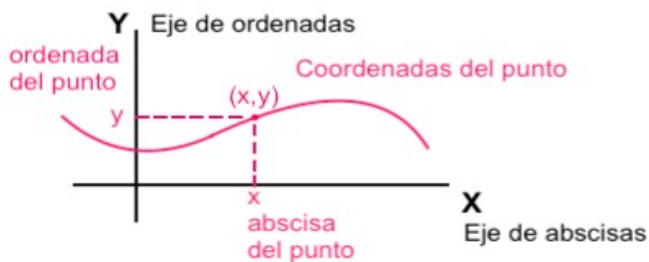


TEMA 7: FUNCIONES Y GRÁFICAS. FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

Una función liga dos variables numéricas a las que habitualmente se les llama x e y .

- x es la variable independiente.
- y es la variable dependiente.

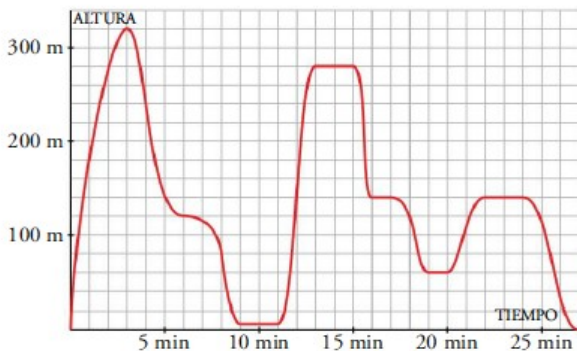


Las variables x e y , se asocian mediante **la función f** . De tal forma que **f asocia a cada valor de x , un único valor de y** . Se expresa de la siguiente forma **$y = f(x)$** .

1.- FUNCIONES

Las funciones vienen dadas de diferentes formas:

Mediante su **gráfica**.



Mediante un **enunciado**

Una cisterna contiene 5 litros de agua para pulverizarla en una terraza. Tarda 10 minutos en vaciarse. En cuanto se vacía, hay un mecanismo que la llena en 2 mins

Mediante una **expresión analítica**

$$y = F(X) = \frac{x-3}{6}$$

Mediante una **tabla de valores**

la tabla de valores será:

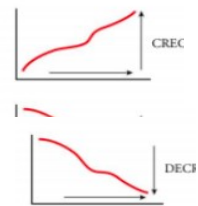
x	y
-2	8
0	6
6	0

2.- DOMINIO Y RECORRIDO

- Se llama **dominio de definición** de una función f al conjunto de valores de x para los cuales existe la función.
- Se llama **recorrido** de f al conjunto de valores que toma la función. Es decir, es el conjunto de valores de y , para los cuales existe un x tal que $f(x) = y$

3.- CRECIMIENTO. MÁXIMOS Y MÍNIMOS

- Una función f es **creciente** cuando al aumentar la variable independiente x , aumenta la variable dependiente y .
- La función f es **decreciente** cuando al aumentar x disminuye y .



Una función puede ser creciente en unos tramos y decreciente en otros

- Una función tiene un **máximo** relativo en un punto si la función es creciente antes del punto y decreciente después.
- Una función tiene un **mínimo** relativo en un punto si la función es decreciente antes del punto y creciente después.



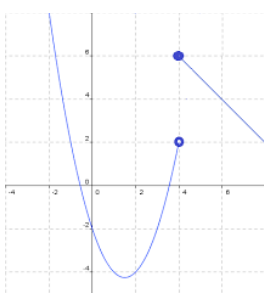
4.- FUNCIONES CONTINUAS. DISCONTINUIDADES

Una función es **continua** si no presenta ninguna discontinuidad. Esto puede resumirse diciendo que una función es continua si su gráfica puede trazarse sin levantar el lápiz del papel.

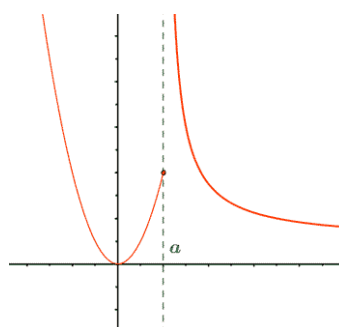
También se puede decir que una función es **continua en un tramo**, aunque tenga discontinuidades en otros lugares.

Las discontinuidades se clasifican en:

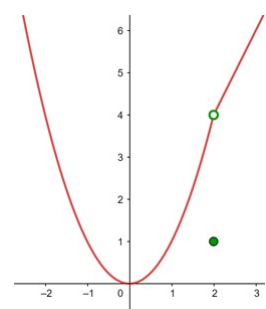
a) Inevitable de salto finito:



b) Inevitable de salto infinito:

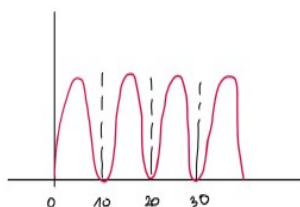


c) Evitable:

