,4 6,3 5,2 6

  - a) Haz las tablas de frecuencias tomando intervalos o clases de amplitud 2 empezando por el valor 1.
  - b) ¿Qué porcentaje del alumnado está aprobado?
  - c) ¿Cuántos alumnos y alumnas tienen menos de un 3?
  - d) ¿Cuántos alumnos tienen un 7 o más?
  - e) ¿Qué porcentaje de alumnos y alumnas está aprobado pero tiene menos de un 7?
  - f) Representa los datos mediante un histograma.
  
4. Se ha hecho una encuesta sobre la marca de coche en la ciudad de Santiago, obteniéndose los siguientes resultados:

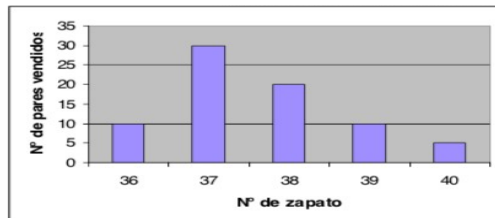
| Marca        | Seat | Renault | Peugeot | Citroën | Sin coche |
|--------------|------|---------|---------|---------|-----------|
| Porcentaje   | 25%  | 18,75%  | 28,125% | 21,875% |           |
| N.º Personas |      |         |         |         |           |

- a) Completa la tabla calculando el porcentaje de personas que respondieron que no tenían coche.
- b) Si hubo 10 personas que respondieron que no tenían coche, ¿ a cuántas personas se encuestó?
- c) Completa la última columna de la tabla.

5. La siguiente tabla refleja las calificaciones de 30 alumnos en un examen de Matemáticas

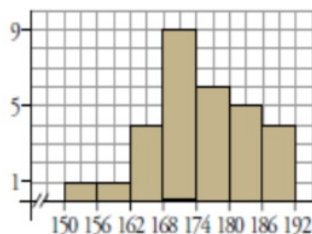
|             |   |   |   |   |   |   |   |    |
|-------------|---|---|---|---|---|---|---|----|
| Nota        | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| N.º Alumnos | 2 | 5 | 8 | 7 | 2 | 3 | 2 | 1  |

- a) ¿Cuántos alumnos aprobaron? ¿ Cuántos alumnos sacaron como máximo un 7?  
¿Cuántos alumnos sacaron como mínimo un 6?
- b) Calcular la media, moda y mediana.
6. El número de goles metidos por partido por un cierto equipo de fútbol es el siguiente  
0 1 0 2 3    2 1 3 0 0    1 0 3 0 1    1 0 0 1 1    1 2 1 2 0    2 1 5 3  
5
- a) Elabora una tabla con las cuatro frecuencias y el porcentaje.  
b) Calcula la moda, mediana y la media de los goles por partido.  
c) ¿Qué porcentaje de partidos han marcado menos de un gol?  
e) Haz una representación gráfica.
7. La siguiente gráfica recoge la cantidad de zapatos de mujer vendidos en una tienda a lo largo del día. Determina la tabla de frecuencias y los parámetros estadísticos.



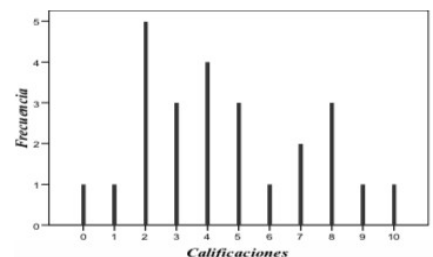
| $x_i$ | $f_i$ | $Fi$ | $hi$ | $Hi$ | $x_i \cdot f_i$ | $x_i^2 f_i$ |
|-------|-------|------|------|------|-----------------|-------------|
|       |       |      |      |      |                 |             |
|       |       |      |      |      |                 |             |
|       |       |      |      |      |                 |             |
|       |       |      |      |      |                 |             |
|       |       |      |      |      |                 |             |
|       |       |      |      |      |                 |             |
|       |       |      |      |      |                 |             |
|       |       |      |      |      |                 |             |
|       |       |      |      |      |                 |             |

