

UD1: NÚMEROS Y OPERACIONES

APARTADO 1: NÚMEROS ENTEROS. OPERACIONES

El **conjunto de los números naturales** $\mathbb{N}$, está formado por los números positivos, que usamos para contar $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,\dots\}$

El **conjunto de los números enteros** $\mathbb{Z}$, está formado por los números positivos, el cero y los números negativos $\mathbb{N}=\{\dots-2,-1,0,1,2,\dots\}$

1.1- SUMA Y RESTA DE NÚMEROS ENTEROS

En las operaciones los números negativos se escriben entre paréntesis, no podemos poner dos signos juntos. Ejemplo: $5 + (-2)$.

- Cuando los números tienen el **mismo signo**: se **suman** los valores absolutos y se pone el mismo signo que tenían los números.

$$3 + 4 = 7$$

$$5 + 3 = 8$$

$$6 + 7 = 13$$

$$-3 - 4 = -7$$

$$-4 - 8 = -12$$

$$-9 - 1 = -10$$

- Cuando los dos números tienen **distinto signo**: se **restan** los valores absolutos (al más grande se le resta el más pequeño) y se pone el signo del que tiene mayor valor absoluto.

$$-3 + 5 = 2$$

$$-3 + 10 = 7$$

$$-8 + 5 = -3$$

$$3 - 4 = -1$$

$$3 - 8 = -5$$

$$10 - 8 = 2$$

Para hacer sumas y restas con más de dos números podemos:

- Ir operando paso a paso, en el orden en el que aparecen los números de la expresión

$$2 - 7 + 6 - 3 = -5 + 6 - 3 = 1 - 3 = -2$$

- Sumar los positivos por un lado y los negativos por otro, y después se resta el resultado.

$$2 - 7 + 6 - 3 = 8 - 10 = -2$$

1.2- Sumas y restas con paréntesis

- Para **sumar** un número entero **se quita el paréntesis** y se deja el signo del propio número.

$$+ (+5) = 5$$

$$+ (+10) = 10$$

$$3 + (+4) = 3 + 4 = 7$$

$$+ (-5) = -5$$

$$+ (-10) = -10$$

$$-3 + (-4) = -3 - 4 = -7$$

- Para **restar** un número entero, **se quita el paréntesis** y se le pone al número el **signo contrario**

$$-(+5) = -5$$

$$-(+10) = -10$$

$$-3 - (-5) = -3 + 5 = 2$$

$$-(-5) = +5$$

$$-(-10) = +10$$

$$3 - (+4) = 3 - 4$$

1.3- Sumas y restas dentro de paréntesis

- Al sacar un paréntesis precedido del **signo +**, los signos de los sumandos dentro del paréntesis quedan como están, no cambian.

$$+(+5 - 4 + 9) = +5 - 4 + 9$$

$$+(-1 + 6 - 3) = -1 + 6 - 3$$

- Al sacar un paréntesis precedido del **signo -**, los signos de los sumandos dentro del paréntesis se cambian por el opuesto.

$$-(+5 - 4 + 9) = -5 + 4 - 9$$

$$-(-1 + 6 - 3) = +1 - 6 + 3$$

1.4- MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE ENTEROS

- Producto** de dos números **positivos**: es **positivo**

$$(+5) \cdot (+4) = +20$$

$$(+3) \cdot (+6) = +18$$

$$(+2) \cdot (+7) = +14$$

- Producto** de un número **positivo** por otro **negativo**: es **negativo**

$$(+5) \cdot (-4) = -20$$

$$(+3) \cdot (-6) = -18$$

$$(+2) \cdot (-7) = -14$$

- Producto** de un número **negativo** por otro **positivo**: es **negativo**

$$(-5) \cdot (+4) = -20$$

$$(-3) \cdot (+6) = -18$$

$$(-2) \cdot (+7) = -14$$

- Producto** de dos números **negativos**: es **positivo**: es **negativo**

$$(-5) \cdot (-4) = +20$$

$$(-3) \cdot (-6) = +18$$

$$(-2) \cdot (-7) = +14$$

Los signos en la división son igual que en el producto, Como resumen, para multiplicar o dividir números enteros vamos a seguir las siguientes reglas de signos:



1.5- OPERACIONES COMBINADAS

En las **operaciones combinadas** con enteros, igual que con las de naturales, debemos seguir los siguientes pasos:

1º Paréntesis y corchetes

2º Productos y divisiones

3º Sumas y restas

- $20 - (9 - 12) \cdot (+4) = 20 - (-3) \cdot (+4) = 20 - (-12) = 20 + 12 = 32$
- $[8 - (-6)] : (+7) + (-9) = (8 + 6) : (+7) + (-9) = (+14) : (+7) + (-9) = (+2) + (-9) = +2 - 9 = -7$
- $18 - (-2) \cdot [(+15) : (8 - 11)] = 18 - (-2) \cdot [(+15) : (-3)] = 18 - (-2) \cdot (-5) = 18 - (+10) = 18 - 10 = 8$

1.6- POTENCIAS DE NÚMEROS ENTEROS

Una **potencia** es una forma abreviada de expresar una multiplicación de factores iguales. a^n es una potencia dónde a es la base y n es el exponente $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}}$

Vemos algunos ejemplos: $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$, $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ y $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

Al elevar un número negativo a una potencia:

- Si el **exponente es par**, el resultado es **positivo** $(-a)^{\text{par}} \rightarrow \text{positivo}$
 $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$, $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$
- Si el **exponente es impar**, el resultado es **negativo** $(-a)^{\text{impar}} \rightarrow \text{negativo}$
 $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$, $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$

1.7- Propiedades de las potencias

Propiedad		Ejemplo
Potencia de un producto	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(3 \cdot 2)^5 = 3^5 \cdot 2^5$
Potencia de un cociente	$(a : b)^n = a^n : b^n$	$(6 : 2)^5 = 6^5 : 2^5$
Producto de potencias con la misma base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^4 \cdot 2^7 = 2^{4+7} = 2^{11}$
Cociente de potencias con la misma base	$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$2^4 : 2^7 = 2^{4-7} = 2^{-3}$
Potencias de exponente cero	$a^0 = 1$	$8^0 = 1$
Potencia de otra potencia	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(3^5)^2 = 3^{5 \cdot 2} = 3^{10}$

APARTADO 2: NÚMEROS RACIONALES. OPERACIONES

Los **números racionales** son todos aquellos que pueden escribirse **en forma de fracción**, por tanto, incluye **todos los que ya están escritos en forma de fracción**, pero también todos los **números naturales**, **enteros** y **decimales** (siempre que puedan escribirse en forma de fracción, es decir: **decimales exactos**, **decimales periódicos puros** y **decimales periódicos mixtos**)

2.1- FRACCIONES

Una **fracción** es un cociente indicado de dos números enteros. El **denominador** indica el número de partes iguales en que se divide la unidad. El **numerador** indica el número de partes que se toman de la unidad.

$\frac{a}{b}$ dónde a es el numerador y b el denominador.

Ejemplos: $\frac{4}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}$

Para leer una fracción, se lee primero el numerador y luego el denominador. Si el denominador es menor o igual que 10 se leen medios, tercios, cuartos, ..., décimos. Si el denominador es mayor que 10 se lee el numerador y luego el denominador seguido de la terminación –avos.

Ejemplos: $\frac{4}{3}$: cuatro tercios, $\frac{1}{2}$: un medio, $\frac{5}{11}$: cinco onceavos

2.2- Interpretaciones de una fracción

- **Fracción como partes de un todo:**

En una fracción el denominador indica las partes iguales en las que se divide la unidad y el numerador las partes que se toman.

Ejemplos: $\frac{3}{4}$ indica que dividimos la unidad en 4 y cogemos 3.

- **Fracción como proporción:**

Ejemplos: Si en una clase 2 de cada 3 estudiantes aprueban $\rightarrow$ aprueban $\frac{2}{3}$

Si tengo 20€ y gasto 3€, me he gastado $\frac{3}{20}$ de mi dinero y me quedan $\frac{17}{20}$

- **Fracción de una cantidad:**

Para calcular la fracción de una cantidad dividimos entre el denominador y el resultado lo multiplicamos por el numerador. También se puede hacer primero el producto y en segundo lugar, el cociente:

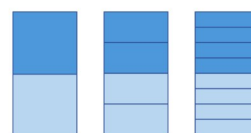
Ejemplos: $\frac{2}{3}$ de 12 = $12 : 3 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$ $\frac{2}{3}$ de 12 = $12 \cdot 2 : 3 = 24 : 3 = 8$

2.3-FRACCIONES EQUIVALENTES. AMPLIFICACIÓN Y SIMPLIFICACIÓN

Dos fracciones son **equivalentes** cuando representan la misma cantidad. Diremos que dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si $a \cdot d = b \cdot c$

Ejemplo: $\frac{2}{4}$ y $\frac{1}{2}$ son fracciones equivalentes

Podemos comprobar que $2 \cdot 2 = 4 \cdot 1$



$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

- **Amplificación de fracciones:** amplificar una fracción es obtener otra fracción equivalente multiplicando numerador y denominador por un mismo número entero distinto de cero. $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$

- **Simplificación de fracciones:** simplificar una fracción es obtener una fracción equivalente dividiendo numerador y denominador por un mismo divisor común.

$$\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$$

- Una fracción que no se puede simplificar se llama **irreducible**.

2.4- REDUCCIÓN A COMÚN DENOMINADOR

- Para comparar, sumar y restar fracciones, tenemos que buscar fracciones equivalentes con el mismo denominador. Para **reducir fracciones a común denominador**, tenemos que calcular el mínimo común múltiplo de los denominadores y después multiplicar los dos miembros de cada fracción por el número que resulta de dividir el mínimo común múltiplo entre el denominador correspondiente.

Ejemplo: Queremos reducir a común denominador las fracciones: $\frac{7}{12}$, $\frac{13}{30}$ y $\frac{11}{20}$

- Primero calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores $mcm(12, 30, 20)$, para ello factorizamos estos números y escogemos los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

$$\underbrace{12=2^2 \cdot 3, 30=2 \cdot 3 \cdot 5, 20=2^2 \cdot 5}_{mcm(12,30,20)=2^2 \cdot 3 \cdot 5=60}$$

- Ahora en cada fracción, multiplicamos numerador y denominador, por el número adecuado para obtener 60 en el denominador y de esta forma conseguir las fracciones equivalentes a las iniciales con denominador común 60:

$$\frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{35}{60}, \quad \frac{13}{30} = \frac{13 \cdot 2}{30 \cdot 2} = \frac{26}{60}, \quad \frac{11}{20} = \frac{11 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{33}{60}$$

- Para **ordenar fracciones** debemos tener en cuenta:
 - Si las fracciones tienen el **mismo denominador**, es menor la que tiene menor numerador.

Ejemplo: $\frac{1}{4} < \frac{3}{4}$

- Si las fracciones tienen el **mismo numerador**, es menor la que tiene el mayor denominador.

Ejemplo: $\frac{2}{5} < \frac{2}{3}$

- Cuando las fracciones **no** tengan el **mismo numerador ni el mismo denominador**, las reduciremos a común denominador para poder compararlas.

Ejemplo: Queremos ordenar las fracciones del ejemplo del apartado anterior:

$$\frac{7}{12}, \quad \frac{13}{30} \quad \text{y} \quad \frac{11}{20}. \quad \text{Una vez que las tenemos reducidas a común}$$

denominador, ya podemos ordenar las fracciones $\frac{26}{60} < \frac{33}{60} < \frac{35}{60} \rightarrow \frac{13}{30} < \frac{11}{20} < \frac{7}{12}$

2.5- OPERACIONES CON FRACCIONES

Vamos a ver como realizar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con fracciones.

2.5.1- Suma y resta de fracciones

- Si las fracciones tienen el **mismo denominador**, se mantiene el denominador y se suman o restan los numeradores.

Ejemplos: $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5} \quad \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

- Si las fracciones tienen **diferente denominador**, se reducen a común denominador y luego sumamos o restamos los numeradores.

Ejemplos: $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

- NOTA.- Si aparece un **número entero**, lo sustituimos por su fracción equivalente.