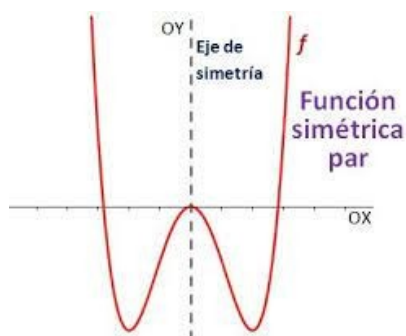


5.- PERIODICIDAD Y SIMETRÍA

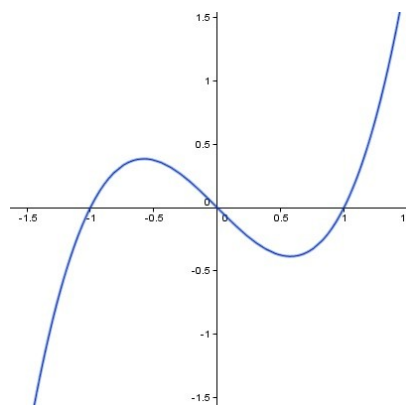
- Una **función periódica** es aquella cuyo comportamiento se repite cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo. La longitud de ese intervalo se llama **periodo**.



- Una función f es **simétrica par** si al doblar su gráfica por un eje de ordenadas, las ramas de la función se superponen.



- Una función f es **simétrica impar** si al doblar su gráfica por el eje de ordenadas y luego por el de abscisas (o al revés), las ramas de la función se superponen.



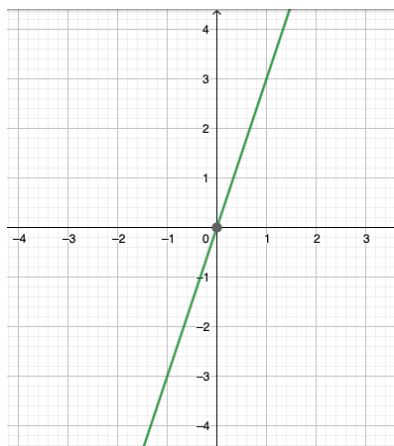
6. FUNCIONES LINEALES

Una **función lineal** no es más que una recta, y se representa haciendo una tabla de valores, tenemos diferentes tipos de funciones lineales. Su expresión algebraica es un polinomio de primer grado. Ejemplo: $f(x) = 3x - 2$

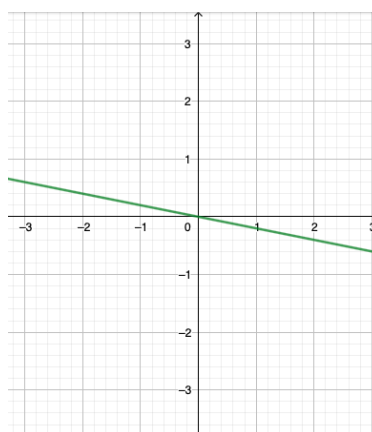
6.1. Función de proporcionalidad

La **función de proporcionalidad** tiene por ecuación $y = mx$ y se representan mediante rectas que pasan por el $(0,0)$. La pendiente de la recta es la constante de proporcionalidad, m . Si $m < 0$ la recta es decreciente y si $m > 0$ la recta es creciente.

Por ejemplo: $y = 3x$



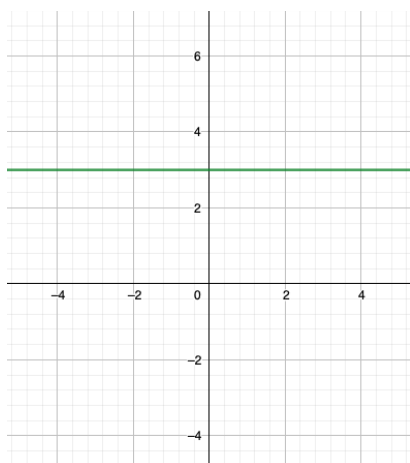
$$y = \frac{-1}{5}x$$



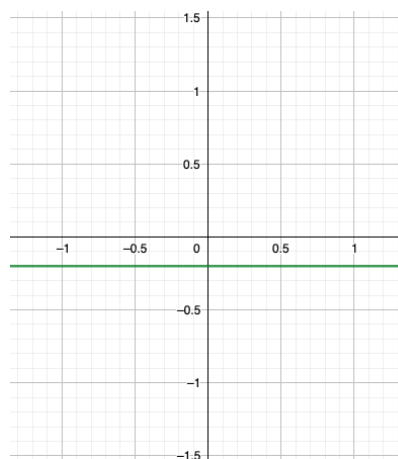
6.2. Función constante

Las **funciones constantes** son de la forma $y = n$ y se representan mediante una recta paralela al eje X. Su pendiente es 0. La recta $y = 0$ coincide con el eje X.

Por ejemplo: $y = 3$



$$y = \frac{-1}{5}$$



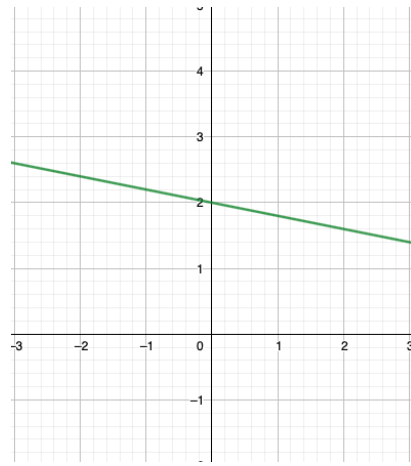
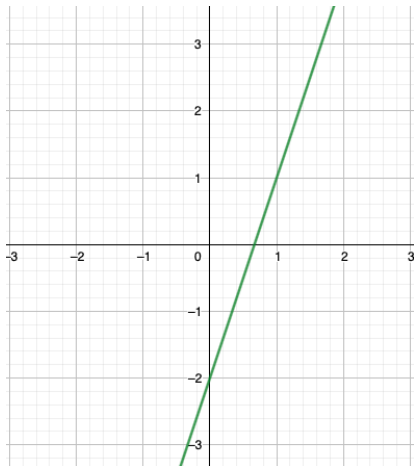
6.3. Expresión general

