

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una **expresión algebraica** es una serie de números y letras relacionados mediante los signos de las operaciones aritméticas.

1. Expresa algebraicamente:

- a) El doble de un número
- b) Un múltiplo de 3
- c) El cuadrado de un número
- d) El cubo de un número
- e) La diferencia de un número y 7
- f) La suma de un número y su doble
- g) La mitad de un número más 5
- h) El cuadrado de un número más dos

2. Escribe la expresión algebraica que corresponde en cada caso:

- a) Un número par
- b) Un número impar
- c) Un número múltiplo de 2 y de 3
- d) La suma de un número más su siguiente

3. Traduce a lenguaje algebraico:

- a) El producto de dos números
- b) La mitad de un número más el triple de otro
- c) La raíz cuadrada de la suma de dos números

4. Lee atentamente los enunciados de cada apartado y exprésalos algebraicamente.

- a) El doble de la suma de dos números
- b) La suma del doble de un número más otro
- c) El triple de la diferencia de dos números
- d) La diferencia de un número menos el triple del otro
- e) El cuadrado de la suma de dos números
- f) La suma de los cuadrados de dos números
- g) La mitad de la suma de un número más otro
- h) La suma de la mitad de un número más otro

5. Expresa en lenguaje algebraico:

- a) La edad de Luis dentro de 5 años si hoy tiene x años.
- b) El perímetro de un rectángulo si uno de los lados mide el doble que el otro.
- c) La distancia que le falta recorrer a un ciclista si de n kilómetros que tiene la etapa ha hecho r .
- d) El dinero que hay que pagar por un pantalón que cuesta p euros si se aplica un descuento del 20%.
- e) Los kilos de manzanas que se pueden comprar con n euros si 1 kg cuesta 1,2€.
- f) El área de un triángulo si la altura correspondiente a uno de los lados mide el triple que ese lado.

6. Escribe un enunciado que se corresponda con cada expresión algebraica:

- a) $a + 2b$
- b) $7 - 5b$
- c) $2 \cdot (x + 4)$
- d) $(a - b)^2$
- e) $3 \cdot (n^2 - n)$

VALOR NUMÉRICO

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el número obtenido al sustituir las letras por números determinados y efectuar las operaciones indicadas.

7. Un profesor calcula la nota de matemáticas de cada uno de sus alumnos y alumnas aplicando lo siguiente:

- A -> nota del cuaderno (10%)
- B -> nota de clase (20%)
- C -> nota del examen (60%)
- N -> nota examen global (10%)

Si un alumno ha obtenido un 8 en el cuaderno, un 7 en clase y un 6 en el examen, ¿qué calificación global obtendrá?

8. Calcula el valor numérico de $3x+2$ para a) $x=0$ b) $x=-2$ c) $x=0,5$

9. Calcula el valor numérico de cada expresión:

- a) $3x^3 - 3x$ para $x=-1$
- b) x^2+5 para $x=2$
- c) $2x^2 + 3x - 1$ para $x = -2$
- d) $12 - 3x$ para $x = -1$

10. Calcula el valor numérico de cada expresión para los valores dados de las indeterminadas:

- a) $5a+3b$ para $a=2$ y $b=-2$
 b) $3a-2b^2+4ab$ para $a=1$ y $b=-3$
 c) m^2+p^2 para $m=-2$ y $p=1$

MONOMIOS

Un **monomio** en una indeterminada x es una expresión algebraica de la forma ax^n ($a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$).

11. Indica cuáles de las siguientes expresiones son monomios:

- a) $3x+2$ b) $-2n+1$ c) a^2+b d) $-3x$ e) $-4xy$ f) $3x^2+x$

12. Indica el coeficiente, la parte literal y el grado de cada monomio:

MONOMIO	COEFICIENTE	PARTE LITERAL	GRADO
$4x^3$			
$-2x$			
a^7			
$-b$			
$-3x^3y$			
$2xy$			
m^2n^3			
$\frac{2}{5}x^2$			
$\frac{3x}{2}$			

13. ¿Qué pareja de monomios son semejantes?