Ejemplo: $2 = \frac{2}{1}$ por lo tanto, $2 + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{2}{1} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{12}{6} + \frac{1}{6} - \frac{2}{6} = \frac{11}{6}$

2.5.2- Multiplicación de fracciones

- Para multiplicar fracciones, se realiza el producto en línea (numerador por numerador y denominador por denominador): $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Ejemplo: $\frac{6}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

- Potencia de una fracción, si elevamos una fracción a un número entero n , se elevan numerador y denominador $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Ejemplo: $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$

2.5.3- División de fracciones

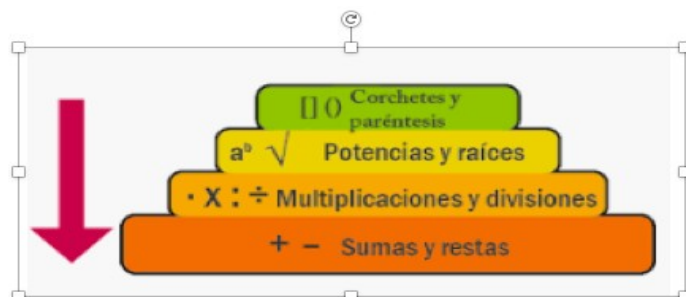
- La inversa de una fracción $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$

Ejemplo: La fracción inversa de $\frac{6}{4}$ es $\frac{4}{6}$

- El cociente de dos fracciones es el producto de la primera por el inverso de la segunda. También se puede calcular multiplicando en cruz: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

2.6- Operaciones combinadas con fracciones

- Para realizar operaciones combinadas con fracciones seguimos el mismo orden que vimos para números enteros:



2.7- Potencia de exponente entero

Para calcular la potencia de una fracción, elevamos el numerador y el denominador al exponente de la fracción.

Ejemplo: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

También podemos tener potencias cuyo exponente sea negativo: 3^{-2} 4^{-15} $(-2)^{-5}$

Propiedad	Ejemplo
$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$3^{-1} = \frac{1}{3}$
$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$	$3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1^2}{3^2} = \frac{1}{9}$

APARTADO 3: NÚMEROS DECIMALES

3.1- Números decimales

Para expresar cantidades comprendidas entre dos números enteros, utilizamos los **números decimales**. Un número decimal se compone de una parte entera, situada a la izquierda de la coma (unidades, decenas, centenas...) y una parte decimal, situada a la derecha de la coma (décimas, centésimas, milésimas...)



Una unidad $\rightarrow 1$.

Una centésima $\rightarrow 0,01$.

Una diezmilésima $\rightarrow 0,0001$.

Una millonésima $\rightarrow 0,000001$.

Una décima $\rightarrow 0,1$.

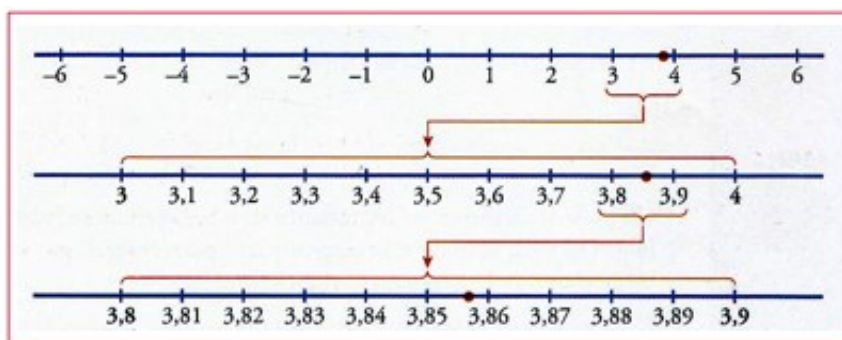
Una milésima $\rightarrow 0,001$.

Una cienmilésima $\rightarrow 0,00001$.

- Para **leer** un número decimal se lee la parte entera y después la parte decimal seguida del orden de unidades que corresponde a la última cifra decimal.

Ejemplo: 12,074 doce unidades y 74 milésimas.

- Para **representar** un número decimal en la recta real, procedemos igual que con los números naturales y los enteros, teniendo en cuenta que los decimales se colocan de forma aproximada entre dos enteros.



Entre dos números enteros podemos encontrar infinitos números decimales, y a su vez, entre dos números decimales hay infinitos decimales.

- Para **ordenar** dos números decimales comparamos cifra a cifra las unidades del mismo orden, comenzando por la izquierda. En el momento que se comparen dos cifras distintas será mayor el número cuya cifra sea mayor.

Ejemplo: $35,20 < 37,20$ $4,35 > 4,345$

3.2- APROXIMACIÓN DE NÚMEROS DECIMALES

Cuando tenemos números con muchas cifras decimales resultan incómodos y vamos a sustituirlos por otros más manejables de valor aproximado:

- **Truncamiento:** truncar un número a un cierto orden consiste en eliminar las cifras de órdenes inferiores.

Truncar	Décima	Centésima	Milésima
3,14159	3,1	3,14	3,141

- **Redondeo:** redondear un número a un cierto orden consiste en truncar el número a ese orden y sumarle uno a la última cifra cuando la primera cifra suprimida sea mayor o igual que 5.

Redondear	Décima	Centésima	Milésima
3,14159	3,1	3,14	3,142

3.3- OPERACIÓN NÚMEROS DECIMALES

- **Sumar y restar:** para sumar o restar números decimales, estos se colocan en columna haciendo coincidir los órdenes de las unidades correspondientes.

$$124,6 + 45,802 + 4,18$$

$$\begin{array}{r} 124,600 \\ 45,802 \\ + 4,180 \\ \hline 174,582 \end{array}$$

$$3,4 - 1,987$$

$$\begin{array}{r} 3,400 \\ - 1,987 \\ \hline 1,413 \end{array}$$

- **Multiplicar:** para multiplicar dos números decimales, se multiplica como si fueran enteros, y después se separan en el producto las cifras decimales de ambos factores.

$$\begin{array}{r} 6,815 \leftarrow 3 \text{ cifras decimales} \\ \times 3,08 \leftarrow 2 \text{ cifras decimales} \\ \hline 54520 \\ 20445 \\ \hline 20,99020 \leftarrow 5 \text{ cifras decimales} \end{array}$$

- Para pasar de **fracción a decimal** se divide numerador entre denominador. En algunos casos al realizar la división obtenemos una o varias cifras decimales que se repiten indefinidamente. Estas cifras forman el período.

Para escribir de forma abreviada los números decimales periódicos colocamos un arco sobre la o las cifras que forman el período.

Ejemplo: $\frac{1}{3} = 0,33333333... = 0, \hat{3}$ $\frac{37}{45} = 0,8222... = 0,8\hat{2}$

- Para pasar de decimal a fracción : los números decimales exactos y decimales periódicos pueden escribirse en forma de fracción:

a) Para obtener la **fracción generatriz de un número decimal exacto** escribimos en el numerador el número sin las comas y en denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número decimal.

Ej: $1,25 = \frac{125}{100} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$

b) Para obtener la **fracción generatriz de un número decimal periódico puro** escribimos en el numerador el número sin coma ni período y le restamos el trozo de número hasta llegar al período. En denominador, tantos 9 como cifras haya debajo del período.

Ej: $12,3333... = 12, \hat{3} = \frac{123-12}{9} = \frac{111}{9} = \frac{37}{3}$

c) Para obtener la **fracción generatriz de un número decimal periódico mixto** escribimos en el numerador el número sin coma ni período y le restamos el trozo de número hasta llegar al período. En denominador, tantos 9 como cifras haya debajo del período seguidos de tantos 0 como cifras haya en el anteperíodo (entre la coma y el período)

Ej: $12,423333... = 12,42 \hat{3} = \frac{12423-1242}{900} = \frac{11181}{900} =$

APARTADO 4: RAÍCES Y RADICALES

4.1- RAÍCES Y RADICALES

La **raíz cuadrada** es la operación inversa de elevar al cuadrado: $\sqrt{a}=b \Leftrightarrow b^2=a$

La raíz cuadrada de un número tiene dos soluciones, la negativa y la positiva, $\sqrt{9}=3$ y $\sqrt{9}=-3$ ya que $3^2=(-3)^2=9$

4.2- Raíces n- ésimas

- Raíces cuadradas: $\sqrt{9}=3$
- Raíces **cúbicas**: $\sqrt[3]{8}=2$ ya que $2^3=8$
- **Otras** raíces: de la misma forma se pueden hacer raíces de índice superior a 3
Como $2^5=32$ entonces $\sqrt[5]{32}=2$

De forma general: $\sqrt[n]{a}=b \Leftrightarrow b^n=a$

En la expresión $\sqrt[n]{a}$, a n se le llama índice de la raíz, a a radicando, y toda la raíz radical.

Número de raíces

$a > 0 \rightarrow$	n par : 2 raíces n impar : 1 raíz	$a < 0 \rightarrow$	n par : no solución n impar : 1 raíz	$a = 0 \rightarrow$	1 solución
---------------------	--	---------------------	---	---------------------	------------

4.3- Propiedades de los radicales

Propiedad		Ejemplo
Relación entre potencias y radicales	$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ y $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[3]{2^8}=2^{\frac{8}{3}}$
Simplificación de radicales	$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n:d]{a^{m:d}}$	$\sqrt[20]{7^4}=\sqrt[20:4]{7^{4:4}}=\sqrt[5]{7}$
Producto de radicales	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a \cdot b}$	$\sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{21}$
División de radicales	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt[7]{20}}{\sqrt[7]{5}}=\sqrt[7]{4}$
Potencia de un radicales	$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$	$(\sqrt[7]{13})^2=\sqrt[7]{13^2}$
Raíz de un radical	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m \cdot n]{a}$	$\sqrt[6]{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[18]{2}$

4.4- Operaciones con radicales

- Para **sumar o restar** radicales estos deben tener el mismo índice y radicando. En ese caso, se suman o restan los coeficientes y se deja la misma raíz.

$$3\sqrt[5]{2} - 8\sqrt[5]{2} + 4\sqrt[5]{2} = -\sqrt[5]{2}$$

- Para **multiplicar o dividir** radicales, o bien deben tener el mismo índice, o bien el mismo radicando.

➤ Mismo índice: $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{6} = \sqrt[5]{12}$

➤ Mismo radical: $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[10]{2} = 2^{\frac{1}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{10}} = 2^{\frac{1}{5} + \frac{1}{10}} = 2^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{2^3}$

- Extracción de factores fuera de la raíz**: Si el radicando descompuesto en factores tiene potencias de exponente igual o superior al índice de la raíz

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

RELACIÓN POTENCIAS Y RAÍCES

Propiedad de las potencias		Propiedades de los radicales	
Potencia de un producto	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	Producto de radicales con el mismo índice	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
Potencia de un cociente	$(a : b)^n = a^n : b^n$	División de radicales con el mismo índice	$\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$
Producto de potencias con la misma base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	Producto de radicales con el mismo radicando	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}$
Cociente de potencias con la misma base	$a^m : a^n = a^{m-n}$	División de radicales con el mismo radicando	$\sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} : a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}}$
Potencia de otra potencia	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	Radical de un radical	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

UD 2: NÚMEROS Y OPERACIONES

APARTADO 1: NÚMEROS NATURALES Y ENTEROS. OPERACIONES

1. Realiza las siguientes operaciones, paso a paso:

$$2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 - 2 \cdot 4$$

$$10 \cdot (3 + 8 - 6)$$

$$(4 + 8 - 3 + 5) \cdot 4 + 2$$

$$(6 + 8) : 2 + 18 : (5 + 4)$$

$$8 + (10 - 15 : 3) + 3 \cdot 4 - 6$$

$$6 \cdot 3 - (2 + 5 \cdot 2) + (5 \cdot 3 - 8) - 1$$

2. Calcula el resultado de las siguientes operaciones combinadas:

a) $8 \cdot 3 : 4 : (10 : 2 - 4) + 20$

b) $(16 - 3 \cdot 4) + (15 - 15 : 3) - 20 : 2 - 8$

c) $4 \cdot 2 \cdot 5 : 10 + (12 + 5 \cdot 3) - 6 \cdot 5$

d) $(3 \cdot 4 + 4 \cdot 5) - (12 : 3 + 20 : 4) + 2 \cdot 5 - 6$

e) $4 \cdot (9 - 3) + 5 \cdot (12 - 7)$

f) $17 - 3 \cdot (8 - 4) + 54 : 2$

3. Calcula prestando atención a los paréntesis:

a) $5 \cdot [3 + 2 \cdot (2 + 5 - 3)] - 10 : 2 : 4$

b) $[(3 + 12 - 5) : 2 - 4 + 2] \cdot (4 + 2 - 1)$

c) $(1 + 7 - 3) \cdot (3 + 2) - 30 : (5 - 2 + 3)$

d) $4 \cdot [3 + 6 \cdot (5 + 3 - 6)] - 3 \cdot (5 - (1 + 2))$

4. Un camión transporta 23 400 botellas. A causa de un accidente se le rompen la tercera parte de las botellas. ¿Cuántos envases de 12 botellas serán necesarios para recoger las que no se han dañado?

5. Comprueba la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma o la resta realizando las siguientes operaciones de 2 formas distintas:

a) $3 \cdot (5 - 2)$

b) $(7 + 2) \cdot 4$

- c) $5 \cdot (8+3)$
- d) $12 \cdot (4+6)$
- e) $(14-8) \cdot 2$

6. Expresa estos datos utilizando números enteros:

- a) Luis debe 55 € a Laura.
- b) El pueblo está a nivel del mar.
- c) El agua hierve a 100°C
- d) La fosa de las Marianas tiene unos 11 000 m de profundidad.
- e) Tengo el coche aparcado en el segundo sótano.