La expresión general de una **función lineal** es $y=mx+n$, se representa mediante una recta con las siguientes características:

- Su pendiente es m
- Su ordenada en el origen es n . Es decir, si $x=0$, entonces $y=n$. Por tanto corta al eje Y en el punto $(0, n)$

Por ejemplo: $y=3x-2$

$$y=\frac{-1}{5}x+2$$



La **pendiente (m)** es la variación que experimenta la y cuando la x aumenta una unidad. Para hallarse se divide la variación de la y por la variación de la x entre dos de sus puntos.

6.4. Recta de la que se conocen un punto y la pendiente

Suponemos que de una recta **conocemos un punto (x_0, y_0) y su pendiente m** . Entonces su ecuación puede escribirse de la siguiente forma: $y=y_0+m(x-x_0)$

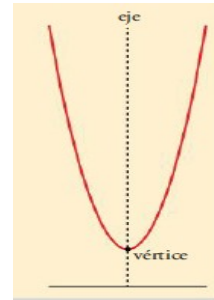
6.5. Recta que pasa por dos puntos

Si ahora **conocemos dos puntos de la recta (x_1, y_1) y (x_2, y_2)** , podemos obtener su pendiente $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Al tener un punto, y la pendiente estamos en el caso anterior, y ya podemos calcular la ecuación.

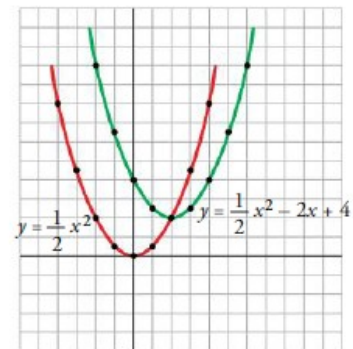
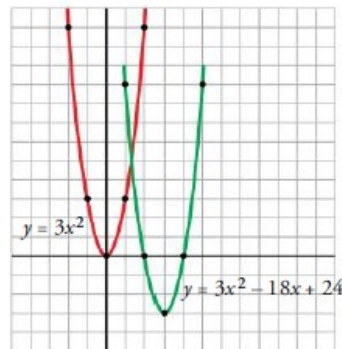
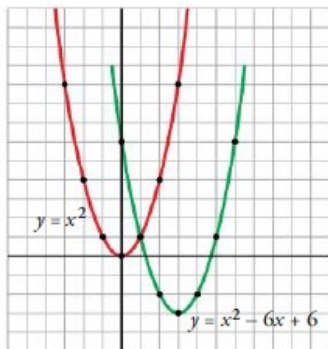
7. FUNCIONES CUADRÁTICAS

Las funciones $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, llamadas **cuadráticas**, se representan todas ellas mediante parábolas.

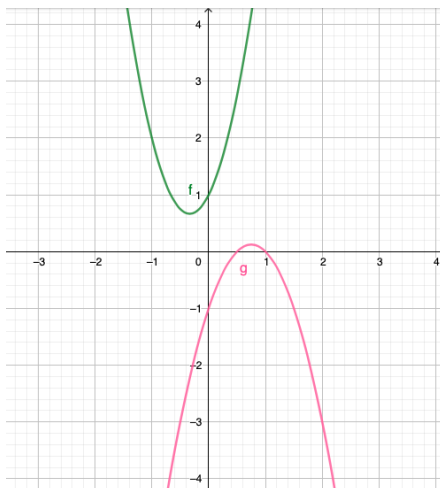
Cada una de estas parábolas tiene un eje paralelo al eje Y.
Su forma depende de a , coeficiente de x^2 , del siguiente modo:



- Si dos funciones cuadráticas tienen **el mismo coeficiente** de x^2 , sus parábolas correspondientes son idénticas, aunque pueden estar situadas en posiciones distintas.



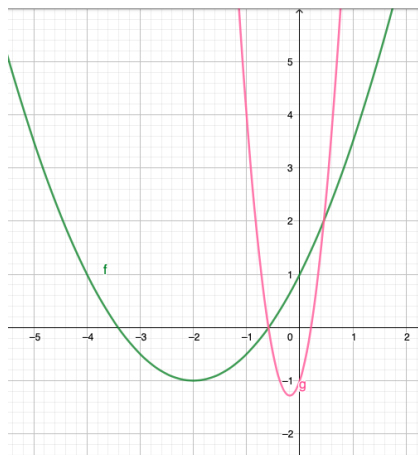
- Si **$a > 0$** , tienen las ramas hacia arriba, y si **$a < 0$** , hacia abajo.



f: $y = 3x^2 + 2x + 1, a = 3 > 0$ ramas hacia arriba

g: $y = -2x^2 + 3x - 1, a = -2 < 0$ ramas hacia abajo

- Cuanto **mayor sea $|a|$** , más estilizada es la parábola.



