

TEMA 6: ECUACIONES Y SISTEMAS

- Una **ecuación** expresa, mediante una igualdad algebraica, una relación entre cantidades cuyo valor, de momento no conocemos. Es una igualdad que se cumple solo para algunos valores de la **incógnita**, en otros casos para ninguno, otros para todos los valores de x .
- Las **soluciones** de una ecuación son los valores que hacen cierta la igualdad.
- **Resolver** una ecuación es hallar su solución, o llegar a la conclusión de que no tiene.

1. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE 1º GRADO

Una **ecuación de primer grado** es aquella en la que aparecen expresiones algebraicas de grado 1. Los pasos para resolver una ecuación de 1º grado son los siguientes:

- 1º Quitar paréntesis.
- 2º Quitar denominadores (se multiplican los dos miembros de la igualdad por el mcm).
- 3º Reducir cada miembro (operar).
- 4º Trasponer términos (las incógnitas a un lado de la igualdad, números al otro).
- 5º Despejar la incógnita.
- 6º Comprobar.

Las ecuaciones de primer grado, también llamadas ecuaciones lineales, pueden tener:

- a) **1 única solución**. Tal es el caso de una sencilla ecuación como $3x = 9$
- b) **Ninguna solución**. Tal es caso de las ecuaciones que, tras realizar los pasos que debemos seguir para su resolución, llegamos a una igualdad del tipo $0x = K$ (siendo "k" cualquier valor real conocido)
- c) **Infinitas soluciones**. Tal es caso de ecuaciones que, tras realizar los pasos que debemos seguir para su resolución, llegamos a una igualdad del tipo $0x = 0$. Se trata pues de una igualdad que se cumple para cualquier valor de la incógnita. A este tipo de expresiones se les llama **identidad**.

2. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE 2º GRADO

Las **ecuaciones de segundo grado** son de la forma $ax^2+bx+c=0$ con $a \neq 0$ y, b y c conocidos.

- Ecuaciones **completas**: $b \neq 0$ y $c \neq 0$ se resuelven utilizando la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Si $b^2 - 4ac = 0$ hay una solución
- Si $b^2 - 4ac < 0$ no hay solución
- Si $b^2 - 4ac > 0$ hay dos soluciones
- Ecuaciones **incompletas**
 - Si $b=0$ entonces tenemos $ax^2+c=0$, para resolverla, despejamos x^2 , y luego x .
 - Si $c=0$ entonces tenemos $ax^2+bx=0$, para resolverla, sacamos factor común x : $ax^2+bx=0 \rightarrow x(ax+b)=0 \rightarrow$
 $x=0$
 $ax+b=0 \rightarrow x = \frac{-b}{a}$

Antes de aplicar la fórmula tenemos que:

1º Quitar paréntesis.

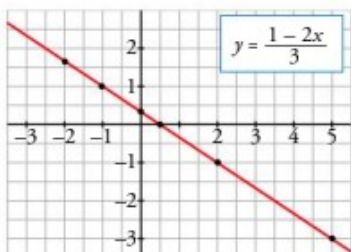
2º Quitar denominadores.

3º Colocar la ecuación resultante de la forma $ax^2+bx+c=0$

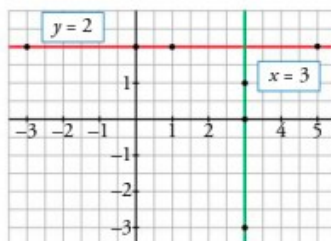
4º Resolver la ecuación, dependiendo si es completa o incompleta, aplicar uno u otro caso.

3. ECUACIÓN LINEAL CON DOS INCÓGNITAS

- Una ecuación es **lineal** si se puede escribir de la forma: $ax+by=c$, donde a , b y c son números reales.
- La **solución** de una ecuación lineal con dos incógnitas es todo par de valores (x,y) que hacen cierta la igualdad. Por ejemplo, $2x+3y=1$ es una ecuación lineal con dos incógnitas. Para el par $x=5$ e $y=-3$, se verifica la igualdad. Se pueden buscar más soluciones, tiene infinitas soluciones.
- Una ecuación lineal con dos incógnitas tiene **infinitas soluciones**.
- Las ecuaciones lineales pueden **representarse**, usando las soluciones como puntos del plano que después unimos y obtenemos una recta.



x	-1	2	5
y	1	-1	-3



$y = 2 \rightarrow 0x + y = 2$					
x	-3	0	1	5	...
y	2	2	2	2	2

$x = 3 \rightarrow x + 0y = 3$					
x	3	3	3	3	...
y	-3	0	1	5	...

1. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Varias ecuaciones forman un **sistema** cuando pretendemos encontrar las soluciones comunes a todas ellas.
- Gráficamente, la **solución de un sistema** de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es el **punto de corte de las rectas** que lo forman.

Veamos cuántas soluciones puede tener un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

- **Sistema incompatible** → No tiene solución (las rectas no se cortan, son paralelas)
- **Sistema compatible indeterminado** → Tiene infinitas soluciones (ambas rectas son la misma)
- **Sistema compatible determinado** → Tiene una única solución (las rectas se cortan en un punto)

1.1- Método de sustitución

- Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y se sustituye en la otra. Se obtiene así una nueva ecuación con una sola incógnita.
- Se resuelve la nueva ecuación, obteniendo el valor de una de las incógnitas.
- Se calcula la otra incógnita, llevando el valor de la conocida a la expresión de la que se despejó inicialmente.

Resolver por sustitución este sistema:
$$\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

- Despejamos y en la primera ecuación (es lo más fácil), sustituimos en la segunda y resolvemos:

$$y = 13 - 3x \rightarrow 2x + 3(13 - 3x) = 4 \rightarrow x = 5$$

- Sustituimos el valor $x = 5$ en la ecuación en la que y aparecía despejada.

$$y = 13 - 3x \rightarrow y = 13 - 3 \cdot 5 \rightarrow y = -2$$

- La solución del sistema es $x = 5$, $y = -2$.

1.2- Método de igualación

- Se despeja la misma incógnita de las dos ecuaciones y se igualan las expresiones obtenidas, obteniendo una nueva ecuación con una sola incógnita.
- Se resuelve la nueva ecuación y se continúa como en el método anterior, sustituyendo en cualquiera de las despejadas.

Resolver por igualación este sistema:
$$\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

- Despejamos y en las dos ecuaciones, igualamos los resultados y resolvemos:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y = 13 \rightarrow y = 13 - 3x \\ 2x + 3y = 4 \rightarrow y = \frac{4 - 2x}{3} \end{array} \right\} 13 - 3x = \frac{4 - 2x}{3} \rightarrow x = 5$$

- Sustituimos en cualquiera de las ecuaciones en las que y aparece despejada:

$$y = 13 - 3x \rightarrow y = 13 - 3 \cdot 5 \rightarrow y = -2$$

- La solución del sistema es $x = 5$, $y = -2$.

1.3- Método de reducción

- Se multiplica cada ecuación por el número que convenga para que los coeficientes de ambas queden igualados pero con signos opuestos. Al sumarlas, se obtiene una nueva ecuación con una sola incógnita.
- Se resuelve la nueva ecuación.
- El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las ecuaciones originales.

Resolver por reducción este sistema:
$$\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

- Multiplicamos la primera ecuación por (-3) , dejando la segunda como está.
Después, sumamos ambas y resolvemos:

$$\begin{cases} 3x + y = 13 & \xrightarrow{\times(-3)} & -9x - 3y = -39 \\ 2x + 3y = 4 & \xrightarrow{} & 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

$$\text{Sumando: } \begin{array}{r} -9x \\ 2x \\ \hline -7x \end{array} \quad \begin{array}{r} -39 \\ 4 \\ \hline -35 \end{array} \rightarrow x = \frac{-35}{-7} \rightarrow x = 5$$

- Sustituimos el valor $x = 5$ en cualquiera de las ecuaciones iniciales. En este caso, es más fácil en la primera:

$$3 \cdot 5 + y = 13 \rightarrow y = 13 - 15 \rightarrow y = -2$$

- La solución del sistema es $x = 5$, $y = -2$.