

TEMA 5: Expresiones algebraicas. Polinomios y productos notables.

Una **expresión algebraica** es cualquier combinación de números y letras relacionados entre sí por operaciones aritméticas.

Ejemplo: $3x^2 - x + 2$, $2a + \sqrt{b}$, $\frac{3x+1}{3x-2}$

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el resultado que se obtiene al sustituir las variables por números y operar.

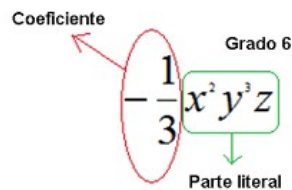
Por ejemplo: el valor numérico del polinomio $P(x) = x^3 - x^2 + 1$ para $x = -1$ es

$$P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 + 1 = -1 - 1 + 1 = -1$$

1. MONOMIOS

Un **monomio** es el producto de una parte numérica llamada coeficiente y una parte con letras y exponentes naturales llamada parte literal. Las letras de la parte literal reciben el nombre de variables y representan números de valor desconocido.

Se llama **grado** de un monomio al número de factores que forman su parte literal y se obtiene sumando los exponentes de la parte literal.



Dos monomios son **semejantes** cuando tienen idéntica parte literal. Por ejemplo, $\frac{-5}{2}xy^2$ y $100xy^2$ son monomios semejantes. También son semejantes $5yx^2$ con $3x^2y$.

1.1- Operaciones con monomios

- **Suma y resta:** sólo podemos sumar y restar monomios semejantes. Por ejemplo,
 $3xy - 4xy + 7xy = 6xy$
 $(x^4 - 7x^3 + 4x + 5) - (2x^3 - 8x^2 + 6x + 1) = x^4 - 9x^3 - 2x + 4$
- **Producto:** por un lado multiplicamos los coeficientes (número) y por otro la parte literal (letras), aplicando las propiedades de las potencias. $(2x) \cdot (3x^2) = 6x^3$
- **División:** por un lado dividimos los coeficientes (número) y por otro la parte literal (letras), aplicando las propiedades de las potencias.

$$12x^2 : 4x^2 = \frac{12x^2}{4x^2} = 3x^0 = 3 \cdot 1 = 3$$

2.- POLINOMIOS

Un **polinomio** es la suma de dos o más monomios no semejantes, cada uno de los monomios que lo forman se llaman términos.

Se llama **grado** de un polinomio al mayor de los grados de los monomios que lo componen.

Grado absoluto de un polinomio
(mayor grado absoluto de los términos)

$$\underbrace{8x^7y^3}_{GA=10} - \underbrace{3x^4y^4}_{GA=8} + \underbrace{6xy^2}_{GA=3}$$

GA = 10

Valor de un polinomio $p(x)$ para $x=a$ es el resultado de sustituir la x por a

Calculamos el valor de $p(x)=2x^4-7x^3+11x-2$ para $x=3$ $p(3)=2\cdot 3^4-7\cdot 3^3+11\cdot 3-2=4$

Si el valor numérico de un polinomio para $x=a$ es 0, entonces se dice que a es una **raíz** de dicho polinomio.

2.1- Operaciones con polinomios.

- **Suma y resta:** para sumar dos polinomios, tenemos que ir sumando los monomios que sean semejantes y dejamos indicada la operación de los monomios no semejantes.

Por ejemplo, $(x^4-7x^3+4x+5)-(2x^3-8x^2+6x+1)=x^4-9x^3-2x+4$

- **Producto:** Para multiplicar dos polinomios tenemos que multiplicar cada monomio del primero por cada monomio del segundo y operar los semejantes.

$$(x^2 + 3xy)(5y + 4x - 5) =$$
$$5x^2y + 4x^3 - 5x^2 + 15xy^2 + 12x^2y - 15xy$$
$$\boxed{17x^2y + 4x^3 - 5x^2 + 15xy^2 - 15xy}$$

- **Productos notables:**

I. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$	CUADRADO DE UNA SUMA
II. $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$	CUADRADO DE UNA DIFERENCIA
III. $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$	SUMA POR DIFERENCIA

- **División de polinomios:** La división de polinomios es similar a la división de números naturales. Al dividir polinomios se obtiene un cociente y un resto.

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 \quad | \quad x^2 + 3x - 2 \\
 \underline{-x^4 - 3x^3 + 2x^2} \\
 -5x^3 - 9x^2 + 30x \\
 \underline{5x^3 + 15x^2 - 10x} \\
 6x^2 + 20x - 20 \\
 \underline{-6x^2 - 18x + 12} \\
 2x - 8
 \end{array}$$

3. REGLA DE RUFFINI

La **regla de Ruffini** es un método que nos permite dividir un polinomio entre un binomio del tipo $(x - a)$. Tendremos que realizar los siguientes pasos:

- 1) Escribimos los coeficientes del dividendo en orden decreciente. Si falta algún término completamos con ceros.
- 2) En la izquierda colocamos el opuesto del término independiente del divisor (a).
- 3) Bajamos el primer coeficiente.
- 4) Multiplicamos el valor de a por el primer coeficiente bajado y el resultado lo escribimos debajo del segundo coeficiente.
- 5) Sumamos el segundo coeficiente con el valor anotado debajo y escribimos el resultado en la línea inferior.
- 6) Repetimos el proceso hasta completar la fila inferior. El valor de la derecha es el del resto y los valores a su izquierda los coeficientes del cociente.