7. a) Representa en la recta numérica: 0, +4, +4, -5, -3, +3.
b) Escribe en tu cuaderno los números representados



8. Ordena las temperaturas siguientes de las más alta a la más baja :
 12°C , -3°C , 18°C , 0°C , -6°C , 5°C , -8°C , 24°C

9. Los números 5 y -5 son opuestos.

- a) Halla sus valores absolutos.
- b) ¿A qué distancia está cada uno de cero?
- c) ¿A qué distancia se encuentra el 5 del -5?

10. Halla todos los números enteros a que cumplan que $|a| < 4$

11. Calcula:

- | | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| (a) $-5+3$ | (b) $-15+20$ | (c) $-6-3$ | (d) $-13+10$ |
| (e) $-16+5$ | (f) $+20+35$ | (g) $-24+14$ | (h) $-15+32$ |
| (i) $-7+7$ | (j) $-24+13$ | (k) $-35+5$ | (l) $+12-24$ |
| (m) $-27-15$ | (n) $-27+17$ | (o) $+6-11$ | (p) $-14+14$ |
| (q) $2-6$ | (r) $-16-4$ | (s) $-21-9$ | (t) $-35-15$ |

12. Realiza las siguientes sumas quitándole los paréntesis previamente:

- | | | | |
|------------------|------------------|------------------|------------------|
| a) $(+8)+(+22)$ | b) $(-16)+(-5)$ | c) $(+11)+(+11)$ | d) $(-13)+(-23)$ |
| e) $(-16)+(+16)$ | f) $(+12)+(-12)$ | g) $(-9)+(+14)$ | h) $(-8)+(+4)$ |

13. Realiza las siguientes restas quitándole los paréntesis previamente:

- | | | | |
|------------------|------------------|------------------|------------------|
| a) $(+8)-(+22)$ | b) $(-16)-(-5)$ | c) $(+11)-(+11)$ | d) $(-13)-(-23)$ |
| e) $(-16)-(+16)$ | f) $(+12)-(-12)$ | g) $(-9)-(+14)$ | h) $(-8)-(+4)$ |

14. Simplifica las expresiones y obtén el resultado

- | | | | |
|------------------|------------------|------------------|-------------------|
| a) $-(5)+(-3)$ | b) $(-35)+(+20)$ | c) $(-6)+(-3)$ | d) $(-13)+(+10)$ |
| e) $(-16)+(-5)$ | f) $(+20)+(+35)$ | g) $(-24)+(+14)$ | h) $(-31)+(-15)$ |
| i) $(-9)+(+9)$ | j) $(-26)+(+13)$ | k) $(-5)+(-15)$ | l) $(+12)-(+26)=$ |
| m) $(-17)+(-25)$ | n) $(-17)+(+25)$ | o) $(+5)+(-11)$ | p) $(-1)+(-1)$ |
| q) $(-4)+(+4)$ | r) $(-16)+(+4)$ | s) $(-9)+(-11)$ | t) $(-25)+(-5)$ |

15. Calcula

- | | | | |
|-----------------------|--------------------------|--------------------------|---------------------------|
| (a) $2+(-3)$ | (b) $(+30)+(+25)$ | (c) $(-56)+(-13)$ | (d) $-13+(-10)$ |
| (e) $-12-4$ | (f) $(+20)-(+35)$ | (g) $-24+(-14)$ | (h) $(+31)+(-15)$ |
| (i) $-9+9=$ | (j) $6+13=$ | (k) $-4-14=$ | (l) $(+10)-(+25)=$ |
| (m) $(-19)-26$ | (n) $(-19)+26$ | (o) $5-(-11)=$ | (p) $-1-(-1)$ |
| (q) $-4-(-4)=$ | (r) $-16+4$ | (s) $-9-11$ | (t) $-25-(-5)$ |

16. Obtén el resultado

- | | | | |
|----------------------|-----------------------|-------------------------|------------------------|
| (a) $-3-5+2$ | (b) $36+6-1$ | (c) $-16+4-9$ | (d) $-9-11-3$ |
| (e) $-25+3-5$ | (f) $-10-5+15$ | (g) $+45+15-25$ | (h) $-78+26+19$ |
| (i) $1-7-10$ | (j) $1+3-(-4)$ | (k) $-(-9)-11-3$ | (l) $-10+8-5+6$ |

(a) $-3-5+2$

(b) $36+6-1$

(c) $-16+4-9$

(d) $-9-11-3$

(m) $21-7+10$

(n) $1-7-(-4)$

(o) $-2-(-7)-11$

(p) $20-5-5$

(q) $-56+14+6$

(r) $-30+30-30$

(s) $8-1+5-2=$

(t) $7-3+3-11-4=$

(u) $-5+4-1+2-7+6=$

(v) $11+3-5+3-4-11+9=$

17. Calcula el resultado, eliminando los paréntesis previamente

a) $-10 - (-3+8)$

(w) $(+30)+(-25)-(+12)-10$

(x) $21-40+7+9-16$

(y) $(-11)-(-9)+(-13)-(-7)$

(z) $+50-(-30)-20+(-10)$

(aa) $-(-13)+(-9)+(-17)$

(ab) $8-7+4-3-2=$

(ac) $6-3-3-10-4+13=$

(ad) $-7-5+3-9-1+11=$

(ae) $-4-2+5-1+4+1=$

(af) $6+(-4+2)-(-3-1)=$

(ag) $7-(4-3)+(-1-2)=$

$$a) -10 - (-3+8)$$

$$(w) (+30)+(-25)-(+12)-10$$

$$(x) 21-40+7+9-16$$

$$(ah) 3+(2-3)-(1-5-7)=$$

$$(ai) -8+(1+4)+(-7-9)=$$

$$(aj) 21-40+7+9-16$$

$$(ak) -(-10-2)-(12-3)=$$

$$(al) -4+(-2)+(-5)-(-6)-(-9)=$$

$$(am) -18-(-4+7)+(-2-5)=$$

$$(an) 6-(+9)-(-5)+(-3)-4-(-1)=$$

18. Realiza las siguientes multiplicaciones y divisiones con enteros:

$$(a) -3 \cdot (-5) \quad (b) (-56) : (-14) \quad (c) -16 : 4 \quad (d) -9 \cdot (-11) \quad (e) -25 : (-5)$$

$$(f) 36 : (+6) \quad (g) (+30) : (+30) \quad (h) (-78) : 26 \quad (i) (+45) : (+15) \quad (j) -10 : (-5)$$

$$(k) +5 \cdot (-4) = \quad (l) -36 : (-12) = \quad (m) -16 : (-16) \quad (n) -16 : (+16) \quad (o) -16 : (-1)$$

$$(p) -2 \cdot (-3) \cdot (-9) = \quad (q) 18 \cdot (-2) : (-4) = \quad (r) -14 : 2 : (-7) =$$

$$(s) -2 \cdot (-9) : (-3) = \quad (t) 21 \cdot (-2) : (-14) = \quad (u) -5 : (+5) \cdot (-4) =$$

19. Obtén el resultado

(a) $5+(-9\cdot 2)$

(b) $8\cdot 2\cdot (-4)$

(c) $(-17+(-4)):3$

(d) $-8\cdot (13-3)$

(e) $5-20:(-4)$

(f) $(-3)\cdot (-2)\cdot (-6)$

(g) $4\cdot 2+3\cdot (-5)$

(h) $-4\cdot (-7)-11$

(i) $-5\cdot 6:(-5)$

(j) $6-2\cdot 10$

(k) $(90-9):(-27)$

(l) $(7-13)-5$

(m) $-63:(-7):3$

(n) $24:(-6)-3\cdot 5$

(o) $4\cdot (-5)+(+25)$

(p) $(-25:5)+(+25)$

(q) $21\cdot (-2):(-14)=$

(r) $-5:(+5)\cdot (-4)=$

(s) $-2\cdot (-9):(-3)=$

20. Calcula el resultado de estas operaciones combinadas.

(a) $4\cdot (-3-2)-6\cdot 3$

(b) $9\cdot (8-4)+17-(30:6)$

(c) $(12\cdot 3-6)-6+9$

(d) $(23-8):5-8$

(e) $3-3\cdot (-12-3)+3\cdot 4$

(f) $(7\cdot 3+4):5-15$

(g) $22:11-10\cdot (-3)+3$

(h) $[(-2)\cdot (+7)]:(-14)\cdot (+3)=$

(i) $(120-20):5-15$

(j) $7\cdot (-3)-3\cdot (-5)+20:(-1-3)=$

(k) $(3-5)\cdot (7-9)\cdot (4-6)\cdot (9-11)=$

(l) $25:(-1+6)+35:(-4-3)=$

(m) $(150:50+3)\cdot 9-1$

(n) $(4-7)\cdot (7-10)\cdot (3-6)\cdot (8-11)=$

(o) $2\cdot [5\cdot (-8)-(-15)\cdot 4]=$

21. Simplifica la escritura y obtén el resultado

(a) $4\cdot (-6)-30\div 5$

(b) $-3\cdot 9-4\cdot (-5)$

(c) $5\cdot [25:(-5)+9]$

(d) $18:(-6):3$

(e) $(-1)\cdot (-5)\cdot (-4)$

(f) $42:6-8\cdot (-3)+(3+1)$

(g) $-3\cdot (-7)-11$

(h) $-45:(-3):3$

(i) $22:11-10\cdot (-3)$

(j) $5-20:(-4)$

(k) $(-3)\cdot (-2)\cdot (-6)$

(l) $12\cdot [30:(-6)+11]$

(m) $-4 \cdot (-7) - 11$

(n) $-63 : (-7) : 3$

(o) $24 : (-6) - 3 \cdot 5$

22. Una bomba extrae el petróleo de un pozo a 975 m de profundidad y lo eleva a un depósito situado a 48 m de altura. ¿Cuántos metros sube el petróleo?

23. ¿Qué diferencia de temperatura soporta una persona que pasa de la cámara de conservación de las verduras, que se encuentra a 4°C , a la del pescado congelado, que está a -35°C ? ¿Y si pasase de la cámara del pescado la de la verdura?

24. La temperatura más alta registrada en la Tierra fue de 58°C , en Libia en septiembre de 1922. La más baja fue de -88°C en la Antártida en agosto de 1960. ¿Cuál es la diferencia entre la temperatura registrada en Libia y la registrada en la Antártida?

25. Calcula el valor de las siguientes potencias:

a) -3^3 b) $(-3)^3$ c) $(-5)^2$ d) -5^2 e) -2^4 f) $(-2)^4$
 g) -10^7 h) $(-10)^7$ i) $(-4)^3$ j) -4^3 k) $(-2)^6$ l) -2^6
 m) -2^5 n) $(-2)^5$ o) $(-5)^0$ p) 5^0 q) $(-3)^4$ r) $(-40)^3$

26. Calcula el valor del exponente, si es posible:

a) $[]^3 = 27$ b) $(-2)^{[]} = 4$ c) $-2^{[]} = -16$
 d) $-2^{[]} = -16$ e) $1^{[]} = 2$ f) $(-2)^{[]} = -16$
 g) $(-10)^{[]} = 10000$ h) $-10^{[]} = 1000$ i) $(-5)^{[]} = 25$
 j) $(-6)^{[]} = -216$ k) $1^{[]} = 1$ l) $(-1)^{[]} = 1$

27. Calcula

a) $2^2 - 1^2$ b) $(2-1)^2$ c) $3^2 - 6^2$ d) $(3-6)^2$
 e) $(4-2)^2$ f) $4^2 - 2^2$ g) $(-2)^2 - 7$ h) $7 - (-2)^2$
 i) $3^2 - 2^3 + 1$ j) $8 - 3^2 - (-1)^2$ k) $2^3 - (-1)^2 - 7$ l) $2^2 + 2 - 2^3$
 m) $(4-7)^2 + 6 \cdot (-1)$ n) $(4^2 - 7^2) + 6 \cdot (-1)$ o) $(3-5)^2 - 4 - 2 : (-2)$

28. Realiza las siguientes operaciones combinadas

- | | |
|---|---|
| a) $2 \cdot (-1)^4 - 3 \cdot (-1) - (-1) =$ | b) $(-3)^3 + (-3)^2 - 4 \cdot (-3) - (-3) =$ |
| c) $(-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 - 5 =$ | d) $(-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 1$ |
| e) $(-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 1$ | f) $(1-3)^2 - (-1-1)^2 =$ |
| g) $(-2-3)^2 - (4-2)^2 =$ | h) $2 \cdot 1^4 - 3 \cdot 1 - 1 =$ |
| i) $2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 1$ | j) $2 \cdot 3^4 - 3 \cdot 3 - 3 =$ |
| k) $2 \cdot 0^4 - 3 \cdot 0 - 0 =$ | l) $2 \cdot (-2)^4 - 3 \cdot (-2) - (-2) =$ |