- a) ab^2 y a^2b
 b) x^2y^3z y $-2x^2y^3z$
 c) $-2ab^3$ y b^3a
 d) $3yzx$ y $4zxy$

5. Lenguaje algebraico

14. ¿Cuál de estas expresiones algebraicas se puede reducir a un solo monomio?

- a) $3x + 2x$ b) $3x + 2x^2$ c) $4xy^2z - 3zy^2x$

15. Reduce cuando sea posible a un solo monomio:

- a) $7x - 10x$
b) $-3n - 2n$
c) $x^2 + 3x^2$
d) $0,5xy - 1,5xy$
e) $2ab + 5a^3b$
f) $m^2 - m^2$
g) $6ab^2 + 8ab^2$

OPERACIONES CON MONOMIOS

16. Opera y reduce:

- a) $4x - 2x^2 + 3x$
b) $3y + 2xy - 4y + xy$
c) $-x + 3 + 4x - 1 - 2x$
d) $5x^2y + 7xy + xy - xy^2 + xy^2$

17. Realiza los siguientes productos:

- a) $3x^2 \cdot 4xy^3$
b) $(-ab) \cdot (-2a^2b)$
c) $12xy^2z \cdot x^3yz$

18. Calcula estos cocientes:

- a) $12x^2y : xy$
b) $(-2a^5b^4) : (a^3b)$
c) $(-9a^3bc^2) : (-3a^2bc)$

19. Expresa como suma y resta de monomios:

- a) $2x \cdot (3x^2 + 5xy - y^3)$
b) $3x^2 \cdot (5x^3 - 3x + 2)$
c) $a^2b \cdot (b^3 - 2ab + 5ab^2)$
d) $-2y^2 \cdot (xy^3 - 3xy + x^2y)$

POLINOMIOS

Un **polinomio** es una suma de monomios.

20. Indica el número de términos, el grado y el término independiente de los siguientes polinomios y, en su caso, ordena sus términos:

- a) $P(x) = -4x^2 + 3x^3 - 5$
- b) $Q(x) = 2x - 4$
- c) $R(x) = 2x^4 + 7x^6 - 3x^2 + x$
- d) $T(x) = 8$
- e) $S(x) = 3x^4 - 12$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

21. Dados los polinomios

$$P(x) = 3x^2 + 2x - 1 \quad Q(x) = -5x^2 + 3x - 4 \quad R(x) = 3x^3 + 2x - 1 \quad S(x) = -4x^4 + x^3 + x^2$$

Realiza las siguientes operaciones:

- a) $P(x) + Q(x)$
- b) $R(x) - P(x)$
- c) $S(x) + 2R(x) - 3P(x)$

22. Dados los polinomios

$$P(x) = 3x^2 + 2x - 1 \quad Q(x) = -5x^2 + 3x - 4 \quad R(x) = 3x^3 + 2x - 1 \quad S(x) = -4x^4 + x^3 + x^2$$

Realiza las siguientes operaciones:

- a) $P(x) \cdot Q(x)$
- b) $3 \cdot R(x) - Q(x)$
- c) $P(x) \cdot [Q(x) - S(x)]$
- d) $[P(x)]^2$

23. Calcula los valores de a, b y c en esta resta de polinomios:

$$(5x^3 + 3x^2 + ax + 3) - (bx^2 - c) = 5x^3 + x^2 + 6x - 8$$

24. Extrae factor común en cada una de las siguientes expresiones

- a) $5x^2 - 5y$
- b) $3ab + 2^a$
- c) $4x^2 - 8x$
- d) $5ab + 6ac - 3ac$
- e) $3xy^2 + 5xy$
- f) $3a - 9a^2$
- g) $xy - xy^2 + x^2y$

PRODUCTOS NOTABLES

Cuadrado de una suma:	$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
Cuadrado de una diferencia:	$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
Suma por diferencia:	$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

25. Calcula:

- a) $(2x + 1)^2$
- b) $(3x-2)^2$
- c) $(2x - 3y)^2$
- d) $(2a + b)^2$
- e) $(x - 1)^2$