8. Este gráfico muestra las alturas de los árboles de un parque. Obtén la tabla de frecuencias y los parámetros estadísticos.



| clase | $x_i$ | $f_i$ | $Fi$ | $hi$ | $Hi$ | $x_i \cdot f_i$ | $x_i^2 f_i$ |
|-------|-------|-------|------|------|------|-----------------|-------------|
|       |       |       |      |      |      |                 |             |
|       |       |       |      |      |      |                 |             |
|       |       |       |      |      |      |                 |             |
|       |       |       |      |      |      |                 |             |
|       |       |       |      |      |      |                 |             |
|       |       |       |      |      |      |                 |             |
|       |       |       |      |      |      |                 |             |
|       |       |       |      |      |      |                 |             |
|       |       |       |      |      |      |                 |             |

9. En este gráfico se muestran las notas del alumnado en el primer examen del curso:
- a) Haz la tabla de frecuencias  
b) Indica cuál es la moda  
c) Calcula los cuartiles y dibuja el diagrama de caja y bigotes.  
d) Halla el coeficiente de variación.



10. Se le pasa un test de 80 preguntas a 600 personas. El n.º de respuestas correctas se muestra en la tabla:

|                |        |          |          |          |          |          |          |          |
|----------------|--------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| N.º respuestas | [0,10) | [10, 20) | [20, 30) | [30, 40) | [40, 50) | [50, 60) | [60, 70) | [70, 80) |
| N.º personas   | 40     | 60       | 75       | 90       | 105      | 85       | 80       | 65       |

Calcula la mediana, los cuartiles, los percentiles 20 y 85, la media, la varianza y la desviación típica.

11. La evaluación de un test realizado a las 215 trabajadoras de una multinacional ha sido:

|           |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |
|-----------|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| Nota      | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| N.º Trab. | 9 | 7 | 8 | 34 | 40 | 37 | 50 | 13 | 10 | 7  |

- Completa la tabla de frecuencias y representa la distribución con un diagrama de barras.
- Calcula la moda, la mediana y los cuartiles.
- Deberán hacer un curso de formación los trabajadores por debajo del tercer decil. ¿Cuántos son?

12. Calcula el rango, la varianza y la desviación típica de la edad de los profesores de un centro recogidas en la siguiente tabla:

|       |         |         |         |         |
|-------|---------|---------|---------|---------|
| Edad  | [25-35) | [35-45) | [45-55) | [55-65) |
| $f_i$ | 6       | 14      | 18      | 12      |

13. Las notas de 10 alumnas en una prueba de piano han sido: 6, 5, 3, 6, 3, 7, 5, 8, 5, 4

- Halla el recorrido y el recorrido intercuartílico.
- Calcula la desviación típica y el coeficiente de variación.

### COMBINATORIA:

- ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse seis personas en una fila de 6 butacas?
- ¿De cuántas formas pueden mezclarse los siete colores del arco iris tomándolos de cuatro en cuatro?
- ¿Cuántos números de 4 cifras diferentes se puede formar con los dígitos del 1 al 6?
- En una reunión de 20 trabajadores se quiere elegir un comité formado por tres personas. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?
- Con las letras de la palabra EXAMEN, ¿cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer que empiecen N?
- Con las letras de la palabra AMOR, ¿cuántas palabras de 4 letras se pueden formar con o sin sentido sin repetir las letras?
- En la clase de 3º ESO B son 15 alumnos/as en total. El profe de E.F. quiere seleccionar a 5 para un juego.
  - ¿Cuántos posibles equipos de 5 podría hacer?
  - Sabiendo que hay 10 chicas y 5 chicos, ¿cuántos equipos podría hacer metiendo a 2 chicas y a 3 chicos en cada uno?
- En una clase de 15 alumnos/as se quiere nombrar a un delegado, un subdelegado y un presidente. ¿De cuántas formas distintas puede hacerse?