f: $y=0.5x^2+2x+1, |a|=0.5$ El coeficiente de x^2 , a , es pequeño, entonces la función es más ancha

g: $y=8x^2+3x-1, |a|=8$ El coeficiente de x^2 , a , es más grande, entonces la función es más estrecha

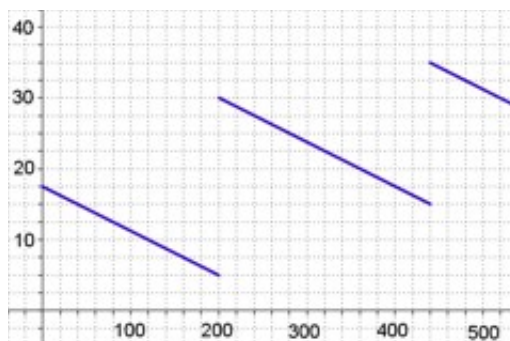
Para **representar** una función cuadrática dada por su ecuación, solo hace falta obtener varios de sus puntos. Empezaremos calculando el vértice de la parábola, para hallar, después, algunos puntos que lo rodean.

- Hallamos la abscisa del vértice de la parábola $y=ax^2+bx+c \Rightarrow p=\frac{-b}{2a}$
- Calculamos el valor de la función en algunas abscisas próximas al vértice.
- Los cortes con los ejes pueden venirnos bien para la representación:
 - Con el eje X, se resuelve la ecuación $ax^2+bx+c=0$
 - Con el eje Y, es el $(0, c)$.

BOLETÍN: FUNCIONES

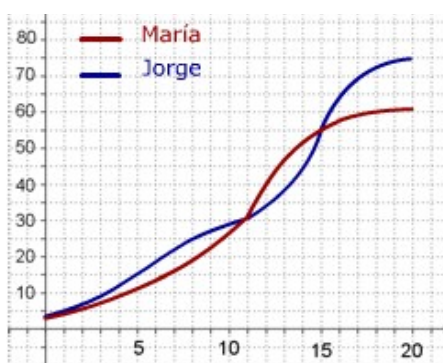
Analizar gráficas

1.- El gráfico muestra cómo varía la gasolina que hay en mi coche durante un viaje de 520 km por una autovía.



- Indica las variables x e y
- ¿Cuánta gasolina había al cabo de 240 km? En el depósito caben 40 litros, ¿cuándo estaba lleno más de medio depósito?
- ¿En cuántas gasolineras paré?, ¿en qué gasolinera eché más gasolina? Si no hubiera parado, ¿dónde me habría quedado sin gasolina?
- ¿Cuánta gasolina usé en los primeros 200 km? ¿Cuánta en todo el viaje? ¿Cuánta gasolina gasta el coche cada 100 km en esta autovía?

2.- María y Jorge son dos personas más o menos típicas. En la gráfica puedes comparar como ha crecido su peso en sus primeros 20 años



- ¿Cuánto pesaba Jorge a los 8 años?, ¿y María a los 12? ¿Cuándo superó Jorge los 45 kg?
- ¿A qué edad pesaban los dos igual? ¿Cuándo pesaba Jorge más que María?, ¿y María más que Jorge?

3.- Cuando salgo a correr voy aumentando el ritmo gradualmente y luego mantengo un ritmo constante durante un buen rato. Cuando estoy próximo al final voy disminuyendo el ritmo hasta que finalmente me paro. Construye una gráfica que muestre cómo varía la distancia recorrida en función del tiempo durante el entrenamiento.

4.- Representa en unos ejes cartesianos los 30 minutos que ha estado en inmersión un buceador: sale del barco; baja hasta 36m; se queda un rato recreándose con los corales; sube un poco y juega con los delfines; vuelve a bajar porque ha visto una morena y, por último, se queda 2 minutos a 10 metros de profundidad antes de volver al barco, para realizar la descompresión.

5.- Una cisterna contiene 5 litros de agua para pulverizarla en una terraza. Tarda 10 minutos en vaciarse. En cuanto se vacía, hay un mecanismo que la llena en 2 mins.

a) Representa la función *tiempo- cantidad de agua*

b) Explica si la función es periódica.

c) Durante la primera media hora, ¿en qué momentos está llena? ¿Y vacía?

6.- Cuando se excava hacia el interior de la tierra, la temperatura aumenta con arreglo a la siguiente fórmula: $t = 15 + 0.01 h$. Donde t es la temperatura alcanzada en grados centígrados y h es la profundidad, en metros, desde la corteza terrestre. Calcular

a) ¿Qué temperatura se alcanza a los 100 m de profundidad?

b) ¿Cuántos metros hay que excavar para alcanzar una temperatura de 100 °C?

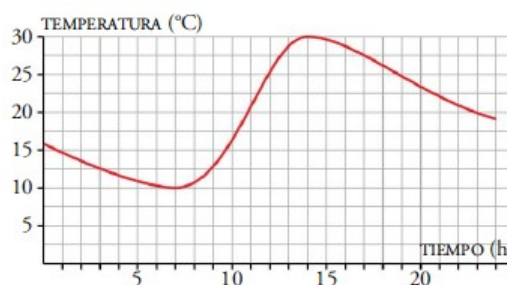
Crecimiento y decrecimiento

7.- La gráfica de la derecha da la temperatura en Jaca a lo largo de un día.

a) Indica los intervalos de tiempo en los que crece la temperatura y aquellos dónde decrece.

b) ¿Por qué crees que se producen esos aumentos y disminuciones de temperatura en esos tramos?

c) ¿Crees que en la ciudad es verano o invierno? Justifícalo.