26. Transforma en un producto notable:

- a) $x^2 + 2x + 1$
- b) $9x^2 + 6x + 1$
- c) $25x^2 + 20x + 4$
- d) $x^2 - 2x + 1$
- e) $4x^2 - 4x + 1$
- f) $9x^2 - 12x + 4$

La operación de **sacar factor común** de varios sumandos consiste en aplicar la propiedad distributiva:

$$a \cdot x \pm a \cdot y = a \cdot (x \pm y)$$

ACTIVIDADES DE REPASO

1. Razona la verdad o falsedad de las siguientes igualdades:

(a) $x \cdot x = 2x$

(b) $x^2 \cdot x^3 = x^5$

(c) $x^2 + x^3 = x^5$

(d) $x^3 = 3x$

[Sol: (a) Falso (b) Verdadero (c) Falso (d) Falso]

2. Dado el polinomio: $4x^3 - 2x^2 + x + 1 - 3x^3 + x^2 - x - 7 - x^3 - 4x^2 + 3x - 5$.

(a) Exprésalo en forma reducida.

(b) Indica su grado.

[Sol: (a) $-5x^2 + 3x - 11$ (b) 2]

3. En cada uno de los siguientes monomios halla el grado y el valor numérico para los valores $x=-1$, $y=-2$:

(a) $-x^2y$

(b) $3y^3$

(c) $5x$

(d) $3x^3y^2$

(e) $-5x^{11}y$

[Sol: (a) 3; -2 (b) 3; -24 (c) 1; -5 (d) 5; -12 (e) 12; 10]

4. Efectúa las siguientes operaciones con monomios:

(a) $3x^2 + \frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + \frac{1}{3}x^3$

(b) $5x^2 \cdot x + \frac{3x^3}{5} - \frac{6x^6}{3x^3}$

(c) $\frac{(3x^5)(10x^3)}{(6x)(7x^4)}$

[Sol: (a) $-2x^2 + 5x^3/6$ (b) $18x^3/5$ (c) $5x^3/7$]

5. Razona la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) $(3x^2) \cdot (4x^4) = 12x^8$

(c) $x^6 / x^3 = x^2$

(e) $x^2 + x = 2x^3$

(b) $2x^2 + x^3 = 3x^5$

(d) $x^6 / 3x^3 = 3x^3$

[Sol: Son todas falsas]

6. Escribe los siguientes polinomios en forma reducida y ordenada, e indica su grado:

(a) $2x + x^2 - 7 + x + 8 - x^2$

(c) $7x^2 - x + 8 + 4x - x^2$

(b) $-x^3 + 2x^2 - 5x + 4 - x^2 + 3x$

(d) $5x^2 - 3x + 8 - 5x^2 + 7$

[Sol: (a) $3x + 1$; 1 (b) $-x^3 + x^2 - 2x + 4$; 3 (c) $6x^2 + 3x + 8$; 2 (d) $-3x + 15$; 1]

7. Halla el valor numérico del polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$ para los valores de x :

(a) $x = 5$

(b) $x = -1$

(c) $x = -2$

(d) $x = 1/2$

(e) $x = -2/3$

[Sol: (a) 171 (b) 3 (c) 3 (d) 9/8 (e) 61/27]

8. Si $P(x) = 3x^2 - 5x + 3$; $Q(x) = 7x^4 - 4x^3 + 6x - 10$; $R(x) = 5x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 8x + 7$, calcula:

(a) $P(x) + Q(x) + R(x)$

(b) $P(x) - Q(x) + R(x)$

(c) $P(x) - Q(x) - R(x)$

[Sol: (a) $12x - 10x^3 + 6x^2 - 7x$ (b) $-2x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 19x + 20$ (c) $-12x^4 + 10x^3 - 3x + 6$]

9. Efectúa:

(a) $(-9x^3 + x - 1) \cdot (-7x^2)$

(c) $(x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 1) \cdot (2x^2 - 3x + 2)$

(b) $(x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 2) \cdot (x + 5)$

[Sol: (a) $63x^5 - 7x^3 + 7x^2$ (b) $x^5 + 6x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 17x + 10$ (c) $2x^6 - 9x^5 + 15x^4 - 22x^3 + 21x^2 - 13x + 2$]

