

TEMA 2: POTENCIAS Y RAÍCES

1. POTENCIAS

Una **potencia** es una multiplicación de factores iguales, a^n es una potencia dónde a es la base y n es el exponente $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}}$

Vemos algunos ejemplos: $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$, $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$ y $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$

Al elevar un número negativo a una potencia:

- Si el **exponente es par**, el resultado es positivo $(-a)^{\text{par}} \rightarrow \text{positivo}$
- Si el **exponente es impar**, el resultado es negativo $(-a)^{\text{impar}} \rightarrow \text{negativo}$

1.1- Propiedades de las potencias

Propiedad	Enteros	Fracciones
Potencia de un producto	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n$
Potencia de un cociente	$(a : b)^n = a^n : b^n$	$\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n$
Producto de potencias con la misma base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$
Cociente de potencias con la misma base	$a^m : a^n = a^{m-n}$	$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$
Potencias de exponente cero	$a^0 = 1$	$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$
Potencia de otra potencia	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n \cdot m}$

1.2- Potencias de exponente negativo

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad , \quad a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \quad \text{y} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$$

2. NOTACIÓN CIENTÍFICA

Un número en **notación científica** consta de dos factores: un número decimal y una potencia en base 10: $N = a, bcd \dots 10^n$

- A **n** se le llama **orden de magnitud**.
 - Si **n** es positivo el número es “grande”.
 - Si **n** es negativo el número es “pequeño”.
- El número decimal es **mayor o igual que 1 y menor que 10**.
- La potencia de base 10 tiene exponente entero.

Por ejemplo 10^5 , $3,12 \cdot 10^{-2}$ o $5,7 \cdot 10^{23}$

2.1- Operaciones con números en notación científica

Vamos a recordar como multiplicar y dividir un número decimal por una potencia de 10, de exponente negativo o positivo. Si multiplicamos o dividimos números decimales por potencias de 10, es decir, 10, 100, 1000, etc. En el caso de estar multiplicando se corre la coma del número decimal hacia la derecha tantos lugares como ceros tenga el número por el que se está multiplicando. En el caso de dividir se corre la coma hacia la izquierda.

$9,34 \cdot 10 = 93,4$	$9,34 : 10 = 0,934$
$9,34 \cdot 10^2 = 9,34 \cdot 100 = 934$	$9,34 : 10^{-2} = 9,34 : 100 = 0,0934$
$9,34 \cdot 10^3 = 9,34 \cdot 1000 = 9340$	$9,34 : 10^{-3} = 9,34 : 1000 = 0,00934$

- **Cociente y producto**: para multiplicar o dividir dos números expresados en notación científica, por un lado multiplicamos o dividimos la parte decimal y por el otro las potencias de 10. Por ejemplo,
 $(4,25 \cdot 10^9) \cdot (5,6 \cdot 10^7) = (4,25 \cdot 5,6) \cdot (10^9 \cdot 10^7) = 23,8 \cdot 10^{16}$
- **Suma y resta**: para sumar y restar dos números expresados en notación científica, tenemos que preparar los sumandos para que tengan la misma potencia de base 10 y así sacar factor común. Por ejemplo,
 $1,43 \cdot 10^8 + 5,2 \cdot 10^7 = 14,3 \cdot 10^7 + 5,2 \cdot 10^7 = (14,3 + 5,2) \cdot 10^7 = 19,5 \cdot 10^7 = 1,95 \cdot 10^8$

Dados dos números escritos en notación científica, es mayor el que tenga mayor orden de magnitud. Si tienen el mismo orden de magnitud será mayor el que tenga mayor coeficiente.

3. RAÍCES Y RADICALES

La **raíz cuadrada** es la operación inversa de elevar al cuadrado: $\sqrt{a}=b \Leftrightarrow b^2=a$

La raíz cuadrada de un número tiene dos soluciones, la negativa y la positiva, $\sqrt{9}=3$ y $\sqrt{9}=-3$ ya que $3^2=(-3)^2=9$

3.1- Raíces n-ésimas

- Raíces cuadradas: $\sqrt{9}=3$
- Raíces **cúbicas**: $\sqrt[3]{8}=2$ ya que $2^3=8$
- **Otras** raíces: de la misma forma se pueden hacer raíces de índice superior a 3
Como $2^5=32$ entonces $\sqrt[5]{32}=2$

De forma general: $\sqrt[n]{a}=b \Leftrightarrow b^n=a$

En la expresión $\sqrt[n]{a}$, a n se le llama índice de la raíz, a a radicando, y toda la raíz radical.

Número de raíces

$a > 0 \rightarrow \begin{matrix} n \text{ par} : 2 \text{ raíces} \\ n \text{ impar} : 1 \text{ raíz} \end{matrix}$ $a < 0 \rightarrow \begin{matrix} n \text{ par} : \text{no solución} \\ n \text{ impar} : 1 \text{ raíz} \end{matrix}$ $a = 0 \rightarrow 1 \text{ solución}$

3.2- Propiedades de los radicales

Propiedad	Ejemplo
Relación entre potencias y radicales	$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ y $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $\sqrt[3]{2^8}=a^{\frac{8}{3}}$
Simplificación de radicales	$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n:d]{a^{m:d}}$ $\sqrt[5]{7^{10}}=\sqrt[5:5]{7^{10:5}}=7^2$
Producto de radicales	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a \cdot b}$ $\sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{21}$
División de radicales	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $\frac{\sqrt[7]{20}}{\sqrt[7]{5}}=\sqrt[7]{4}$
Potencia de un radicales	$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ $(\sqrt[7]{13})^2=\sqrt[7]{13^2}$
Raíz de un radical	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m \cdot n]{a}$ $\sqrt[6]{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[6 \cdot 3]{2}=\sqrt[18]{2}$

3.3- Operaciones con radicales

- Para **sumar o restar** radicales estos deben tener el mismo índice y radicando.
 $3\sqrt[5]{2}-8\sqrt[5]{2}+4\sqrt[5]{2}=-\sqrt[5]{2}$

- Para **multiplicar o dividir** radicales, o bien deben tener el mismo índice, o bien el mismo radicando.
 - Mismo índice: $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{6} = \sqrt[5]{12}$
 - Mismo radical: $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[10]{2} = 2^{\frac{1}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{10}} = 2^{\frac{1}{5} + \frac{1}{10}} = 2^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{2^3}$
- Extracción de factores fuera de la raíz**: Si el radicando descompuesto en factores tiene potencias de exponente igual
 $\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$

RELACIÓN POTENCIAS Y RAÍCES

Propiedad de las potencias		Propiedades de los radicales	
Potencia de un producto	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	Producto de radicales con el mismo índice	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
Potencia de un cociente	$(a : b)^n = a^n : b^n$	División de radicales con el mismo índice	$\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$
Producto de potencias con la misma base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	Producto de radicales con el mismo radicando	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}$
Cociente de potencias con la misma base	$a^m : a^n = a^{m-n}$	División de radicales con el mismo radicando	$\sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} : a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}}$
Potencia de otra potencia	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	Radical de un radical	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$