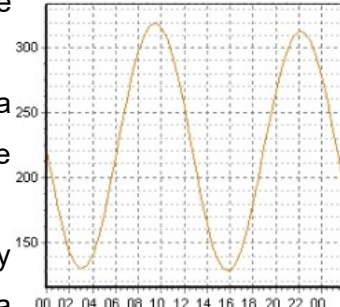


8.- En el gráfico se representa la altura del nivel del mar en el puerto de A Coruña a lo largo del día 17 de enero de 2008.

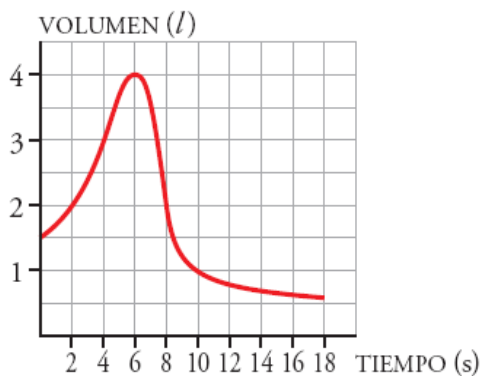
a) ¿A qué hora se alcanzan los máximos?, ¿y los mínimos?, ¿qué altura alcanza el nivel del mar en cada caso?

b) ¿En qué intervalos del día la función es creciente, esto es, sube la marea? ¿Entre qué horas el nivel del mar se mantiene por encima de los 300cm?, ¿y por debajo de los 150 cm?

c) ¿Qué tiempo transcurre entre dos mareas altas consecutivas? ¿y entre dos mareas bajas consecutivas también? ¿A qué hora del día siguiente se producirá la siguiente pleamar?



9.- Para medir la capacidad espiratoria de los pulmones, se hace una prueba que consiste en inspirar al máximo y, después, espirar tan rápido como se pueda en un aparato llamado espirómetro. Esta curva indica el volumen de aire que entra y sale de los pulmones.



a) ¿Cuál es el volumen en el momento inicial?

b) ¿Cuánto tiempo duró la observación?

c) ¿Cuál es la capacidad máxima de los pulmones de esta persona?

d) ¿Cuál es el volumen a los 10 segundos de iniciarse la prueba? ¿Y cuándo termina?

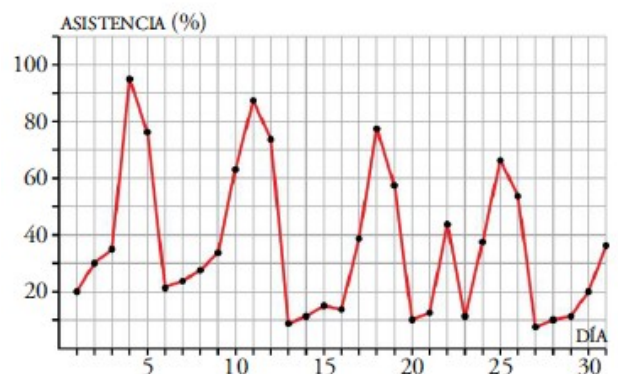
10.- La siguiente gráfica muestra el porcentaje de ocupación de unos multicines en una ciudad a lo largo de un determinado mes:

a) ¿en qué días caen los fines de semana? ¿Cómo puedes saberlo?

b) ¿Qué día ha haido más espectadores? ¿Y menos? ¿Qué días de la semana son?

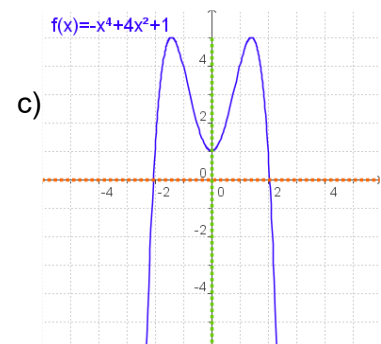
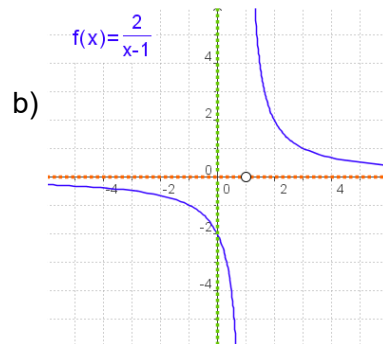
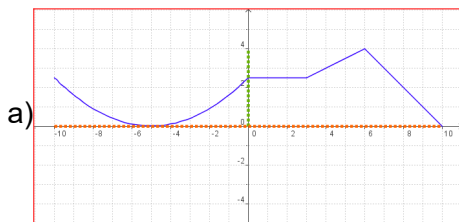
c) ¿Cuántos máximos y cuántos mínimos relativos tiene la gráfica de la función?

d) Hubo un día entre semana que fue festivo ¿De qué día se trata?



