

## TEMA 4: SUCESIONES

### 1. SUCESIONES

Se llama **sucesión** a un conjunto de números dados ordenadamente de modo que se puedan numerar: primero, segundo, tercero,...

Ejemplo:

- a) 1, 5, 9, 13, 17, ... (sumar 4 al anterior)
- b) 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... (elevar al cuadrado)
- c) 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... (potencias de 2)
- d) 1, -3, 9, -27, 81, -243, ... (potencias de -3)

#### 1.1- Términos de una sucesión

Los elementos de la sucesión se llaman **términos** y se suelen designar mediante una letra con subíndice. EL subíndice de cada elemento indica el lugar que ocupa en la sucesión.

Ejemplo:

- a) 1, 5, 9, 13, 17, ...  $a_1=1, a_2=5, a_3=9$
- b) 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...  $b_1=1, b_2=4, b_3=9$
- c) 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...  $c_1=2, c_2=4, c_3=8$
- d) 1, -3, 9, -27, 81, -243, ...  $d_1=1, d_2=-3, d_3=9$

Se llama **término general** de una sucesión  $a$  ( y se simboliza por  $a_n$  ) a la expresión que representa un término cualquiera de esta.

Ejemplo:

- a) 1, 5, 9, 13, 17, ...  $a_n = a_{n-1} + 4$
- b) 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...  $b_n = n^2$
- c) 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...  $c_n = 2^n$
- d) 1, -3, 9, -27, 81, -243, ...  $d_n = (-3)^n$

#### 1.2- Sucesiones recurrentes

Las sucesiones cuyos términos se obtienen a partir de los anteriores se dice que están dadas en **forma recurrente**.

Un ejemplo de este tipo de sucesiones es la sucesión de **Fibonacci**, cuyos términos se obtienen sumando los dos anteriores 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

## 2. PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que se pasa de cada término a siguiente sumando un mismo número (positivo o negativo), al que se llama diferencia, **d**, de la progresión.

Ejemplos:

- a) 2, 5, 8, 11, 14, 17, ... (sumar 3 al anterior)
- b) 120, 140, 160, 180, ... (sumar 20 al anterior)
- c) 9, 7, 5, 3, 1, -1, -3, ... (restar 2 al anterior)

### 2.1- Término general de una Progresión Aritmética (PA)

Podemos obtener el **término general** de una progresión aritmética, a partir del primer término,  $a_1$  y la diferencia,  $d$ .

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_1 + 3d$$

...

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Ejemplos:

- a) 2, 5, 8, 11, 14, 17, ...  $a_n = 2 + (n-1) \cdot 3$
- b) 120, 140, 160, 180, ...  $a_n = 120 + (n-1) \cdot 20$
- c) 9, 7, 5, 3, 1, -1, -3, ...  $a_n = 9 + (n-1) \cdot (-2)$

### 2.2- Suma de los términos de una PA

Los números naturales forman una progresión aritmética de diferencia  $d=1$ , vamos a sumar los diez primeros números naturales  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

$$\begin{array}{r} S_{10} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\ + S_{10} = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2 \cdot S_{10} = 11 + 11 + 11 + 11 + \dots + 11 + 11 \end{array}$$

$$2 \cdot S_{10} = 11 \cdot 10 \rightarrow S_{10} = \frac{11 \cdot 10}{2} = \frac{110}{2} = 55$$

En una progresión aritmética de  $n$  términos, la suma de dos términos **equidistantes** de los extremos es **siempre la misma**.

Vamos a obtener la fórmula general para sumar los  $n$  primeros términos de una progresión aritmética

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$\text{Suma} \quad \rightarrow \quad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$\text{Suma invertida} \quad \rightarrow \quad S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (\dots) + (a_n + a_1)$$

Hay  $n$  paréntesis y el resultado de cada uno de ellos es  $a_1 + a_n$ . Por tanto:

$$2 \cdot S_n = n \cdot (a_1 + a_n) \quad \rightarrow \quad S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

### 3. PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que se pasa de cada término al siguiente multiplicando por un número fijo,  **$r$** , llamado razón.

Ejemplos:

- a) 3, 6, 12, 24, 48, ... (multiplicar por 2 el anterior)
- b) 3, 30, 300, 3000, ... (multiplicar por 1000 el anterior)
- c) 80; 8; 0,8; 0,08; ... (multiplicar por 1/10 el anterior)

#### 3.1- Término general de una PG

Podemos obtener el **término general** de una progresión geométrica, a partir del primer término,  $a_1$  y la razón,  $r$ .

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

$$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$$

$$a_4 = a_1 \cdot r^3$$

...

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

#### 3.2- Suma de los términos de una PG

Vamos a obtener la fórmula general para sumar los  $n$  primeros términos de una progresión geométrica

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Primero multiplico la suma por la razón, cada término queda multiplicado por la razón

$$S_n \cdot r = a_1 \cdot r + a_2 \cdot r + a_3 \cdot r + \dots + a_{n-2} \cdot r + a_{n-1} \cdot r + a_n \cdot r \rightarrow S_n \cdot r = a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot r$$

Ahora hacemos la siguiente resta:  $S_n \cdot r - S_n$

$$\begin{array}{r} S_n \cdot r = a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot r \\ - S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ \hline S_n \cdot r - S_n = -a_1 + a_n \cdot r \end{array}$$

Despejamos  $S_n$  ,  $S_n \cdot r - S_n = -a_1 + a_n \cdot r \rightarrow S_n \cdot (r-1) = -a_1 + a_n \cdot r \rightarrow S_n = \frac{-a_1 + a_n \cdot r}{r-1} \rightarrow$

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$$

### 3.2- Suma de los términos de una PG con $|r| < 1$

Tenemos la fórmula de la suma de las progresiones geométricas  $S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$  .

Si  $|r| < 1$ , la sucesión es decreciente y se aproxima a cero, por lo tanto el término  $a_n \cdot r$  se hace cada vez más pequeño y llega a ser insignificante si  $n$  es muy grande, por lo que desaparece. Eso se expresa así  $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$