**AZAR Y PROBABILIDAD:**

1.- Indica cuales de los siguientes sucesos son aleatorios y cuales deterministas. En los sucesos aleatorios halla el espacio muestral.

- Extraer una carta de una baraja española y anotar el palo.
- Pesar un litro de aceite.
- Medir la hipotenusa de un triángulo rectángulo conocidos los catetos.
- Averiguar el resultado de un partido de fútbol antes de que se juegue.
- Sacar una bola de una bolsa con 1 bola roja, 1 verde, 1 azul y 1 blanca.
- Lanzar al aire una moneda y observar el tiempo que tarda en llegar al suelo.

2.- Pon un ejemplo de un experimento determinista y otro aleatorio. En el caso del aleatorio

indica el espacio muestral y, dos sucesos A y B.

3.- En el ejemplo que pusiste, calcula el suceso contrario de A, el suceso contrario de B,  $A \cup B$  y  $A \cap B$

4.- En un sorteo de lotería observamos la cifra en que termina el “gordo”

- ¿Cuál es el espacio muestral?
- Escribe los sucesos  $A = \text{”menor que 5”}$  y  $B = \text{”par”}$ .
- Halla los sucesos  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{A} \cap \bar{B}$ ,  $\bar{A} \cup \bar{B}$ ,  $\bar{A} \cap B$ ,  $A \cup \bar{B}$ ,  $\overline{A \cup B}$  y  $\overline{A \cap B}$

5.- Se lanza un dado de ocho caras y se consideran los sucesos:

$A = \text{”sacar más de 5”}$      $B = \text{”sacar un número par”}$      $C = \text{”sacar un múltiplo de 3”}$

- Escribe los elementos de los sucesos A, B y C.
- Di si son compatibles : A y B, A y C, B y C.
- Escribe los sucesos  $\bar{C}$ ,  $A \cap B$ ,  $B \cup C$ ,  $B - C$ .
- Describe :  $\bar{A} \cup B$ ,  $\bar{B} \cap C$ ,  $\overline{A \cup C}$ ,  $\overline{B \cap C}$

6.- En el experimento de lanzar sucesivamente tres monedas, sea el suceso A sacar más caras que cruces, y el suceso B, sacar una o dos cruces. Hallar todos los casos que integran el suceso  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  y  $A \cup B$

7.- Sean A y B dos sucesos tales que  $P(A \cup B) = 0,7$ ,  $P(B) = 0,6$  y  $P(A) = 0,4$ . Calcula

- $P(A \cap B)$
- $P(A - B)$
- $P(\overline{A \cup B})$

8.- En un experimento la probabilidad de un suceso A es  $P(A) = 0,5$  y la de otro suceso B es  $P(B) = 0,45$ . La probabilidad de la unión es  $P(A \cup B) = 0,90$ .

- ¿Son incompatibles A y B?
- ¿Son independientes?
- Calcula las probabilidades de  $A \cap B$ ,  $A/B$ ,  $B/A$ ,  $\bar{A} \cap B$

9.- Sean A y B dos sucesos independientes con  $P(A)=0,6$  y  $P(B)=0,2$  . Calcula:

- a)  $P(A \cap B)$                       b)  $P(A \cup B)$                       c)  $P(A/B)$

10.- Una urna contiene bolas del mismo tamaño pintadas de distintos colores: 3 amarillas, 5

rojas y 6 verdes. Si se extrae una bola al azar:

- a) Determina el espacio muestral.  
 b) ¿Son equiprobables los sucesos “bola amarilla”, “bola roja” o “bola verde”  
 c) Halla la probabilidad de cada uno de los sucesos anteriores.  
 d) Halla la probabilidad de que no sea amarilla.