29. Escribe las siguientes multiplicaciones en forma de potencia y viceversa:

- | | | |
|--|----------------------------------|--|
| a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$ | c) $6^3 =$ | e) $5^4 =$ |
| b) $4^6 =$ | d) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$ | f) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 =$ |

30. Reduce las siguientes expresiones a una única potencia utilizando las propiedades de las potencias:

- | | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|------------------------|
| a) $3^2 \cdot 3^4 =$ | e) $2^4 \cdot 3^4 =$ | j) $5^2 \cdot 3^2 =$ | n) $10^2 \cdot 10^3 =$ |
| b) $2^5 \cdot 2^3 =$ | f) $10^5 : 2^5 =$ | k) $(3^2)^3 =$ | ñ) $5^3 \cdot 5^5 =$ |
| c) $(2^3)^5 =$ | g) $6^3 \cdot 6^5 =$ | l) $4^3 \cdot 2^3 =$ | o) $(5^5)^5 =$ |
| d) $5^5 : 5^5 =$ | i) $4^3 \cdot 2^3 =$ | m) $4^6 : 4^5 =$ | p) $25^4 : 5^4 =$ |

31. Reduce las siguientes expresiones usando las propiedades de las potencias:

- a) $\frac{2^2 \cdot 4^3 \cdot 8 \cdot 16}{2^6 \cdot 4^2}$
- b) $\frac{3^2 \cdot 81^2 \cdot 27 \cdot 3^4}{(3^2)^3 \cdot 3 \cdot 9}$
- c) $\frac{5^4 \cdot 25^4 \cdot (5^3)^2}{25^2 \cdot 125}$

APARTADO 2: NÚMEROS RACIONALES. OPERACIONES

1. Estas fracciones representan cocientes de dos números. Indica a qué número entero corresponde cada una:

a) $\frac{18}{3}$

b) $\frac{30}{10}$

c) $-\frac{45}{9}$

d) $\frac{-36}{4}$

2. Obtén las cantidades en cada caso:

a) $\frac{2}{6}$ de 30 =

b) $\frac{5}{3}$ de 351 =

c) $\frac{3}{4}$ de 2 =

d) $\frac{10}{500}$ de 70 =

3. En una clase de 1º de ESO hay 12 chicos y 15 chicas. ¿Qué fracción del total de alumnos son chicas? ¿Y chicos?

4. Laura ha leído las dos novenas partes de una novela. ¿Qué fracción le falta por leer? .Si el libro tiene 63 páginas, ¿cuántas le quedan para acabar el libro?

5. Comprueba si la siguientes fracciones son equivalentes, indicando porqué:

a) $\frac{1}{9}$ y $\frac{9}{1}$

b) $\frac{14}{7}$ y $\frac{15}{6}$

c) $-\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{3}$

d) $\frac{56}{27}$ y $\frac{75}{94}$

e) $-\frac{2}{5}$ y $\frac{2}{-5}$

f) $-\frac{3}{5}$ y $\frac{12}{-20}$

6. Reduce estas fracciones a común denominador y ordénalas de menor a mayor:

a) $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$

b) $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{14}$, $\frac{7}{14}$

c) $\frac{7}{3}$, $\frac{2}{9}$, $-\frac{11}{12}$

d) $-\frac{1}{5}$, $-\frac{2}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$

7. Realiza las siguientes sumas y restas:

a) $\frac{16}{15} + \frac{7}{30}$

b) $\frac{7}{8} + \frac{7}{5}$

c) $\frac{3}{12} - \frac{1}{3}$

d) $\frac{4}{30} - \frac{9}{42}$

e) $\frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8}$

f) $\frac{5}{5} + \frac{11}{10} + \frac{3}{8}$

g) $\frac{7}{12} - \frac{3}{4} + \frac{5}{3}$

h) $\frac{13}{24} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$

i) $\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2}$

j) $\frac{5}{3} - \frac{7}{3} + \frac{8}{3}$

k) $\frac{5}{2} + \frac{9}{2} - \frac{8}{2}$

l) $\frac{3}{5} + \frac{3}{5} - \frac{11}{5}$

8. Realiza las siguientes multiplicaciones y divisiones, expresando el resultado en forma de fracción irreducible:

a) $\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{9}$

b) $\frac{3}{4} \cdot 7$

c) $\frac{8}{27} \cdot \frac{9}{16}$

d) $8 \cdot \frac{5}{16}$

e) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{8}$

f) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}$

g) $\frac{8}{9} \cdot \frac{4}{9}$

h) $\frac{9}{7} \cdot \frac{5}{2}$

i) $8 \cdot \frac{4}{5}$

j) $\frac{5}{12} \cdot 10$

k) $\frac{21}{5} \cdot \frac{7}{10}$

l) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12}$

9. Calcula y simplifica el resultado:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

b) $\left(\frac{4}{3}\right)^3$

c) $\left(\frac{12}{7}\right)^2$

d) $\left(\frac{-2}{3}\right)^4$

e) $\left(\frac{-3}{5}\right)^3$

f) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$

g) $\left(\frac{1}{10}\right)^5$

h) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$

i) $\left(\frac{-1}{10}\right)^3$

j) $\left(\frac{4}{5}\right)^4$

10. Calcula y simplifica el resultado:

a) $\frac{5}{12} + \left(\frac{1}{3} - \frac{8}{9}\right)$

b) $\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{-4}{6}$

c) $\frac{3}{-4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-3}{3}$

d) $\frac{-3}{2} \div 5 + 2 \cdot \frac{-2}{3}$

e) $\frac{\frac{-8}{18}}{\frac{-7}{27}}$

f) $\left(4 - \frac{2}{3}\right)^2$

g) $\left(\frac{9}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3}$

h) $\frac{7}{5} - 2 \cdot \frac{4}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

i) $1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2$

j) $2 - \frac{-1}{4}$

k) $\frac{-10-8}{12} \cdot \frac{-15}{3 \cdot 6}$

l) $\frac{-7}{18} \div \left(-\frac{1}{6}\right)$

m) $(-3-6) \cdot \left(-\frac{7}{21}\right)$

n) $\frac{\frac{2}{3}-5}{6-\frac{1}{3}}$

11. Realiza las operaciones y obtén la fracción irreducible:

a) $6 \cdot \left(\frac{3}{12} + \frac{2}{18}\right) =$

b) $(-2) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{4}\right) =$

c) $8 \cdot \left(\frac{5}{12} + \frac{2}{15}\right) =$

d) $\left(1 - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) =$

e) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{8} =$

f) $(-4) \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{10}\right) =$

g) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{8} =$

h) $\left(\frac{3}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right) =$

i) $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{11}{12}\right) =$

j) $\frac{7}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} + \frac{4}{9}$

k) $\frac{2}{9} - \frac{4}{15} + 2$

l) $\frac{-4}{9} \cdot \frac{8}{3}$

m) $\frac{7}{10} \cdot \left(-\frac{5}{14}\right)$

n) $\frac{-5}{4} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{7}{-3}$

o) $\frac{-5}{4} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{7}{-3}$

p) $\frac{5}{8} : \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5}$

q) $\frac{5}{8} : \left(\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5}\right)$

r) $\frac{5}{8} - \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5}$

s) $\left(\frac{5}{8} - \frac{5}{4}\right) \cdot \frac{4}{5}$

t) $\frac{5}{20} - \frac{8}{15} + \frac{7}{12}$

u) $\frac{3}{10} - \frac{5}{14} - \frac{2}{5} =$

v) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - 1\right) : \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3}\right) =$

w) $\frac{1}{3} : \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{2} - 1\right) : \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right) =$

12. De los animales del zoo, $\frac{2}{3}$ son mamíferos y $\frac{1}{5}$ aves. ¿qué fracción son conjuntamente los mamíferos y las aves? ¿Qué fracción representa el resto de los animales?

13. Dos hermanos se reparten las canicas de un bote. El primero se lleva $\frac{3}{8}$ del total, ¿Qué fracción se lleva el segundo? Si el bote tenía 80 canicas ¿cuántas canicas tiene cada hermano?

14. Una persona tiene $\frac{1}{4}$ de su fortuna en joyas, y $\frac{2}{5}$ en terrenos. ¿Qué parte de su fortuna tiene entre joyas y terrenos? ¿Cuánto le falta o le sobra para llegar a la mitad de su fortuna?

15. Un poste tiene $\frac{1}{7}$ de su longitud clavado en el fondo de un estanque, y $\frac{1}{4}$ de su longitud, fuera del agua. ¿Qué parte del poste está cubierta por el agua? Si el poste mide 28 m, cuántos metros están clavados, cuantos en el agua y cuántos fuera del agua?

16. Julia emprende un viaje de 30 km. En la primera hora recorre $\frac{1}{4}$ del trayecto, y en la segunda, $\frac{1}{3}$. ¿Qué parte del camino ha recorrido en las dos primeras horas? ¿Cuántos km le faltan para el final del trayecto?

17. Alberto ha resuelto bien $\frac{2}{3}$ de los ejercicios de una prueba y su amiga Irene los $\frac{3}{5}$. ¿Quién tendrá mejor nota?

18. Un contribuyente paga al principio del año la mitad de sus impuestos; al cabo de seis meses, la tercera parte de ellos, y al final del año paga el resto. ¿Qué parte de los impuestos paga al final del año? Suponiendo que tiene que pagar 1440 €, ¿qué cantidad ha pagado en cada uno de los tres plazos?

19. Hoy he perdido 18 cromos, me quedan $\frac{8}{11}$ de los que tenía. ¿Cuántos cromos tenía?

20. Un profesor ha corregido $\frac{2}{5}$ de los exámenes con rotulador rojo y $\frac{1}{4}$ con bolígrafo azul. Si todavía le quedan por corregir 42 exámenes, ¿cuántos tenía que corregir en total?

21. Un futbolista ha metido los $\frac{2}{5}$ del número de goles marcados por su equipo y otro la cuarta parte del resto. Si los demás jugadores han conseguido 45 goles, ¿cuántos goles metió el equipo en toda la temporada?

22. De un depósito que estaba lleno se han sacado $\frac{2}{3}$ del total y, después, $\frac{1}{5}$ del total. Sabiendo que aún quedan 400 litros, ¿cuál era la capacidad del depósito?

23. Un pastor vende un tercio de sus ovejas, y luego los $\frac{4}{7}$ de las restantes. Si le quedaron 18 ovejas, ¿cuántas ovejas tenía al principio?

24. María salió de casa y se gastó la mitad de su dinero en el cine y unos refrescos. Luego gastó la cuarta parte de lo que tenía en un libro. Si volvió a casa con 15 Euros, ¿con cuánto dinero salió de casa?

25. Un deportista hizo tres cuartos de un trayecto en bicicleta y un quinto de lo que le falta corriendo. El resto, que fueron 20 km, los hizo en monopatín. ¿Cuál era la longitud total del trayecto?

26. En mi huerto tengo cuatro quintos del terreno cultivado con patatas. La mitad del resto, tengo tomates. De lo que queda, la cuarta parte son pimientos y aún me quedan 75 m² de jardín. ¿Cuál es la superficie total de mi huerto?