División clásica de Polinomios

$$\begin{array}{r}
 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 3 \quad | \quad x - 1 \\
 \underline{-5x^4 + 5x^3} \\
 2x^3 + 2x^2 \\
 \underline{-2x^3 + 2x^2} \\
 4x^2 - 7x \\
 \underline{-4x^2 + 4x} \\
 -3x + 3 \\
 \underline{+3x - 3} \\
 0
 \end{array}$$

División de Polinomios usando la Regla de Ruffini

	5	-3	2	-7	3
1		5	2	4	-3
	5	2	4	-3	0

$5x^3 + 2x^2 + 4x - 3$

Efectúa la siguiente división: $(-3x^5 + 4x^3 - 5x + 1) : (x - 2)$

1 En la primera fila colocamos los coeficientes del dividendo ordenados según las potencias decrecientes.

4 Los números de la segunda fila se consiguen multiplicando el término independiente del divisor por el último número conseguido de la tercera fila:

$2 \cdot (-3) = -6$ $2 \cdot (-6) = -12$
 $2 \cdot (-8) = -16$ $2 \cdot (-16) = -32$
 $2 \cdot (-37) = -74$

2	-3	0	4	0	-5	1
	-6	-12	-16	-32	-74	
	-3	-6	-8	-16	-37	-73

2 Término independiente e del divisor cambiado de signo

3 Coeficiente principal del dividendo

5 Suma de los números superiores.

6 Suma de los números superiores. Es el resto de la división.

7 Los coeficientes del polinomio cociente són los números de la tercera fila menos el último que es el resto. En este caso los coeficientes son: $(-3, -6, -8, -16, -37)$

Por tanto el cociente es $-3x^4 - 6x^3 - 8x^2 - 16x - 37$
 El resto es $R = -73$

4. RAÍCES DE UN POLINOMIO. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Las **raíces** de un polinomio $P(x)$ son los valores de x que lo hacen 0, es decir, las soluciones de la ecuación $P(x)=0$.

- Un polinomio de grado n tiene, como máximo, n raíces reales.
- Si un polinomio de coeficientes enteros tiene raíces enteras, estas son divisores del término independiente.

4.1- Factorización

Factorizar un polinomio es expresarlo como producto de dos o más polinomios del menor grado posible.

Hay polinomios que no se pueden factorizar, por ejemplo los de grado 1 y los que no tienen raíces reales. Estos polinomios se llaman **irreducibles**.

Para factorizar polinomios podemos utilizar las siguientes técnicas:

1. Extraer factor común: se utiliza cuando falta el término independiente.

Por ejemplo : $x^4 + 2x^3 = x^3(x+2)$, $3x^2 - 15x = 3x(x-5)$

2. Identidades notables: se usa cuando un polinomio se puede expresar como una identidad notable.

Ejemplo: $x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$, $x^2 - 36 = (x+6)(x-6)$

3. Teorema del factor y Ruffini: se usa cuando se puede calcular una raíz entera.

Por ejemplo, $x^2 - 3x + 2$

Buscamos las raíces enteras entre los divisores del término independiente que son 1, -1, 2 y -2.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto, la factorización del polinomio será:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

NOTA.- Si un polinomio de grado n tiene n raíces $x_1, x_2, \dots, x_n$ entonces su factorización es $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ siendo a el coeficiente del término de grado n .

Ejemplo: si tenemos un polinomio de segundo grado cuyo coeficiente de x^2 es 7 y tiene como raíces 1 y -3, su factorización será: $P(x) = 7(x - 1)(x + 3)$

5. FRACCIONES ALGEBRAICAS

Se llama **fracción algebraica** al cociente indicado de dos polinomios $\frac{x}{3x^2 - 5}, \frac{3x - 1}{x^2 + 6x - 3}$

Las fracciones algebraicas se comportan de forma muy similar a las fracciones numéricas

4.1- Simplificación

Para simplificar fracciones algebraicas, debemos tener el mismo **factor** en el numerador y en el denominador (dijimos factor, por lo que simplificamos en productos, nunca en sumas)

$$\frac{3x(x+1)^2}{6x^2(x+1)} = \frac{\cancel{3} \cancel{x} (\cancel{x+1})(x+1)}{\cancel{3} \cdot 2 \cdot x \cdot \cancel{x} \cdot (\cancel{x+1})} = \frac{x+1}{2x}$$