11.-Extraemos una carta de una baraja española (de cuarenta cartas). Calcula la probabilidad de que sea:

- a) De oros    b) Un tres de bastos                      c) Una figura                      d) Un cuatro

12.- Se tiran tres monedas al aire.

- a) Calcula la probabilidad de sacar tres caras  
 b) Calcula la probabilidad de sacar tres cruces  
 c) Calcula la probabilidad de sacar dos caras y una cruz

13.- Una bolsa contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 azules. Se extraen dos bolas sucesivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean del mismo color si devolvemos la primera bola a la bolsa? ¿Y si no lo hacemos?

14.- En un pueblo hay 100 jóvenes; 40 de los chicos y 35 de las chicas juegan al tenis. El total de chicas en el pueblo es de 45. Si elegimos un joven de esa localidad al azar:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea chico?  
 b) Si sabemos que juega al tenis, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?  
 c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un chico que no juegue al tenis?

15.- Se tira una moneda y después un dado. Representa un diagrama de árbol.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara ?  
 b) ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara y un 4?  
 c) ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 4?

16.- El 50% de los alumnos de 4º ESO cursa Cultura Clásica, el 35 %, Francés, y el 15 %, Música. El porcentaje de aprobados es, respectivamente, 80 %, 70 % y 95 %. Se elige al azar un alumno.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe?  
 b) Si se sabe que ha aprobado, cuál es la probabilidad de que curse francés?

## UD 11: GEOMETRÍA

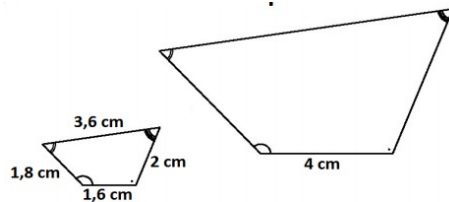
1. En una tienda de souvenir venden reproducciones de la Torre Eiffel de diferentes tamaños.

- Calcula la razón de semejanza.
- ¿Cuánto mide el lado de la base de la pequeña?

2. Resuelve las siguientes cuestiones:

- Si las dimensiones de una figura se multiplican por 0,2, ¿razona si la figura obtenida es mayor o menor que la figura inicial?
- Dos triángulos tienen las siguientes medidas: Los lados del primero son: 6 cm, 10 cm, 12 cm; Los del segundo son: 18 cm, 30 cm, 36 cm. Indica si son o no semejantes y, en caso afirmativo, cuál es la razón de semejanza.

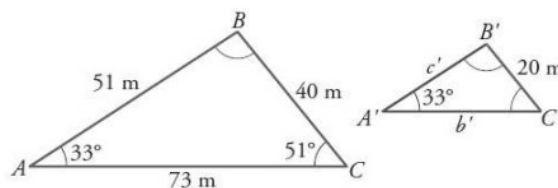
3. Si los polígonos son semejantes, ¿cuánto mide el perímetro del mayor?



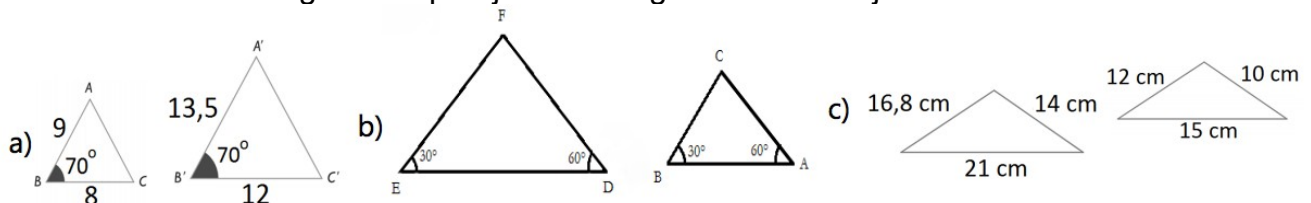
4. Dos figuras F1 y F2 de áreas  $7 \text{ cm}^2$  y  $63 \text{ cm}^2$  son semejantes

- ¿Cuál es la razón de semejanza?
- Si el perímetro de F2 es 12 cm, ¿cuál es el perímetro de F1?