27. Expresa en forma de fracción las siguientes potencias de exponente negativo:

a) $3^{-2} =$ b) $5^{-1} =$ c) $4^{-2} =$ d) $5^{-3} =$ e) $6^{-2} =$ f) $3^{-4} =$

28. Calcula las siguientes potencias:

a) $(-3)^3$ b) $(-2)^4$ c) $(-2)^{-3}$ d) -3^2 e) -2^{-1}
 f) $(-1)^{-2}$ g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ h) $\left(\frac{-1}{2}\right)^{-2}$ i) $\left(\frac{4}{3}\right)^0$ j) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$

29. Expresa como una potencia de base 2 o 3

a) 64 b) 243 c) $\frac{1}{32}$ d) $\frac{1}{3}$
 e) $\frac{-1}{27}$ f) $\frac{3^4}{3^{-3}}$ g) $\frac{2^{-5}}{2^3}$ h) $\left(\frac{2^{-3}}{2^{-2}}\right)^{-1}$

30. Reduce a una sola potencia:

a) $4^3 \cdot 4^4 \cdot 4$ b) $(5^6)^3$ c) $\frac{7^6}{7^4}$ d) $(6^2)^3 \cdot 3^5 \cdot (2^7 : 2^3)$
 e) $2^{10} \cdot 5^{10}$ f) $\frac{12^5}{3^5 \cdot 4^5}$ g) $\frac{15^3}{3^3}$ h) $(a^6 \cdot a^3)^2 : (a^2 \cdot a^4)^3$

31. Calcula utilizando las propiedades de las potencias:

a) $2^3 \cdot 5^4$ b) $2^3 \cdot 5^4$ c) $(6^5 : 2^4) : 3^5$ d) $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$
 e) $2^8 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^4$ f) $\frac{20^6}{2^6}$ g) $(3^3)^2 : 3^5$ h) $(2^5)^3 \cdot [(5^3)^4 : 2^3]$

32. Expresa como una fracción simplificada:

a) $\frac{3^4}{3^5}$ b) 5^{-1} c) d) $x^{-1} y^{-2}$ e) $\frac{x^3 y^4}{x^2 y^6}$ f) $(3xy^2)^{-2}$ g) $5 \cdot 3^{-1} \cdot xy^{-2}$

33. Calcula:

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^2$ b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ c) $\left(\frac{-1}{5}\right)^{-2}$ d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$
 e) $\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}\right)^{-6}$ f) $\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^6$ g) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$ h) $\left(\frac{17}{45}\right)^0$
 i) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right]^2$ j) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} : \left(\frac{3}{4}\right)^2$ k) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 : \left(\frac{1}{4}\right)^2$ l) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)^4$
 m) $\left(\frac{-1}{a}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-2}$ n) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-4} \cdot \frac{a^3}{b^2}$ ñ) $\left(\frac{b}{a}\right)^{-3} : \frac{(b^2)^{-1}}{a^{-4}}$

33. Escribe como una sola potencia:

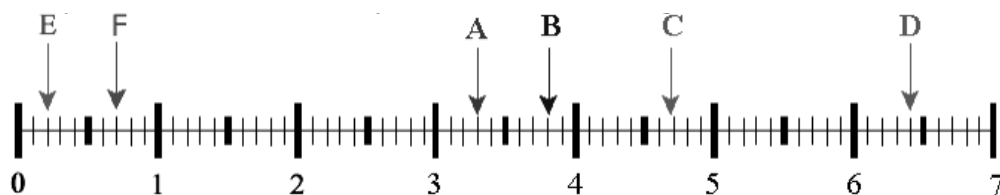
a) $\frac{2^4 \cdot 2^{-1} \cdot 2^3}{2^5 \cdot 2^{-3}} \cdot (2^2)^{-3} \cdot 2^4$ b) $\frac{8 \cdot 2^2 \cdot 16^{-2}}{32 \cdot 4^3} \cdot 2^4$ c) $\frac{24^2 \cdot 15^{-2} \cdot 6^4}{8^4 \cdot 9^{-3} \cdot 3^{10}}$

34. Calcula el número que falta para que la igualdad sea verdadera:

a) $\frac{3}{4} = \frac{6}{x}$ b) $\frac{x}{10} = \frac{20}{5}$ c) $\frac{4}{x} = \frac{8}{22}$ d) $\frac{5}{10} = \frac{6}{x}$ e) $\frac{x}{4} = \frac{24}{16}$

APARTADO 3: NÚMEROS DECIMALES

1. Indica qué números decimales corresponden a las letras del dibujo:



2. Ordena situando los signos “>” ó “<”

a) $67,563$ ____ $67,548$

b) $103,31$ ____ $103,342$

c) $7,021$ ____ $7,02$

d) $98,3$ ____ $98,2$

3.- Redondea según se indica:

	Unidades	Décimas	Centésimas
6,723			
5,099			
0,094			
0,856			

4. Completa el siguiente cuadro

Número	hasta las	Redondeo	Truncamiento
1235,68	décimas		
0,1239	milésimas		
453,48264	centésimas		
9362,3995	unidades		
31,548732	diezmilésimas		
1367	centenas		
3998	decenas		

5. Calcula mentalmente:

a) El triple de 6,2

d) $3,5 \cdot 0,1$

g) la tercera parte de 12,6

j) el doble de 7,3

m) la décima parte de 2,5

b) $0,689 \cdot (-100)$

e) $0,8 \cdot 0,4$

h) $3,25 + 1,75$

k) $12 \cdot 0,3$

n) $0,5 \cdot 0,7$

c) La mitad de 1,4

f) $1,65 : 1000$

i) $73,58 : 0,01$

l) el triple de 5,2

o) la mitad de 20,4

6. Realiza las siguientes operaciones:

- | | | |
|------------------------|-----------------------|----------------------|
| a) $0,5294 \cdot 10$ | b) $3,54 \cdot 1000$ | c) $0,675 \cdot 100$ |
| d) $0,475 \cdot (-10)$ | e) $-6,24 \cdot 100$ | f) $5 : 10$ |
| g) $3,6 : 10$ | h) $57,25 : 100$ | i) $8 : 100$ |
| j) $2,5 \cdot 0,1$ | k) $0,15 : 0,1$ | l) $3,5 \cdot 0,01$ |
| m) $73,58 : 0,01$ | n) $73,58 \cdot 0,01$ | o) $0,3 : 1000$ |

7. Completa la tabla:

Número	Forma abreviada	Tipo de decimal	Periodo	Antiperiodo
7,30222...				
74,67676...				
0,040340340...				
3,5702222...				
2,7457457...				
3,02				

8. Pasa las siguientes fracciones a un número decimal:

- | | | | | |
|-------------------|------------------|--------------------|-------------------|-------------------|
| a) $\frac{10}{5}$ | b) $\frac{1}{2}$ | c) $\frac{100}{9}$ | d) $\frac{2}{14}$ | e) $\frac{3}{10}$ |
|-------------------|------------------|--------------------|-------------------|-------------------|

9. Indica el tipo de número decimal y halla su fracción generatriz:

- | | | | | |
|----------|---------------|-----------------|-----------------|---------------|
| a) 1,2 | b) 3,2222... | c) 12,04444... | d) 23,4888 | e) 12,4444... |
| f) 23,4 | g) 2,0444... | h) 23,242424... | i) 3,136136... | j) 2,14545... |
| k) 23,25 | l) 5,12323... | m) 6,1717... | n) 8, 236236... | ñ) 32,23 |

10. Escribe 3 números decimales exactos, otros 3 que sean decimales periódicos puros (en forma extensa y abreviada) , otros 3 que sean decimales periódicos mixtos (en forma extensa y abreviada) y 3 decimales no exactos y no periódicos.

11. El kilo de merluza está a 11,20 €. Si una merluza pesa 1,450 kg, ¿cuánto costará?

12. Fernando ha comprado 3,6 kg de peras que valen a 1,35 €/kg y 650 gramos de cerezas que valen a 3,20 € el kilo. Si ha pagado con un billete de 10 €, ¿cuánto le devolverán?

13. En una estantería de una tienda hemos contado 135 frascos de perfume. Si cada uno de los frascos contiene 25 mililitros, ¿cuántos litros de perfume hay en total?

14. El precio de cada frasco de perfume es de 8,90 €. Si una semana se venden 57 frascos, ¿cuánto habrá sido la recaudación total por su venta?

15. Un paquete con seis yogures pesa 0,678 kg. Expresa en kilos el peso de un yogur.

16. Los melones se venden a 1,25€/kg. ¿Cuánto pesa un melón que cuesta 4,40 €?
17. Sara ha comprado 3 botes de tomate y un refresco que cuesta 1,05 €. Ha pagado con 5 € y le han devuelto 1,40 €. ¿Cuánto le ha costado cada bote de tomate?
18. Manuel quiere hacer una ensalada para su restaurante pero no puede gastar más de 2 € por ración. para 50 personas necesita: 12,5 kg de atún, 7 kg de espárragos, 15 kg de queso y 20 kg de manzanas. Si 1 kg de atún cuesta 2,3 €, 1 kg de espárragos 32,2 €, 1k g de queso 8,25 € y 1 kg de manzana 1,99 €. ¿Consigue Manuel no pasarse del presupuesto?
19. Una jarra vacía pesa 0,64 kg, y llena de agua 1,728 kg. ¿Cuánto pesa el agua?
20. Se tienen 240 cajas con 25 bolsas de café cada una. Si cada bolsa pesa 0,62 kg, ¿cuál es el peso del café?

APARTADO 4: RAÍCES Y RADICALES

1. Calcula los valores de los siguientes radicales sin usar calculadora.

a) $\sqrt{64}$ b) $\sqrt[3]{-343}$ c) $\sqrt[5]{243}$ d) $\sqrt[3]{216}$ e) $\sqrt[5]{-32}$
 f) $\sqrt[6]{4096}$ g) $\sqrt[7]{-128}$ h) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ i) $\sqrt[4]{\frac{625}{16}}$ j) $\sqrt[4]{-1}$

2. Calcula el valor de x.

a) $\sqrt{x}=12$ b) $\sqrt{x}=4$ c) $\sqrt[3]{x}=7$ d) $\sqrt[5]{x}=3$ e) $\sqrt[x]{8}=2$

3. Descompón como producto o cocientes de raíces:

a) $\sqrt{9 \cdot 10}$ b) $\sqrt[4]{7 \cdot 5}$ c) $\sqrt[3]{4 \cdot 3}$ d) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ e) $\sqrt[3]{\frac{2}{15}}$

4. Expresa como una sola raíz

a) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{8}$ b) $\sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[5]{3}$ c) $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{4}$ d) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$
 e) $\frac{\sqrt[5]{7}}{\sqrt[5]{25}}$ f) $\frac{\sqrt[7]{39}}{\sqrt[7]{240}}$ g) $(\sqrt{7})^3$ h) $(\sqrt{5^2})^3$
 i) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ j) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$

5. Saca del radical los factores que sea posibles.

a) $\sqrt{2^2 \cdot 5^3}$ b) $\sqrt[3]{2^6 \cdot 7^3}$ c) $\sqrt[4]{2^2 \cdot 3^6}$ d) $\sqrt[3]{27 \cdot a \cdot b^3}$ e) $\sqrt[4]{16 \cdot a^5 \cdot b}$
 f) $\sqrt[4]{32}$ g) $\sqrt[3]{81}$ h) $\sqrt[3]{200}$ i) $\sqrt{50}$ j) $\sqrt[4]{144}$
 k) $\sqrt[3]{250}$ l) $\sqrt[5]{64}$ m) $\sqrt[3]{243}$ n) $\sqrt{4a^2}$ ñ) $\sqrt[5]{32 \cdot a^2 \cdot b^{10}}$

6. Efectúa las operaciones que sean posible.

a) $7\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ c) $4\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$
 d) $\sqrt{6} - 3\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{5} - \frac{1}{3}\sqrt{5}$ f) $\sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2}$
 g) $\sqrt{50} + \sqrt{72} - 10\sqrt{2}$ h) $\sqrt{80} - \sqrt{45} - \sqrt{20}$ i) $-\sqrt{48} + 3\sqrt{75} - \sqrt{108}$

7. Expresa las siguientes raíces como potencias.

a) $\sqrt[4]{5}$ b) $(\sqrt[5]{3})^2$ c) $(\sqrt[4]{10^2})^6$ d) $(\sqrt[3]{9^2})^4$ e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{6^2}}$

8. Expresa, si es posible, como una sola raíz de la forma más simplificada posible.

a) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[5]{3}$ b) $\sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[5]{3}$ c) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[3]{5}$ d) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3^2}$ e) $\sqrt[3]{3^5} \cdot \sqrt[3]{3}$

f) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{16}$ g) $\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{3}}$ h) $\sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2^3}$ i) $\frac{\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{125}}$ j) $\frac{\sqrt[8]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[6]{x^7} \cdot \sqrt{x}}$

9. Resuelve las siguientes operaciones combinadas:

a) $3 - \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} * \left(\frac{5}{4}\right) - \left(\frac{7}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) + (-1)$ b) $\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{25}{4}}\right) \cdot \frac{1}{3} - \sqrt{\frac{16}{25}}$

c) $\frac{2}{3} - \left(\left(\frac{3}{2}\right) + 1 : \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - \frac{3}{4}$ d) $\left(\sqrt{\frac{4}{25}} - 3 + \frac{1}{3}\right) : \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5}$

e) $\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{7} - \sqrt{\frac{1}{9}}\right) - \frac{3}{2}$ f) $\sqrt{\frac{37}{36} - 1} : \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{4}{3}\right)$

g) $1 - \frac{3}{4} : \frac{2}{9} - \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{4}{9}}$ h) $\frac{2}{3} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 : \left(1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6}\right) - 1$

10. Opera utilizando las propiedades de los radicales y dejando el resultado con **una única raíz** lo más sencilla posible, **extrayendo los factores que sea posible**:

a) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + \sqrt{2}$

b) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + \sqrt{3}$

c) $3\sqrt{2} - 5\sqrt{8} + 7\sqrt{32}$

d) $\sqrt{24} + 7\sqrt{6} - 2\sqrt{486}$

e) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3}$

f) $\frac{\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[6]{9}}{\sqrt[3]{3}}$

e) $\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x^5}}$

UD 4: ÁLGEBRA, ECUACIONES Y SISTEMAS

APARTADO 1: ÁLGEBRA

Una **expresión algebraica** es cualquier combinación de números y letras relacionados entre sí por operaciones aritméticas.