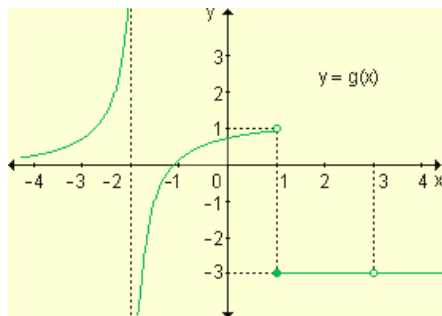
Analizar funciones

11.- Indica el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

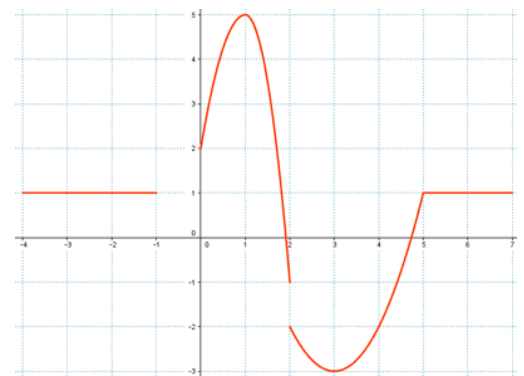


12.- Indica si las gráficas siguientes son continuas, o discontinuas, indicando el tipo de discontinuidad, y los intervalos de continuidad:

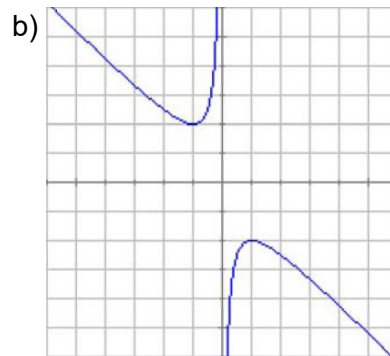
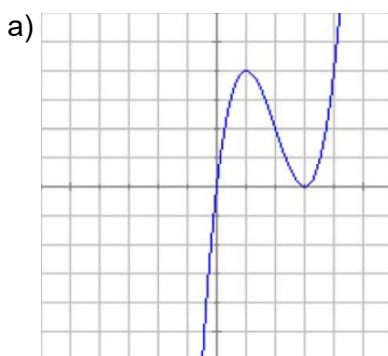
a)



b)



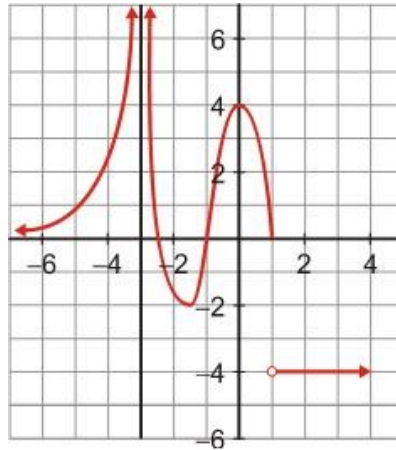
13.- Calcula de ambas gráficas



- Dominio y recorrido
- Intervalos de continuidad y tipos discontinuidades
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento
- Máximos y mínimos
- ¿Son periódicas?

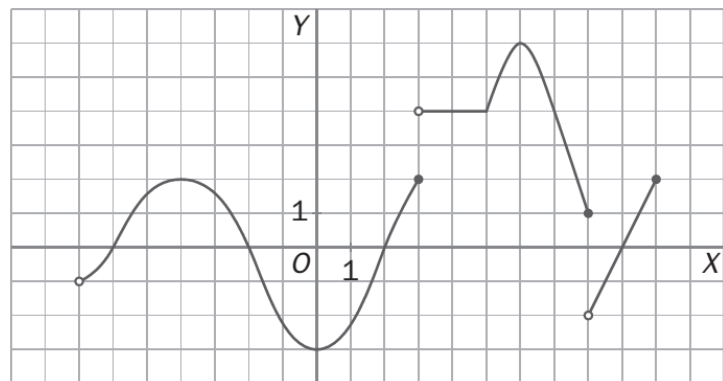
14.- Calcula:

- Dominio y recorrido.
- Calcula $f(-4)$, $f(4)$ y $f(8)$.
- Continuidad y discontinuidades
- Cortes con los ejes.
- Crecimiento y decrecimiento.
- Máximos y mínimos relativos.
- ¿Son simétricas? ¿Son periódicas?



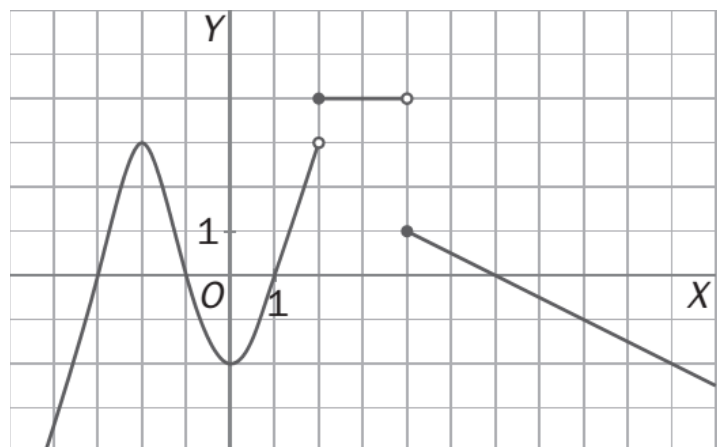
15.- Observa la gráfica y estudia las siguientes propiedades:

- Dominio y recorrido.
- Calcula $f(-4)$, $f(4)$ y $f(8)$.
- Continuidad y discontinuidades
- Cortes con los ejes.
- Crecimiento y decrecimiento.
- Máximos y mínimos relativos.
- ¿Es simétrica? ¿Es periódica?