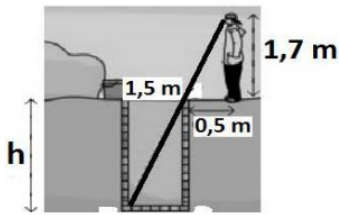
5. Los siguientes triángulos son semejantes. Halla la razón de semejanza y los lados y ángulos que faltan



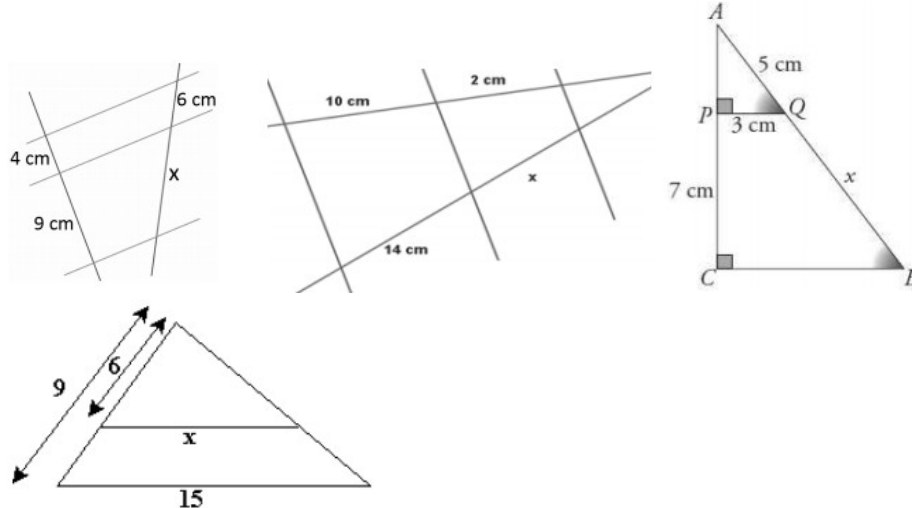
6. Razona si las siguientes parejas de triángulos son semejantes:



7. Calcula la profundidad (h) del pozo y la altura del árbol (x) usando semejanzas.



8. Calcula el valor de x:



9. Calcula la altura de una farola si una escalera de 2,6 m está separada 1 m de la base de la farola.

10. Un albañil apoya una escalera de 5 m contra un muro vertical. El pie de la escalera está a 3 m de la base del muro. Halla a que altura, x, se encuentra la parte superior de la escalera.

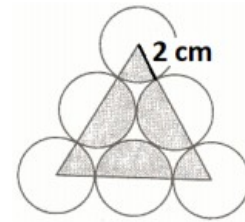
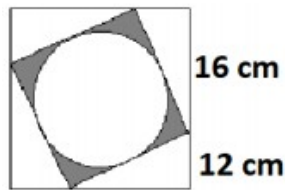
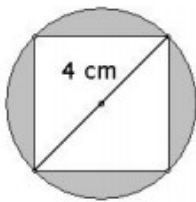
11. Halla el área de un hexágono regular de lado 6 cm.