Ejemplo: $3x^2 - x + 2$, $2a + \sqrt{b}$, $\frac{3x+1}{3x-2}$

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el resultado que se obtiene al sustituir las variables por números y operar.

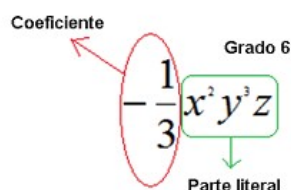
Por ejemplo: el valor numérico del polinomio $P(x) = x^3 - x^2 + 1$ para $x = -1$ es

$$P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 + 1 = -1 - 1 + 1 = -1$$

1. MONOMIOS

Un **monomio** es el producto de una parte numérica llamada coeficiente y una parte con letras y exponentes naturales llamada parte literal. Las letras de la parte literal reciben el nombre de variables y representan números de valor desconocido.

Se llama **grado** de un monomio al número de factores que forman su parte literal y se obtiene sumando los exponentes de la parte literal.



Dos monomios son **semejantes** cuando tienen idéntica parte literal. Por ejemplo, $\frac{-5}{2}xy^2$ y $100xy^2$ son monomios semejantes. También son semejantes $5yx^2$ con $3x^2y$.

1.1- Operaciones con monomios

- **Suma y resta:** solo podemos sumar y restar monomios semejantes. Por ejemplo,
 $3xy - 4xy + 7xy = 6xy$
 $(x^4 - 7x^3 + 4x + 5) - (2x^3 - 8x^2 + 6x + 1) = x^4 - 9x^3 - 2x + 4$
- **Producto:** por un lado multiplicamos los coeficientes (número) y por otro la parte literal (letras), aplicando las propiedades de las potencias. $(2x) \cdot (3x^2) = 6x^3$

- **División:** por un lado dividimos los coeficientes (número) y por otro la parte literal (letras), aplicando las propiedades de las potencias.

$$12x^2 : 4x^2 = \frac{12x^2}{4x^2} = 3x^0 = 3 \cdot 1 = 3$$

2.- POLINOMIOS

Un **polinomio** es a suma de dos o más monomios no semejantes, cada uno de los monomios que lo forman se llaman términos.

Se llama **grado** de un polinomio al mayor de los grados de los monomios que lo componen.

Grado absoluto de un polinomio
(mayor grado absoluto de los términos)

$$8x^7y^3 - 3x^4y^4 + 6xy^2$$

GA = 10 GA = 8 GA = 3

GA = 10

Valor de un polinomio $p(x)$ para $x=a$ es el resultado de sustituir la x por a

Calculamos el valor de $p(x) = 2x^4 - 7x^3 + 11x - 2$ para $x=3$ $p(3) = 2 \cdot 3^4 - 7 \cdot 3^3 + 11 \cdot 3 - 2 = 4$

Si el valor numérico de un polinomio para $x=a$ es 0, entonces se dice que a es una **raíz** de dicho polinomio.

2.1- Operaciones con polinomios.

- **Suma y resta:** para sumar dos polinomios, tenemos que ir sumando los monomios que sean semejantes y dejamos indicada la operación de los monomios no semejantes.

Por ejemplo, $(x^4 - 7x^3 + 4x + 5) - (2x^3 - 8x^2 + 6x + 1) = x^4 - 9x^3 - 2x + 4$

- **Producto:** Para multiplicar dos polinomios tenemos que multiplicar cada monomio del primero por cada monomio del segundo y operar los semejantes.

$$(x^2 + 3xy)(5y + 4x - 5) =$$

$$5x^2y + 4x^3 - 5x^2 + 15xy^2 + 12x^2y - 15xy$$

$$17x^2y + 4x^3 - 5x^2 + 15xy^2 - 15xy$$

- **Productos notables:**

I. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$	CUADRADO DE UNA SUMA
II. $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$	CUADRADO DE UNA DIFERENCIA
III. $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$	SUMA POR DIFERENCIA

- **División de polinomios:** La división de polinomios es similar a la división de números naturales. Al dividir polinomios se obtiene un cociente y un resto.

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 \quad \Big| \quad x^2 + 3x - 2 \\
 \underline{-x^4 - 3x^3 + 2x^2} \quad \quad x^2 - 5x + 6 \\
 -5x^3 - 9x^2 + 30x \\
 \underline{5x^3 + 15x^2 - 10x} \\
 6x^2 + 20x - 20 \\
 \underline{-6x^2 - 18x + 12} \\
 2x - 8
 \end{array}$$

3. REGLA DE RUFFINI

La **regla de Ruffini** es un método que nos permite dividir un polinomio entre un binomio del tipo $(x - a)$. Tendremos que realizar los siguientes pasos:

- 1) Escribimos los coeficientes del dividendo en orden decreciente. Si falta algún término completamos con ceros.
- 2) En la izquierda colocamos el opuesto del término independiente del divisor (a).
- 3) Bajamos el primer coeficiente.
- 4) Multiplicamos el valor de a por el primer coeficiente bajado y el resultado lo escribimos debajo del segundo coeficiente.
- 5) Sumamos el segundo coeficiente con el valor anotado debajo y escribimos el resultado en la línea inferior.
- 6) Repetimos el proceso hasta completar la fila inferior. El valor de la derecha es el del resto y los valores a su izquierda los coeficientes del cociente.

División clásica de Polinomios

$$\begin{array}{r}
 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 3 \quad | \quad x-1 \\
 \underline{-5x^4 + 5x^3} \\
 2x^3 + 2x^2 - 7x + 3 \\
 \underline{-2x^3 + 2x^2} \\
 4x^2 - 7x + 3 \\
 \underline{-4x^2 + 4x} \\
 -3x + 3 \\
 \underline{+3x - 3} \\
 0
 \end{array}$$

División de Polinomios usando la Regla de Ruffini

	5	-3	2	-7	3
1		5	2	4	-3
	5	2	4	-3	0

$$5x^3 + 2x^2 + 4x - 3$$

Efectúa la siguiente división: $(-3x^5 + 4x^3 - 5x + 1) : (x - 2)$

1 En la primera fila colocamos los coeficientes del dividendo ordenados según las potencias decrecientes.

4 Los números de la segunda fila se consiguen multiplicando el término independiente del divisor por el último número conseguido de la tercera fila:
 $2 \cdot (-3) = -6$ $2 \cdot (-6) = -12$
 $2 \cdot (-8) = -16$ $2 \cdot (-16) = -32$
 $2 \cdot (-37) = -74$

	-3	0	4	0	-5	1
2		-6	-12	-16	-32	-74
	-3	-6	-8	-16	-37	-73

2 Término independiente del divisor cambiado de signo

3 Coeficiente principal del dividendo

5 Suma de los números superiores.

6 Suma de los números superiores. Es el resto de la división.

7 Los coeficientes del polinomio cociente son los números de la tercera fila menos el último que es el resto. En este caso los coeficientes son: $(-3, -6, -8, -16, -37)$

Por tanto el cociente es $-3x^4 - 6x^3 - 8x^2 - 16x - 37$
 El resto es $R = -73$

4. RAÍCES DE UN POLINOMIO. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Las **raíces** de un polinomio $P(x)$ son los valores de x que lo hacen 0, es decir, las soluciones de la ecuación $P(x)=0$.

- Un polinomio de grado n tiene, como máximo, n raíces reales.
- Si un polinomio de coeficientes enteros tiene raíces enteras, estas son divisores del término independiente.

4.1- Factorización

Factorizar un polinomio es expresarlo como producto de dos o más polinomios del menor grado posible.

Hay polinomios que no se pueden factorizar, por ejemplo los de grado 1 y los que no tienen raíces reales. Estos polinomios se llaman **irreducibles**.

Para factorizar polinomios podemos utilizar las siguientes técnicas:

1. Extraer factor común: se utiliza cuando falta el término independiente.

Por ejemplo : $x^4 + 2x^3 = x^3(x+2)$, $3x^2 - 15x = 3x(x-5)$

2. Identidades notables: se usa cuando un polinomio se puede expresar como una identidad notable.

Ejemplo: $x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$, $x^2 - 36 = (x+6)(x-6)$

3. Teorema del factor y Ruffini: se usa cuando se puede calcular una raíz entera.

Por ejemplo, $x^2 - 3x + 2$

Buscamos las raíces enteras entre los divisores del término independiente que son 1, -1, 2 y -2.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & \underline{0} \end{array}$$

Por lo tanto, la factorización del polinomio será:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

NOTA.- Si un polinomio de grado n tiene n raíces $x_1, x_2, \dots, x_n$ entonces su factorización es $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$ siendo a el coeficiente del término de grado n (el de mayor grado)

Ejemplo: si tenemos un polinomio de segundo grado cuyo coeficiente de x^2 es 7 y tiene como raíces 1 y -3, su factorización será: $P(x) = 7(x-1)(x+3)$

5. FRACCIONES ALGEBRAICAS

Se llama **fracción algebraica** al cociente indicado de dos polinomios $\frac{x}{3x^2-5}, \frac{3x-1}{x^2+6x-3}$

Las fracciones algebraicas se comportan de forma muy similar a las fracciones numéricas

5.1- Simplificación

Para simplificar fracciones algebraicas, debemos tener el mismo **factor** en el numerador y en el denominador (dijimos factor, por lo que simplificamos en productos, nunca en sumas). Por tanto, para simplificar una fracción algebraica debemos factorizar el numerador y el denominador para proceder, posteriormente, a la cancelación de factores.

$$\frac{3x(x+1)^2}{6x^2(x+1)} = \frac{\cancel{3}\cancel{x}(x+\cancel{1})(x+1)}{\cancel{3} \cdot 2 \cdot x \cdot \cancel{x} \cdot (x+\cancel{1})} = \frac{x+1}{2x}$$

APARTADO 2: ECUACIONES DE 1º GRADO

- Una **ecuación** expresa, mediante una igualdad algebraica, una relación entre cantidades cuyo valor, de momento no conocemos. Es una igualdad que se cumple solo para algunos valores de la **incógnita**, en otros casos para ninguno, otros para todos los valores de x .
- Las **soluciones** de una ecuación son los valores que hacen cierta la igualdad.
- **Resolver** una ecuación es hallar su solución, o llegar a la conclusión de que no tiene.

1. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE 1º GRADO

Una **ecuación de primer grado** es aquella en la que aparecen expresiones algebraicas de grado 1. Los pasos para resolver una ecuación de 1º grado son los siguientes:

- 1º Quitar paréntesis.
- 2º Quitar denominadores (se multiplican los dos miembros de la igualdad por el mcm).
- 3º Reducir cada miembro (operar).
- 4º Trasponer términos (las incógnitas a un lado de la igualdad, números al otro).
- 5º Despejar la incógnita.
- 6º Comprobar.

Las ecuaciones de primer grado, también llamadas ecuaciones lineales, pueden tener:

- a) **1 única solución**. Tal es el caso de una sencilla ecuación como $3x = 9$
- b) **Ninguna solución**. Tal es caso de las ecuaciones que, tras realizar los pasos que debemos seguir para su resolución, llegamos a una igualdad del tipo $0x = K$ (siendo "k" cualquier valor real conocido)
- c) **Infinitas soluciones**. Tal es caso de ecuaciones que, tras realizar los pasos que debemos seguir para su resolución, llegamos a una igualdad del tipo $0x = 0$. Se trata pues de una igualdad que se cumple para cualquier valor de la incógnita. A este tipo de expresiones se les llama **identidad**.

APARTADO 3: ECUACIONES DE 2º GRADO

Las **ecuaciones de segundo grado** son de la forma $ax^2+bx+c=0$ con $a \neq 0$ y, b y c conocidos.

- Ecuaciones **completas**: $b \neq 0$ y $c \neq 0$ se resuelven utilizando la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Si $b^2 - 4ac = 0$ hay una solución
- Si $b^2 - 4ac < 0$ no hay solución
- Si $b^2 - 4ac > 0$ hay dos soluciones
- Ecuaciones **incompletas**
 - Si $b=0$ entonces tenemos $ax^2+c=0$, para resolverla, despejamos x^2 , y luego x .
 - Si $c=0$ entonces tenemos $ax^2+bx=0$, para resolverla, sacamos factor común x : $ax^2+bx=0 \rightarrow x(ax+b)=0 \rightarrow$

$$\begin{matrix} x=0 \\ ax+b=0 \rightarrow x = \frac{-b}{a} \end{matrix}$$

Antes de aplicar la fórmula tenemos que:

1º Quitar paréntesis.

2º Quitar denominadores.