16.- Observa la gráfica y estudia las siguientes propiedades:

- Dominio y recorrido.
- Calcula $f(2)$, $f(4)$ y $f(0)$.
- Continuidad y discontinuidades
- Cortes con los ejes.
- Crecimiento y decrecimiento.
- Máximos y mínimos relativos.
- ¿Son simétricas? ¿Son periódicas?



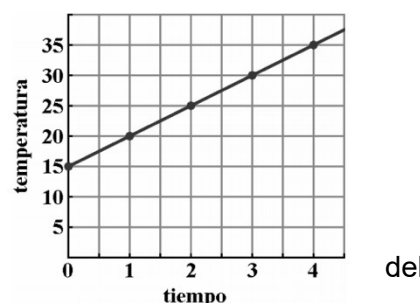
FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

1. Representa las siguientes funciones:

- a. $y = 2x - 1$ c. $y = \frac{1}{2}x - 2$ e. $y = -2$
 b. $y = \frac{-3}{2}x + 3$ d. $y = -3x$ f. $y = -5x - 4$

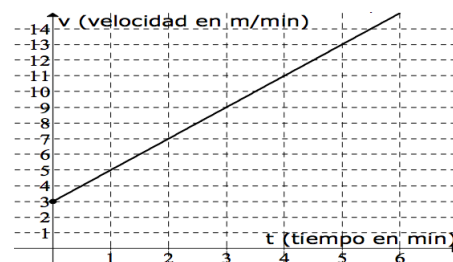
2. Se ha medido la temperatura de un gas a medida que se calentaba y se ha obtenido la siguiente gráfica:

- a. Indica si la función es afín, lineal o constante.
 b. Calcula la pendiente m de la recta.
 c. Indica la ordenada en el origen, n .
 d. Escribe la fórmula de la función.
 e. Calcula la temperatura del gas a los 10 minutos.



3. La siguiente gráfica representa la velocidad en función del tiempo:

- a. Calcula la pendiente m de la recta.
 b. Indica cuál es la ordenada en el origen.
 c. Halla la fórmula de la función.
 d. Determina la velocidad al cabo de 35 min.
 e. ¿Al cabo de cuánto tiempo la velocidad es de 123 m/min?



4. Sara ha tenido que llamar al fontanero para que revise una gotera que tiene el cuarto de baño. El fontanero cobra 20 € por desplazamiento y 15€ por hora de trabajo.
- Haz la tabla de valores de a función tiempo-coste para 0, 1, 2 y 3 horas.
 - Dibuja la gráfica de la función.
 - Calcula la pendiente de la recta e indica la ordenada en el origen.
 - Halla la fórmula de la función.
 - Determina el coste para 7 horas y media de trabajo.
 - Usando la fórmula anterior, ¿cuántas horas ha trabajado el fontanero si ha cobrado 110€?
5. Un bidón se vacía a razón de 3 litros cada 5 minutos. Al principio tiene 24 litros
- Completa la siguiente tabla de valores de la función tiempo-litros para los valores 0, 5, 10 y 15 minutos
 - Dibuja la gráfica de la función
 - Calcula la pendiente de la recta y la ordenada en el origen.
 - Halla la fórmula de la función.
6. Un sastre, por hacer un traje cobra 15€ fijos más 10€ por cada metro de tela que utilice.
- Completa la tabla:
 - Halla la pendiente e indica cuál es la ordenada en el origen.
 - Escribe la fórmula de la función.
 - Si el sastre ha cobrado 65€ ¿cuántos metros de tela ha utilizado?

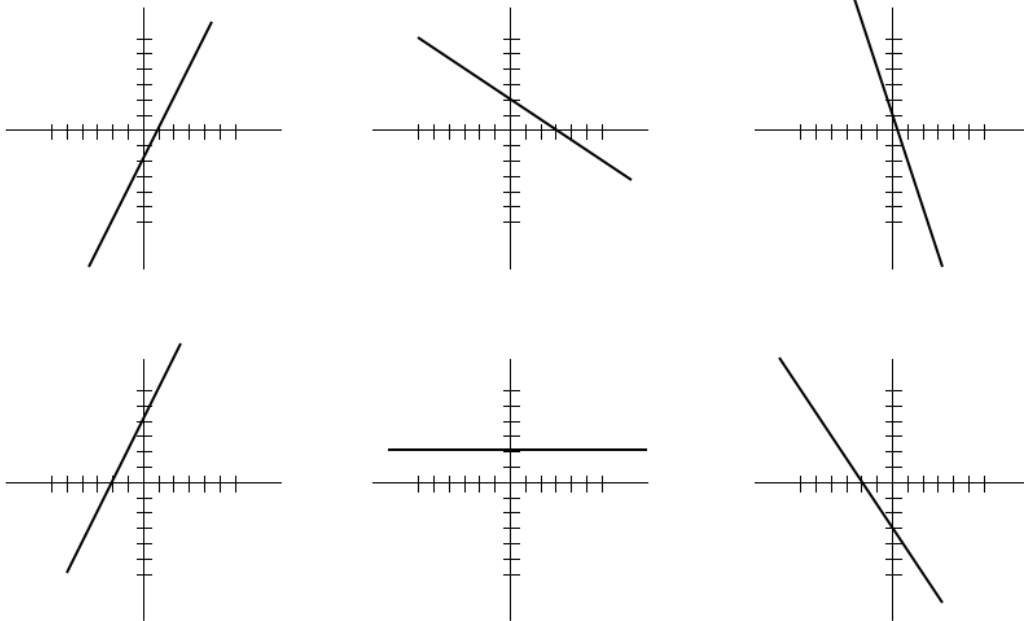
Metros de tela	0	1	2	3
Precio (€)				