10. Dados los polinomios : $P(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 4$, $Q(x) = 3x^3 - 6x^2 - 5$, $R(x) = -8x^4 - 4x^3 + 2x$, $S(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$, efectúa las siguientes operaciones :

(a) $R(x) + S(x)$ (b) $P(x) - Q(x)$ (c) $P(x) \cdot x^2$ (d) $S(x) \cdot Q(x)$

[Sol: (a) $-7x^4 - 3x^3 + 2x + 1$ (b) $-2x^3 + x^2 + 6x + 1$ (c) $x^5 - 5x^4 + 6x^3 - 4x^2$ (d) $3x^7 - 9x^6 + 9x^5 - 11x^4 + 2x^3 + x^2 + 5$]

11. Utilizando los polinomios del ejercicio anterior, halla el valor numérico de:

(a) $P(x)$ para $x=1$ (b) $Q(x)$ para $x=-2$ (c) $R(x)$ para $x=1/2$ (d) $S(x)$ para $x=-2/3$

[Sol: (a) -2 (b) -53 (c) 0 (d) $-5/81$]

12. Dados los polinomios $A(x) = 2x^2 + 3x - 1$; $B(x) = 3x - 7$; $C(x) = 4x^3 - 5x + 2$, calcula:

(a) El valor numérico de $A(x)$ para $x = -2$. (c) $C(x) - A(x)$ (d) $A(x) \cdot B(x)$
(b) $A(x) + C(x)$

13. Desarrolla los siguientes productos notables :

(a) $(3x + 8)^2$ (c) $(x/2 + 8)^2$ (e) $(2x/3 + 1/2)^2$ (g) $(4x - 3)^2$
(b) $(4/3 - 3x)^2$ (d) $(5 - 2x)(5 + 2x)$ (f) $(3x - 1/3)(3x + 1/3)$

[Sol: (a) $9x^2 + 64 + 24x$ (b) $16/9 + 9x^2 - 8x$ (c) $x/4 + 64 + 8x$ (d) $25 - 4x^2$ (e) $4x^2/9 + 1/4 + 2x/3$ (f) $9x^2 - 1/9$ (g) $16x^2 + 9 - 24x$]

14. Expresa mediante un producto notable :

(a) $4x^4 - 1$ (b) $9x^2 - 49$ (c) $16x^2 - 4$

[Sol: (a) $(2x^2 + 1)(2x^2 - 1)$ (b) $(3x + 7)(3x - 7)$ (c) $(4x + 2)(4x - 2)$]

15. Saca factor común en las siguientes expresiones:

(a) $6x + 15x^2$ (b) $3x + 15x^2$ (c) $2x^3 - 4x^5 + 6x^4$ (d) $15 \cdot (x-3) \cdot x^2 - 10(x-3) \cdot x$
(e) $2x^3(x+2) - 4x^2(x+2)$ (f) $25 \cdot (x-1) \cdot x^3 - 15(x-1) \cdot x^2$

[Sol: (a) $3x(2+5x)$ (b) $3x(1+5x)$ (c) $2x^3(1-2x^2+3x)$ (d) $5x(x-3)(3x-2)$ (e) $2x^2(x+2)(x-2)$ (f) $5x^2(x-1)(5x-3)$]

16. Saca factor común en la expresión: $a^3x^2 - a^2x^3 + a^2x^2$

[Sol: $a^2x^2(a - x + 1)$]

17. Calcula las siguientes potencias, aplicando las fórmulas de las identidades notables:

(a) $(2x + 3)^2$ (b) $(3x - 1/3)^2$ (c) $(2x^2 + 3)(2x^2 - 3)$

[Sol: (a) $4x^2 + 9 + 12x$ (b) $9x^2 + 1/9 - 2x$ (c) $4x^4 - 9$]

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Efectuar la división de un polinomio *dividendo*, $D(x)$, por un polinomio *divisor*, $d(x)$, que ha de ser distinto de cero y con grado menor o igual que el dividendo, consiste en hallar un polinomio *cociente*, $C(x)$, y un polinomio *resto*, $r(x)$, que cumplan:

$$D(x) = d(x) \cdot C(x) + r(x) \quad \text{con} \quad 0 \leq \text{Grado de } r(x) < \text{grado de } d(x).$$