3º Colocar la ecuación resultante de la forma $ax^2+bx+c=0$

4º Resolver la ecuación, dependiendo si es completa o incompleta, aplicar uno u otro caso.

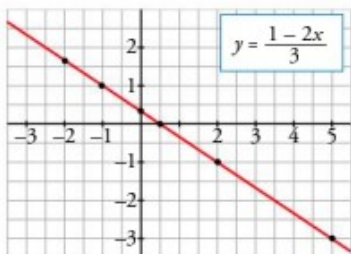
APARTADO 4: ECUACIONES POLINÓMICAS DE GRADO MAYOR QUE 2

La única diferencia que existe entre un polinomio y una ecuación polinómica es que, en el caso de la ecuación, existe un igual entre dos expresiones algebraicas. Cuando todo lo que hay en el segundo miembro se pasa al primero, en el segundo miembro queda un 0, es decir, tenemos un polinomio igualado a 0. Eso es justamente lo que hacíamos cuando buscábamos las raíces de un polinomio puesto que buscábamos los valores de la variable que hacían 0 el valor del polinomio. Por tanto, **hallar las soluciones de una ecuación polinómica es lo mismo que buscar las raíces del polinomio correspondiente.**

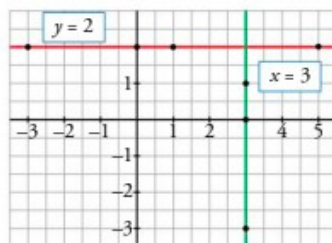
APARTADO 5: SISTEMAS DE ECUACIONES

1. ECUACIÓN LINEAL CON DOS INCÓGNITAS

- Una ecuación es **lineal** si se puede escribir de la forma: $ax + by = c$, donde a, b y c son números reales.
- La **solución** de una ecuación lineal con dos incógnitas es todo par de valores (x,y) que hacen cierta la igualdad. Por ejemplo, $2x + 3y = 1$ es una ecuación lineal con dos incógnitas. Para el par $x = 5$ e $y = -3$, se verifica la igualdad. Se pueden buscar más soluciones, tiene infinitas soluciones.
- Una ecuación lineal con dos incógnitas tiene **infinitas soluciones**.
- Las ecuaciones lineales pueden **representarse**, usando las soluciones como puntos del plano que después unimos y obtenemos una recta.



x	-1	2	5
y	1	-1	-3



$y = 2 \rightarrow 0x + y = 2$					
x	-3	0	1	5	...
y	2	2	2	2	2

$x = 3 \rightarrow x + 0y = 3$					
x	3	3	3	3	...
y	-3	0	1	5	...

2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Varias ecuaciones forman un **sistema** cuando pretendemos encontrar las soluciones comunes a todas ellas.
- Gráficamente, la **solución de un sistema** de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es el **punto de corte de las rectas** que lo forman.

Veamos cuántas soluciones puede tener un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

- Sistema incompatible** → No tiene solución (las rectas no se cortan, son paralelas)
- Sistema compatible indeterminado** → Tiene infinitas soluciones (ambas rectas son la misma)
- Sistema compatible determinado** → Tiene una única solución (las rectas se cortan en un punto)

2.1- Método de sustitución

- Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y se sustituye en la otra. Se obtiene así una nueva ecuación con una sola incógnita.
- Se resuelve la nueva ecuación, obteniendo el valor de una de las incógnitas.
- Se calcula el valor de la otra incógnita en la expresión en donde la tenemos despejada.

Resolver por sustitución este sistema:
$$\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

- Despejamos y en la primera ecuación (es lo más fácil), sustituimos en la segunda y resolvemos:

$$y = 13 - 3x \rightarrow 2x + 3(13 - 3x) = 4 \rightarrow x = 5$$

- Sustituimos el valor $x = 5$ en la ecuación en la que y aparecía despejada.

$$y = 13 - 3x \rightarrow y = 13 - 3 \cdot 5 \rightarrow y = -2$$

- La solución del sistema es $x = 5$, $y = -2$.

2.2- Método de igualación

- Se despeja la misma incógnita de las dos ecuaciones y se igualan las expresiones obtenidas, obteniendo una nueva ecuación con una sola incógnita.
- Se resuelve la nueva ecuación y se continúa como en el método anterior, sustituyendo en cualquiera de las despejadas.

Resolver por igualación este sistema:
$$\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

- Despejamos y en las dos ecuaciones, igualamos los resultados y resolvemos:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y = 13 \rightarrow y = 13 - 3x \\ 2x + 3y = 4 \rightarrow y = \frac{4 - 2x}{3} \end{array} \right\} 13 - 3x = \frac{4 - 2x}{3} \rightarrow x = 5$$

- Sustituimos en cualquiera de las ecuaciones en las que y aparece despejada:

$$y = 13 - 3x \rightarrow y = 13 - 3 \cdot 5 \rightarrow y = -2$$

- La solución del sistema es $x = 5$, $y = -2$.

2.3- Método de reducción

- Se multiplica cada ecuación por el número que convenga para que los coeficientes de ambas queden igualados pero con signos opuestos. Al sumarlas, se obtiene una nueva ecuación con una sola incógnita.
- Se resuelve la nueva ecuación.
- El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las ecuaciones originales.

Resolver por reducción este sistema:
$$\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

- Multiplicamos la primera ecuación por (-3) , dejando la segunda como está. Después, sumamos ambas y resolvemos:

$$\begin{cases} 3x + y = 13 & \xrightarrow{\times(-3)} & -9x - 3y = -39 \\ 2x + 3y = 4 & \xrightarrow{} & 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

$$\text{Sumando: } \begin{array}{r} -9x - 3y = -39 \\ 2x + 3y = 4 \\ \hline -7x = -35 \end{array} \rightarrow x = \frac{-35}{-7} \rightarrow x = 5$$

- Sustituimos el valor $x = 5$ en cualquiera de las ecuaciones iniciales. En este caso, es más fácil en la primera:

$$3 \cdot 5 + y = 13 \rightarrow y = 13 - 15 \rightarrow y = -2$$

- La solución del sistema es $x = 5$, $y = -2$.

3. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

Para resolver sistemas de ecuaciones no lineales (en los que las incógnitas o, por lo menos alguna de ellas, tienen un exponente diferente a 1) se recomienda usar siempre el sistema de sustitución.

UD 4: ÁLGEBRA, ECUACIONES Y SISTEMAS.

APARTADO 1: ÁLGEBRA

1.- Describe mediante una expresión algebraica:

- a) El doble de un número menos su tercera parte
- b) El doble del resultado de sumarle tres unidades a un número
- c) El tripe de un número menos cuatro unidades
- d) La edad de Alberto dentro de 22 años si hoy tiene x años.
- e) La suma de un número más su cubo.
- f) Los años de Isabel hace tres años.
- g) El doble de un número más su cuadrado.
- h) Un múltiplo de 3 menos 7.

2.- Di el grado de cada uno de los siguientes monomios y polinomios:

- a) $-5x^2y^3z^3$ b) $11xy^2$ c) -12
- d) $x^6-3x^4+2x^2+3$ e) $5x^2+x^4-3x^2-2x^4+x^3$ f) $x^3+3x^2-2x^3+x+x^3-2$

3.- Efectúa las siguientes sumas y restas:

- a) $5x+3x^2-11x+8x-x^2+7x$ b) $6x^2y-13x^2y+3x^2y-x^2y$
- c) $2x-5x^2+3x+11y+2x^3$ d) $3yz^3+y^3z-2z^3y+5zy^3$

4.- Efectúa los siguientes productos:

- a) $\left(\frac{2}{3}x^3\right) \cdot (-6x)$ b) $\left(\frac{2}{9}x^2\right) \cdot \left(\frac{-3}{5}x^3\right)$
- c) $(7xy^2) \cdot (2y)$ d) $(5xyz) \cdot (-3x^2z)$

5.- Realiza las siguientes divisiones con monomios:

- a) $\frac{25x^4y}{5xy^2}$ b) $\frac{5x^4y^2}{3x^3y}$ c) $\frac{4x^2}{12x^4}$

6.- Sean $P=5x^3-2x+1$ y $Q=x^4-2x^2+2x-2$. Halla $P+Q$ y $P-Q$.

7.- Halla los siguientes productos con polinomios:

- a) $2x \cdot (x^2 + 3x - 1)$ b) $-7x \cdot (2x^3 - 3x^2 + x)$ c) $8x^2 \cdot (x^2 + 3)$
 d) $-2 \cdot (-3x^3 - x)$ e) $-x^3 \cdot (-3x + 2x^2)$ f) $-7x^5 \cdot (2x^2 - 3x - 1)$

8.- Siendo $P = 4x^2 + 3$, $Q = 5x^2 - 3x + 7$ y $R = 5x - 8$ calcula:

- a) $P \cdot Q$ b) $P \cdot R$ c) $Q \cdot R$

9.- Opera y simplifica la expresión resultante:

- a) $x(5x^2 + 3x - 1) - 2x^2 \cdot (x - 2) + 12x^2$
 b) $5 \cdot (x - 3) + 2 \cdot (y + 4) - \frac{7}{3} \cdot (y - 2x + 3) - 8$
 c) $(x^2 - 2x + 7) \cdot (5x^3 + 3) - (2x^5 - 3x^3 - 2x + 1)$

10.- Realiza las siguientes divisiones:

- a) $(x^5 - 7x^4 + 3x^2 - 8) : (x^2 - 3x + 1)$ b) $(6x^4 + 3x^3 - 2x) : (3x^2 + 2)$
 c) $(5x^4 + 6x^2 - 11x + 13) : (x - 2)$ d) $(x^3 + 4x + 6) : (x - 4)$
 e) $(5x^4 - 3x^2) : (x - 2)$ f) $(x^3 - 2x^2 + 4) : (x + 3)$

11.- Calcula usando las identidades notables:

- a) $(x + 4)^2$ b) $(2x - 5)^2$ c) $(1 - 6x)^2$
 d) $\left(2x^2 - \frac{1}{2}\right)^2$ e) $\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)^2$ f) $\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right)$
 g) $(x + 1) \cdot (x - 1)$ h) $(2x + 3) \cdot (2x - 3)$ i) $(ax + b) \cdot (ax - b)$

12.- Extrae factor común en cada expresión:

- a) $7x^3y + 14xy$ b) $3x + 6$ c) $6x^5 - 18x^4$
 d) $-3x^5 - 15x^2$ e) $7xy - 14xy^2 + 21x^2y$ f) $2x^3 - 2x^2 + 2x$

13.- Expresa los siguientes polinomios como un producto notable:

- a) $4x^2 - 25$ b) $x^2 + 2x + 1$ c) $9x^2 - 6x + 1$
 d) $4x^2 - 20x + 25$ e) $16x^4 - 9$ f) $\frac{x^2}{4} + x + 1$

14.- Factoriza usando el factor común y las identidades notables:

- a) $x^3 - 6x^2 + 9x$ b) $x^3 - x$ c) $3x^2 + 30x + 75$

15.- Factoriza los siguientes polinomios:

- a) $x^2 - 9$ b) $2x^2 - 4x$ c) $x^3 - 3x + 2$
 d) $x^4 - x^2$ e) $x^3 - 7x - 6$ f) $x^4 + 3x^2 - 4x$
 g) $2x^2 + 2x - 4$ h) $4x^2 - 4x - 3$ i) $2x^3 + 8x^2 - 2x - 8$
 j) $2x^4 + 11x^3 + 11x^2 - 15x - 9$ k) $2x^3 - 10x^2 + 14x - 6$ l) $x^5 - x^4 - x^3 - 2x^2$

16.- Dado el polinomio $P(x) = x^2 - 2x - 15$, calcula $P(1)$, $P(-1)$, $P(0)$ y $P(1000)$

17.- Responde a las siguientes cuestiones:

- a) ¿Qué es una raíz?
 b) El valor numérico de un polinomio se calcula...
 c) Escribe un polinomio de grado 3, cuyas raíces sean 0, 1 y -1.
 d) ¿La suma de dos polinomios de grado 5 puede tener grado 4? Justifica tu respuesta poniendo un ejemplo.