7. Juan tiene que enviar un paquete y para ello comparan las tarifas de dos empresas de mensajería: La empresa A cobra 4€ fijos más 10 céntimos de euro por kilogramo. La empresa B cobra 4,50€ fijos más 8 céntimos de euro por kilogramo.
- Obtén en cada caso la fórmula de la función que relaciona x (número de kg) con y (coste envío).
 - Representa gráficamente las dos funciones en los mismos ejes de coordenadas.
 - Si el paquete pesa 35 kg, ¿qué empresa elegirías?
 - ¿Cuánto tendría que pesar el paquete para que ambas empresas cobraran lo mismo?
8. La altura inicial de un líquido contenido en una probeta es 18 cm. Es muy volátil y al evaporarse baja el nivel a razón de 3 cm cada 2 días.
- x representa el nº de días e y la altura del líquido en cm, construye una tabla de valores para $x = 0, 2$ y 4 .
 - Halla la fórmula de la función que expresa la altura del líquido (y) según el número de días (x).
 - Dibuja la gráfica de la función.
 - ¿Cuánto tiempo debe pasar para que desaparezca el líquido?
9. Dos depósitos de agua iguales, A y B, tienen una capacidad para 21 litros. El depósito A está lleno y se vacía a razón de 2 litros/min. El depósito B está vacío y se llena con una velocidad de 1,5 litros /min. Considera la función que relaciona las variables x = tiempo en minutos e y = volumen en litros.
- Completa la tabla:

x	0	2	4	6	8	10
y (depósito A)						
y (depósito B)						

- Haz la gráfica de las dos funciones utilizando los datos de la tabla y los mismos ejes de coordenadas.
- ¿En qué minuto tienen la misma cantidad de agua? ¿Qué cantidad tienen en ese instante?
- ¿Cuánto tiempo tarda en vaciarse el depósito A? ¿Y en vaciarse el B?
- Cuándo el depósito A está vacío, ¿cuántos litros tiene el depósito B?

10. Averigua la pendiente de las siguientes rectas y escribe sus ecuaciones:



11. Escribe la ecuación punto-pendiente de las siguientes rectas:

- Tiene pendiente 3 y pasa por el punto A(3, -2)
- Tiene pendiente -2 y pasa por el punto B(-2, 1)
- Tiene pendiente 0 y pasa por el punto C(-3, -4)

12. Escribe la ecuación de las siguientes rectas:

- Pasa por el punto P(2, -4) y Q(5, 3)
- Pasa por el punto P(-3, -2) y Q(4, 6)
- Pasa por el punto P(-2, 4) y Q(-6, 4)

13. Al apuntarnos a un gimnasio, hemos tenido que pagar una cantidad fija en concepto de matrícula. Después tendremos que ir pagando las mensualidades. Si estamos 6 meses, nos cuesta en total 246€, y si estamos 15 meses, nos costará 570€. Calcula cuánto nos gastaríamos en total si estuviéramos yendo durante un año.

13.1. Escribe la ecuación de la recta que:

- es paralela a la recta $y=2x-1$ y que pasa por el punto (-1, 2)
- es paralela a la recta que pasa por los puntos A(2, 3) y B(-1, -2) y pasa por el punto C(3, 1)

14. Representa las siguientes parábolas:

- $y = -2x^2 - 4x + 3$
- $y = x^2 + 1$
- $y = 1/2x^2 - x$
- $y = -2x^2 + 4x$
- $y = -x^2 - 2x + 3$
- $y = x^2 - 2x + 1$

15. La temperatura y , en $^{\circ}\text{C}$, que adquiere una pieza sometida a un proceso de calentamiento viene dada en función del tiempo x , en horas, por la función $y = 40x - 10x^2$.
- Calcula el vértice de la parábola.
 - Halla los puntos de corte con el eje X
 - Dibuja la gráfica
 - Indica en qué momento alcanza la temperatura máxima y cuál es esa temperatura.
 - Indica a qué horas la temperatura de la pieza son 0°C .
 - ¿En qué momentos la temperatura es de 30°C ?
16. Se lanza una pelota desde el suelo hacia arriba. Se sabe que la altura que alcanza viene dada por la función $y = 20x - 5x^2$, siendo x el tiempo en segundos e y la altura en metros.
- Calcula el vértice de la parábola.
 - Halla los puntos de corte con el eje X .
 - Dibuja la gráfica.
 - Indica en qué momento alcanza la altura máxima y cuál es esa altura.
 - Indica en qué segundos la altura de la pelota es 0.
 - ¿En qué momentos la pelota está a 6 m de altura?