1.- Efectúa las divisiones:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad (10x^4) : (5x^2) & \text{(c)} \quad (4x^2 - 5x + 6) : (x + 7) \quad \text{(e)} \quad (2x^3 - 3x + 5) : (2x + 1) \\ \text{(b)} \quad (-x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 5x + 4) : x^3 & \text{(d)} \quad (x^4 + 1) : (x^2 + 1) \end{array}$$

2. Efectúa las divisiones:

$$\begin{array}{ll} \text{(c)} \quad (x^4 - 2x^2 + 6x) : (x^2 - x + 3) & \text{(b)} \quad \left(3x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + 2 \right) : (3x + 1) \end{array}$$

3. Halla el valor de a para que el polinomio $P(x) = x^3 - x^2 + a$ sea divisible por $x + 2$.

⇒ En las divisiones de polinomios, cuando el divisor es de la forma $(x - a)$, siendo " a " un número cualquiera, se puede aplicar la **regla de Ruffini**.

4. Utilizando la regla de Ruffini, haz las siguientes divisiones hallando cociente y resto:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad (3x^2 - 2x + 1) : (x - 2) \\ \text{b)} \quad (5x^3 + 3x^2 + x - 2) : (x + 3) \\ \text{c)} \quad (x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 2x + 1) : (x + 1) \\ \text{d)} \quad (x^4 - 6x^2 + 3) : (x + 5) \\ \text{e)} \quad (x^6 - 1) : (x + 1) \end{array}$$

TEOREMA DEL RESTO

El resto de la división de un polinomio dividendo $P(x)$ por el divisor $(x - a)$ es igual al valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x = a$, es decir: $P(a) = r$

1. Halla el resto de las siguientes divisiones sin efectuarlas:

- (a) $(x^4 - 5x^2 + 8x - 10) : (x - 3)$ (c) $(x^3 - 6x^2 + 5x) : (x - 1)$
 (b) $(x^7 - x^4 + 1) : (x + 2)$ (d) $(2x^5 - 5x^3 + 6) : (x - 1)$

[Sol: (a) 50 (b) -143 (c) 0 (d) 3]

2. Resuelve:

- (a) Halla m para que el resto de la división $(x^3 + mx^2 + 2x - 1) : (x - 3)$ sea 68.
 (b) Halla m para que el polinomio $P(x) = x^3 - x^2 + m$ sea divisible por $x + 2$.

[Sol: (a) $m = 4$ (b) $m = 12$]

3. En la división $(x^4 - 2x + a) : (x - 5)$, se pide el valor que ha de tomar **a** para los siguientes casos:

- (I) para que el resto sea 24
 (II) para que el resto sea -2
 (III) para que sea una división exacta.

4. En la división $(5x^4 - 2x^3 + cx^2 - 4) : (x - 2)$, se pide el valor que ha de tomar **c** para los siguientes casos:

- (I) para que el resto sea cero.
 (II) para que el resto sea $2/3$

5. Hallar el valor de **m** para que las siguientes divisiones sean exactas:

- (I) $(x^5 - 9x^2 + m) : (x + 1)$
 (II) $(x^4 - mx^2 + 3) : (x - 1/2)$
 (III) $(mx^3 - 5x + 3) : (x + 3)$
 (IV) $(mx^4 - 3x^3 + 2x + 4m) : (x - 2)$
 (V) $(1/3x^5 + m/3x^3 + mx^2 - 5) : (x + 3)$

ACTIVIDADES DE AMPLIACIÓN.

Halla m, n y p para que se cumpla: $(mx^2 + 7nx + p) + (x^2 + 2x + 5) = 3x^2 + 6x + 1$.

[Solución: $m=2, n=4/7, p=-4$]

2. Efectúa el producto: $\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x - 1\right) \cdot \left(\frac{-1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}\right)$

[Solución: $-\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{5}{12}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$]

6. Efectúa y saca factor común en el resultado: $(3x^2y - 6x^5y^3)^2$

[Solución: $9x^4y^2(1 + 4x^6y^4 - 4x^3y^2)$]