18.- Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

- a) $\frac{2x^2 + x}{x + 1}$ b) $\frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ c) $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ d) $\frac{4x^2 + 2x}{2x}$ e) $\frac{x^2 - 5x + 6}{2x - 6}$ f) $\frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{3x - 9}$

APARTADO 2: ECUACIONES DE 1º GRADO

1.- Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $3x - 2(x+3) - x - 3(x+1)$

b) $4+b-4(1-b)+5(2+b)=0$

c) $2x+7-2(x-1)=3(x+3)$

d) $4(2x-7)-3(3x+1)=2-(7-x)$

e) $\frac{a-3}{5} = \frac{a+1}{3} - 2$

f) $1 = \frac{x+3}{3} - \frac{x}{2}$

g) $\frac{3b+4}{5} = \frac{b+2}{2}$

h) $\frac{5a-16}{6} = \frac{-a+8}{12} + \frac{a+1}{3}$

i) $\frac{2v-4}{3} = 3 - \frac{4+v}{2}$

j) $\frac{x+2}{2} - \frac{x+3}{3} = \frac{-x-4}{4} + \frac{x-5}{5}$

k) $\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-1}{10} + \frac{5x-2}{8} = \frac{x+1}{4}$

l) $2x - \frac{1}{2}(1+3x) - \frac{3}{5}(x-2) = \frac{1}{4}(3-x)$

m) $4(2r+1) - 3(r+3) = 5(r-2)$

n) $2(z-3)+1=3(z-1)-(2+z)$

o) $\frac{3s+1}{2} = 2x - \frac{-1+s}{2}$

p) $x + \frac{2x-7}{4} = 2x + \frac{x-1}{2}$

2.- Si al doble de un número le sumamos 15 obtenemos 51, ¿Qué número es?

3.- Si a un número le quitas 13, obtienes 91, ¿Cuál es el número?

4.- La suma de dos números consecutivos es 95, ¿Cuáles son esos números?

5.- En una ferretería se venden tornillos en cajas de tres tamaños: pequeña, mediana y grande. La caja grande contiene el doble que la mediana y la mediana 25 tornillos más que la pequeña. He comprado una caja de cada tamaño y en total hay 375 tornillos, ¿Cuántos tornillos hay en cada caja?

6.- En mi colegio entre alumnos y alumnas somos 624. Si el número de chicas supera en 36 al de chicos, ¿Cuántos chicos y cuantas chicas hay?

7.- Irene y Alejandro tienen 73 CD's de música. Irene tiene el doble que Alejandro más 1. ¿Cuántos CD's tienen cada uno?

8.- Tres amigos van de compras. Juan gasta el doble que Alicia y Ana gasta el triple que Alicia. Si entre los tres han gastado 72 €, ¿Cuánto ha gastado cada uno?

9.- Sabiendo que un pantalón es 5 € más caro que una camisa y que si compro 6 pantalones y 4 camisas pago 480 €, ¿Cuánto vale el pantalón y la camisa?

10.- Un kilo de chirimoyas cuesta el doble que uno de naranjas. Por 3 kilos de chirimoyas y 5 de naranjas he pagado 11 €. ¿Cuánto vale el kilo de cada una?

11.- En un concierto hay 432 personas. Si sabemos que hay 48 mujeres más que hombres, ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres hay?

12.- Para una fiesta se han comprado 340 refrescos. De naranja hay el triple que de cola. De limón el doble que de cola menos 20 ¿Cuántos refrescos hay de cada clase?

13.- Entre Ana y María tienen 270 €. Si Ana tiene el doble que María más 30 €, ¿cuánto tiene cada una?

14.- El padre de Antía tiene 30 años más que él y su madre tiene 5 años menos que su padre. Averiguar la edad de actual de Antía sabiendo que la suma de las edades de sus padres es 7 veces la edad de Antía.

15.- Busca un número positivo, x , de modo que al sumarlo con su doble se obtenga el triple de dicho número. ¿Cuántos números x cumplen lo anterior?

APARTADO 3: ECUACIONES DE 2º GRADO

1.- Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $7x^2 - 28 = 0$

b) $7x^2 + 28 = 0$

c) $3x^2 = 42x$

d) $3b^2 - 12b = 0$

e) $4v^2 - 9 = 0$

f) $a - 3a^2 = 0$

g) $c^2 + 4c - 21$

h) $x^2 + 9x + 20$

i) $x^2 + x + 3$

j) $4x^2 - 20x + 25$

k) $s^2 - 2s + 3 = 0$

l) $-2x^2 + 3x + 2 = 0$

m) $2(z+5)^2 + (z-3)^2 = 14(z+4)$

n) $(2t+1)(t-3) = (t+1)(t-1) - 8$

o) $(2x-3)(2x+3) - x(x+1) - 5 = 0$

p) $(2x+1)^2 = 4 + (x+2)(x-2)$

q) $\frac{(x-1)(x+2)}{12} - \frac{(x+1)(x-2)}{6} - 1 = \frac{x-3}{3}$

r) $\frac{x+1}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{x+2}{3} + \frac{(x-2)^2}{6} = \frac{1}{6}$

s) $\frac{a}{3}(a-1) - \frac{a}{4}(a+1) + \frac{3a+4}{12} = 0$

t) $\frac{b(b-1)}{3} - \frac{b(b+1)}{4} + \frac{3b+4}{12} = 0$

2.- El producto de un número por su consecutivo es 90 ¿Qué número es?

3.- ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15 le falta 100 unidades para completar el cuadrado de ella?

4.- Determina 3 números consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 365.

5.- El perímetro de un rectángulo mide 16 cm y su área 15 cm². Calcula sus dimensiones.

6.- Un albañil quiere abrir una ventana cuadrada en la cocina de su casa. El precio del vidrio es de 12 € por metro cuadrado y el precio del marco de aluminio es de 28 € el metro lineal. El material en total costó 195 €. ¿Cuánto mide el lado de la ventana?

APARTADO 4: ECUACIONES POLINÓMICAS DE GRADO MAYOR QUE 2

1.- Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $x^3 - 3x + 2 = 0$

b) $x^4 - x^2 = 0$

e) $x^3 - 7x = 6$

f) $x^4 + 3x^2 - 4x = 0$

i) $2x^3 + 8x^2 = 2x + 8$

j) $2x^4 + 11x^3 + 11x^2 - 15x - 9 = 0$

k) $2x^3 - 10x^2 + 14x = 6$

l) $x^5 = x^4 + x^3 + 2x^2$

APARTADO 5: SISTEMAS DE ECUACIONES

1.- Resuelve los siguientes sistemas usando el método gráfico.

a) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 2x+y=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 4x+2y=14 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 2x-y=1 \end{cases}$

2.- Resuelve los siguientes sistemas usando el método de sustitución.

a) $\begin{cases} x+3y=5 \\ 5x+7y=13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6x+3y=0 \\ 3x-y=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x+9y=4 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$

3.- Resuelve los siguientes sistemas usando el método de igualación.

a) $\begin{cases} 3x+8y=5 \\ 2x-2y=7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x+3y=28 \\ 7x+2y=-7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x-5y=-1 \\ 7x+10y=2 \end{cases}$

4.- Resuelve los siguientes sistemas usando el método de reducción.

a) $\begin{cases} 3x+5y=11 \\ 4x-5y=38 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+3y=5 \\ 5x+7y=13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-4y=11 \\ 5x+7y=1 \end{cases}$

5.- Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 3(x-1)+y=0 \\ 3(x+1)+y=-5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y=4-y \\ 3x-5=7-6y \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ 5x-3=9y-3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2(3x-2)=y-1 \\ 3(x+y)+2(x-y)=8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=4 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{4}=2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \frac{x-1}{2}+\frac{y+1}{4}=1 \\ \frac{2x-1}{2}-\frac{2y+1}{6}=1 \end{cases}$

6.- Encuentra dos números cuya suma sea 45 y cuya resta sea 21.

7.- Alberto y su padre se llevan 25 años de edad. Calcular la edad de Alberto sabiendo que dentro de 15 años la edad de su padre será el doble que la suya.

8.- La factura del teléfono del mes pasado ascendió a un total de \$39 por un consumo de 80 minutos mientras que la de este mes asciende a \$31,5 por un consumo de 55 minutos.

El importe de cada factura es la suma de una tasa fija (mantenimiento) más un precio fijo por minuto de consumo. Calcular la tasa y el precio de cada minuto.

9.- La semana pasada compramos berenjenas a un precio de 2,7€/kg y patatas a un precio de 0,7€/kg pagando por ellas un total de 15,1€.

Sin embargo, esta semana hemos pagado 18€ por una compra con la misma cantidad de estas hortalizas a un precio de 2€ por kilo de berenjenas y 1,2€ por kilo de patatas.

Calcular la cantidad de hortalizas que se compran.

10.- Un comerciante tiene dos clases de aceite, la primera de 6 euros el litro y la segunda de 7.2 euros el litro. ¿Cuántos litros de cada clase hay que poner para obtener 60 litros de mezcla a 7 euros el litro?

11.- Se mezcla una cierta cantidad de café de 34 € el kilo, con 80 kilos de otro café de 50 €/kg, para obtener una mezcla que se pueda vender a 44 € el kilo. ¿Cuánto café de 34 € debe emplearse en la mezcla?

12.- ¿Cuántos kilos de nueces de Castilla que cuestan 0.80 € el kilo deben mezclarse con 8 kilos de nueces de la India que cuestan 1.25 € el kilo para crear una mezcla que cueste 1,00 € el kilo?

13.- Un joyero tiene dos lingotes de oro, con un 80% de pureza y el otro con un 95% de pureza. ¿Cuánto debe fundir de cada uno para obtener un lingote de 5 kilos con un 86% de pureza?

14.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} 2x+y=8 \\ 2x+3y^2=22 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2x+5y=-8 \\ xy-3x=-5 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x+y=0 \\ xy=1 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 2x-y=3 \\ x^2-y^2=3 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{e)} \begin{cases} x-6y=-6 \\ 2x^2+y^2=76 \end{cases}$$

15.- El producto de 2 números es 4 y la suma de sus cuadrados, 17. ¿De qué 2 números se trata?

16.- Halla 2 números sabiendo que su suma es 14 y que la diferencia de sus cuadrados es 28.

17.- Los dos catetos de un triángulo rectángulo difieren en 5 unidades y la hipotenusa mide 25 cm. Calcula la longitud de los 2 catetos.

18.- Alquilar un autobús para ir de excursión cuesta 800 €. Si fuesen 10 personas más, el precio se reduciría 4 euros por persona. ¿Cuántas personas van a la excursión?

19.- Halla las dimensiones de un rectángulo de 60 m² de área y cuya diagonal mide 13 m.

20.- Un triángulo isósceles mide 32 cm de perímetro y la altura correspondiente al lado desigual mide 8 cm. Calcula los lados del triángulo.

21.- Halla 2 números cuya suma es 23 y su producto, 130.

22.- Descompón el número 15 en 2 sumandos tales que el triple del cuadrado del primero y el doble del segundo sumen 255.

23.- Para vallar una finca rectangular de 600 m² de área, se han utilizado 100 m de cerca. Calcula las dimensiones de la finca.

24.- La suma de los cuadrados de 2 números positivos es 52. Halla dichos números, sabiendo además que el mayor excede al menor en 2.

25.- Descompón el número 15 en 2 sumandos cuyos cuadrados difieran en 45 unidades.

PROBLEMAS REPASO ECUACIONES Y SISTEMAS

1. Un padre tiene 47 años y su hijo 11. ¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea el triple que la del hijo?

2. Dos ciclistas avanzan uno hacia otro por una misma carretera. Sus velocidades son de 20 Km/h y 15 Km/h. Si les separa una distancia de 78 Km, ¿Cuánto tardarán en encontrarse?

3. En un rectángulo la base mide 18 cm más que la altura y el perímetro mide 76 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

4. Hallar la edad de una persona sabiendo que si al cuadrado se le resta el triple de la edad resulta 9 veces esta.

5. Un rectángulo tiene 24 m de perímetro y 35 m² de área. Halla sus dimensiones.

6. Si a un lado de un cuadrado se le alarga en 2 m y al lado contiguo en 7 m, obtenemos un rectángulo cuya área es 22 m² más que el doble del área del cuadrado. Calcula el lado del cuadrado.

7. Luís le dice a Eva: Yo tengo el doble de euros que tú. Si Eva le contesta: Entre los dos tenemos 12 euros, ¿Cuántos euros tiene cada uno?

8. Calcula tres números impares consecutivos cuya suma sea 21.

9. Juan le preguntó a María cuántos años tenía y ésta le respondió: “El doble de los años que tenía hace 15 años más los que tengo ahora son el triple de los que tenía hace 10 años”. ¿Cuántos años tiene María?

10. Calcula la altura y la base de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 10 cm y la altura es 2 cm más larga que la base.

11. Un fabricante de bombillas gana 0,60 € por cada bombilla que sale de fábrica, pero pierde 0,80 € por cada una que sale defectuosa. Un determinado día en el que fabricó 2.100 bombillas obtuvo un beneficio de 966 €. ¿Cuántas bombillas buenas fabricó ese día?

12. Hace 5 años, la edad de Sonia era triple que la de Roberto, y dentro de 10 años será doble. ¿Qué edad tiene cada uno?

13. En un concierto benéfico se venden todas las entradas y se recaudan 23 mil dólares. Los precios de las entradas son 50 dólares las normales y 300 dólares las vip.

Calcular el número de entradas vendidas de cada tipo si el aforo del establecimiento es de 160 personas.