12. Halla el área de un hexágono regular de apotema 3 cm.

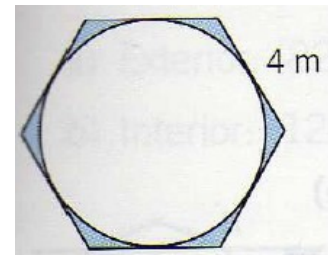
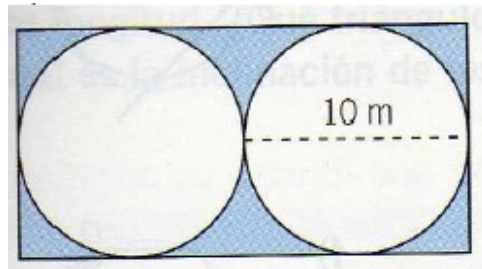
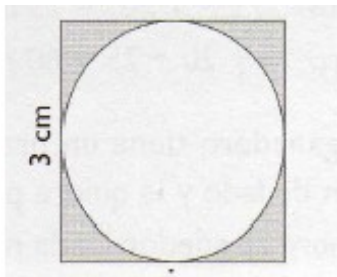
13. Una mesa cuadrada tiene 60 cm de diagonal. Halla su perímetro y su superficie.

14. Un pequeño jardín con forma de rombo se ha rodeado con una valla de 20 m. Calcula su superficie sabiendo que la diagonal menor mide 6 m.

15. Halla el área de la zona sombreada de cada figura:

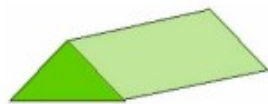


16.- Calcula el área de las figuras sombreadas



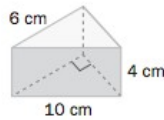
## PRISMAS

1. En un octaedro regular cada arista mide 60 cm. ¿Cuál es el área del octaedro?
2. Calcula el área de un dodecaedro regular sabiendo que cada cara tiene 6 cm de lado y 4 cm de apotema.
3. Calcula el área y volumen de un cubo de arista 10 cm.
4. Calcula el área de un ortoedro de dimensiones 12 cm, 8 cm y 15 cm.
5. Calcula el área y volumen de un prisma hexagonal de 6 cm de lado y 10 cm de altura.
6. Una tienda de campaña canadiense tiene 4m de largo y 2m de ancho. Sabiendo que los triángulos son equiláteros, calcula los metros de tela que necesitan para fabricarla.

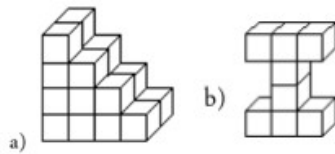


7. Calcula el área y volumen de un prisma recto de 15 dm de altura, sabiendo que sus bases son triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 2 m y el cateto menor 120 cm.
8. Calcula el área y volumen (en litros) de un prisma pentagonal regular de 3m de altura siendo el radio de la base 50 cm y el lado de la base 60 cm.
9. Calcula la altura de un prisma recto de base cuadrada sabiendo que su área total es  $200\text{cm}^2$  y la arista de su base mide 8 cm
10. Calcula el volumen de un prisma hexagonal regular, siendo el lado de su base 8 cm, la apotema 7 cm, y la altura del prisma 20 cm.

11. Calcula el volumen del prisma de la figura :



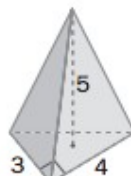
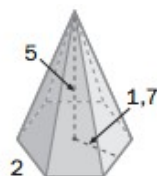
12. Calcula la altura de un recipiente prismático en el que caben 30 litros de agua y el área de la base son  $60 \text{ cm}^2$ .
13. Luis necesita comprar un bote de pintura para pintar la parte exterior de 5 recipientes ortoédricos con tapa de  $50 \text{ cm} \times 40 \text{ cm} \times 3 \text{ dm}$ . ¿Cuál es la superficie de los 5 recipientes? ¿Cuánto costará pintar los 5 recipientes si la pintura nos cuesta a razón de  $2\text{€/dm}^2$ ? ¿Cuántos recipientes podrá llenar Luis con 240 litros de agua?
14. En un recipiente cúbico, con tapa, le caben 27 litros de agua. ¿Cuál es su área?
15. Halla el área y volumen de los siguientes cuerpos geométricos sabiendo que la longitud de la arista del cubo es de 5 cm.



16. ¿Cuánto nos costará pintar 20 tablas de madera rectangulares de 10 cm de largo, 1,5 dm de ancho y 15 mm de espesor a razón de  $2,5\text{€/dm}^2$ ?

## PIRÁMIDES

17. Halla el área y volumen de una pirámide cuadrangular de 8 dm de arista básica y 10 dm de altura.
18. Calcula el área de una pirámide hexagonal, con 6 cm de arista básica y 8 cm de altura.
19. Halla el área y volumen de las siguientes pirámides:
- Hexagonal regular con lado de la base 6 cm y altura 10 cm.
  - De base cuadrada, con lado 10 cm y altura 8 cm.
  - Pentagonal regular con apotema 15 cm, lado de la base 8 cm y apotema de la base 5,5 cm.
20. Calcula el volumen de las siguientes pirámides, cuyas dimensiones vienen dadas en centímetros:

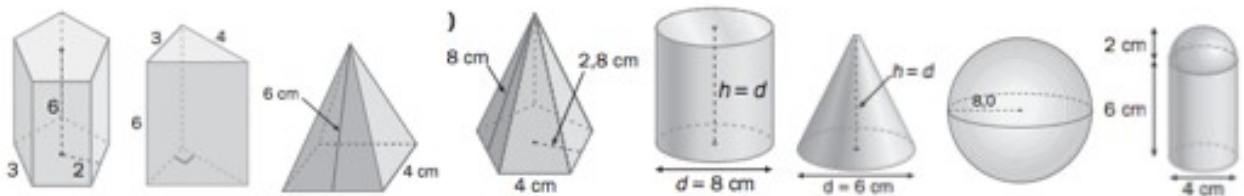


## CUERPOS DE REVOLUCIÓN

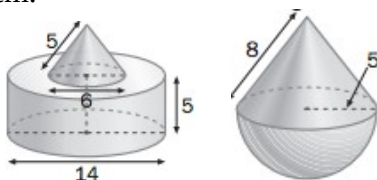
21. Calcula el área y volumen de los siguientes cilindros:
  - a) De 5 cm de radio y 12 cm de altura.
  - b) De 8 cm de diámetro y altura el doble que el radio.
22. Calcula la altura de un cono sabiendo que el radio mide 9 cm y la generatriz 13 cm. ¿Cuál es su área?
23. Calcula la generatriz de un cono de radio 5 cm y altura 7 cm. ¿Qué cantidad de agua podemos transportar en su interior?
24. Calcula el área y volumen de un cono
  - a) de radio 3 cm y generatriz 5 cm.
  - b) de 9 cm de radio y 12 cm de altura.
25. Calcula el área y volumen de una esfera de 6 cm de diámetro.
26. Calcula el área de:
  - a) Una esfera de radio 20 cm
  - b) un cilindro de radio y altura igual a 20 cm
  - c) Un cono de radio y altura iguales a 20 cm
27. Se quiere pintar una estructura cónica de radio 10 m y altura 15 m. ¿Qué cantidad de pintura se gastará? ¿Cuánto costará, si la pintura tiene un precio de 5€/m?
28. Calcula el volumen en metros cúbicos de una esfera cuyo diámetro mide 100 cm.
29. Una semiesfera tiene un diámetro de 18 cm. Calcula su volumen.
30. Calcula la altura que debe tener un cilindro de radio 10 cm para si volumen sea el mismo que el de un prisma hexagonal regular de 10 cm de lado de la base y 10 cm de altura.
31. Las dimensiones de una papelería cilíndrica son 20 cm de diámetro y 31 cm de altura. Calcula la superficie de material que se ha necesitado para construirla.

## EJERCICIOS VARIOS

32. Calcula el área y volumen de los siguientes cuerpos geométricos:



33. Calcula el volumen de los siguientes cuerpos cuyas longitudes vienen determinadas en cm.



34. Calcula el tiempo que tardará en llenarse el depósito de la figura si se echan 85 litros por minuto:

