TEMA 10: AZAR Y PROBABILIDAD

1. TÉCNICAS DE RECUENTO. COMBINATORIA

La **combinatoria** es una parte de las Matemáticas que se encarga de estudiar los distintos agrupamientos que pueden realizarse con los elementos de un conjunto.

a) **Permutaciones sin repetición de n elementos**: posibles ordenaciones de un conjunto de n elementos distintos. Acción: **ordenar.**

$P_n = n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$. (se lee n factorial). Por convenio $0!=1$.

En la calculadora: con la tecla x! se calcula "factorial de x" , siendo x un número entero no negativo.

Ejemplo: ¿Cuántos números de 4 cifras distintas pueden escribirse con los dígitos 2, 3 , 5 y 8?

Solución: $P_4 = 4! = 4\cdot 3 \cdot 2\cdot 1 = 24$ números

b) **Variaciones sin repetición de n elementos tomados de r en r**: posibles muestras ordenadas de r elementos distintos que se pueden extraer de un conjunto de n elementos (r≤n) Acción: **elegir con orden.**

$V_{n,r} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-r+1)$

En la calculadora: con la tecla nPr se calcula $V_{r,\, n}$

Ejemplo: En una carrera con 10 atletas, ¿de cuántas formas distintas podrían repartirse las medallas de oro, plata y bronce?

Solución: $V_{10,3} = 10\cdot 9\cdot8 = 720$ formas distintas

c) **Combinaciones sin repetición de m elementos tomados de n en n**: posibles muestras sin orden de r elementos distintos que se pueden extraer de un conjunto de n elementos (n≤m). Acción: **elegir sin orden.**

$$C(m,n) = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$$

En la calculadora: con la tecla nCr se calcula la combinación sin repetición.

Ejemplo: En una reunión de 10 personas debe nombrarse una comisión formada por tres de ellas. ¿Cuántas comisiones distintas podrían nombrarse?

Solución: $C_{(10,3)}= \frac{10!}{(10-3)!\cdot 3!} = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = \frac{3628800}{5040\cdot 6} = 120$ formas de elegir a 3 personas de un grupo de 10.

2. LEYES DE AZAR. EXPERIMENTOS ALEATORIOS

Un experimento se llama **aleatorio** cuando no se puede predecir el resultado. Hay una serie de características que caracterizan este tipo de experimentos:

- En las mismas condiciones iniciales, pueden dar lugar a diferentes resultados finales.
- Todos los resultados posibles se conocen por adelantado.
- En general, el experimento puede repetirse en las mismas condiciones indefinidamente.

Si realizamos un experimento, pero podemos predecir el resultado, se llama **experimento determinista.**

Ejemplos:

- Experimentos deterministas: Averiguar la hipotenusa de un triángulo rectángulo, conocidos los catetos.
- Experimento aleatorio: Resultado de lanzar una moneda o un dado, averiguar el resultado de un partido de baloncesto, antes de que se juegue.

2.1- Espacio muestral, suceso y espacio de sucesos

Dado un experimento aleatorio, se llama **espacio muestral** y se designa por E, al conjunto de todos los resultados posibles distintos de dicho experimento aleatorio.
A los elementos que forman el espacio muestral E, se les conoce como **sucesos elementales**.
Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral. Se representan con letras mayúsculas.
El **espacio de sucesos**, S, es el conjunto formado por todos los sucesos asociados a ese experimento.

Ejemplos:

- Lanzar una moneda al aire E={ +, c }, siendo + el suceso elemental “sacar cruz” y c el suceso elemental “sacar cara”
- Lanzar un dado al aire E={1, 2, 3, 4, 5, 6}
- Averiguar el resultado de un partido de baloncesto E={gana, pierde, empata}

2.2- Tipos de sucesos

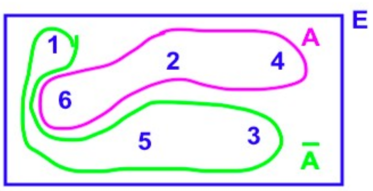
Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral. Tenemos dos tipos de sucesos:

- **Elementales**: Cada uno de los posibles resultados del espacio muestral.
- **Compuestos**: Formado por dos o más sucesos elementales.
- Suceso **imposible(ϕ)**→ No posee ningún suceso elemental.
- Suceso **seguro (E)** → Se cumple siempre.
- El **suceso contrario o complementario** de un suceso A lo denotamos por $\bar{A}$ (es el que se cumple cuando no se cumple A). $\bar{A}$ Está formado por todos los sucesos elementales de E que no están en A.

Ejemplo: Si tiramos un dado al aire el espacio muestral es E={1, 2, 3, 4, 5, 6}

- Los sucesos elementales serían: {1}, {2}, {3}, {4}, {5} y {6}
- Los sucesos compuestos podían ser: Obtener un número par {2, 4, 6}
  Obtener un número impar {1, 3, 5}
  Obtener un número mayor que 3 {4, 5, 6}
- Un suceso imposible : Obtener un 7 {ϕ}
- Un suceso seguro: Obtener un número menor o igual a 6 : {1, 2, 3, 4, 5, 6} = E

Ejemplo: Sea A el suceso “sacar número par”, el suceso contrario $\bar{A}$ será “sacar número impar”.
A = {2, 4, 6} y $\bar{A}$ ={1, 3, 5}

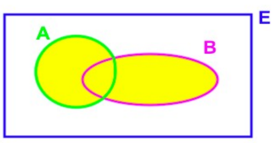


Para representar sucesos son de gran utilidad os **diagramas de Venn.**

2.3- Operaciones con sucesos

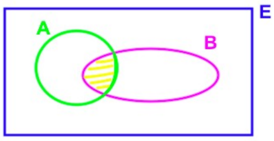
Los sucesos pueden operarse obteniendo otros sucesos nuevos.

- **Unión**: Unión de dos sucesos A y B, $A \cup B$, es el suceso que se verifica cuando lo hace A o B, o ambos.

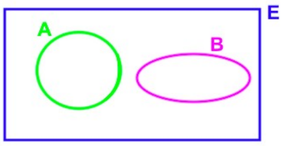


$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \, o \, x \in B\}$$

- **Intersección:** Intersección de dos sucesos A y B, $A \cap B$, es el suceso que se verifica cuando lo hace A y B a la vez. El suceso $A \cap B$ está formado por os sucesos de A y de B.

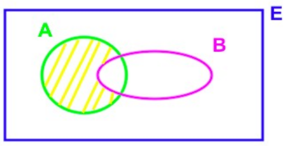


$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \ y \ x \in B\}$$



Cuando $A \cap B$ = ϕ, se dice que el suceso A y B son **incompatibles.** En caso contrario diremos que A y B son compatibles.

- **Diferencia**: Diferencia de A y B, $A - B$, es el suceso que se verifica cuando lo hace A pero no B. Está formado por los sucesos de A que no están en B.



$$A - B = \{x \in E / x \in A \ y \ x \notin B\}$$

$$A - B = A - (A \cap B) = \bar{B} \cap A$$

<u>Ejemplo:</u> Consideramos el experimento aleatorio "lanzar un dado", E={1, 2, 3, 4, 5, 6} y los sucesos A="sacar un número par", B="sacar un número mayor que 3" y C="sacar un número impar".

A={2, 4, 6} B={4, 5, 6} C={1, 3, 5}

$A \cup B$ = {2, 4, 5, 6} → sacar un número par o un número mayor que 3.
$A \cap B$ = {4, 6 } → sacar un número par y un número mayor que 3.
$A - B$ = {2} → sacar un número par que no sea mayor que 3
$A \cup C$ = E → sacar un número par o un número impar, se verifica siempre, por eso es el suceso seguro.
$A \cap C$ = ϕ → sacar un número par y uno impar, no es posible, no se verifica nunca, esel suceso imposible.

2.4- Propiedades

Sea E el espacio muestral de un experimento aleatorio y sean A, B y C sucesos de dicho espacio muestral. Se verifican las siguientes propiedades:

- **Conmutativa**: $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$
- **Asociativa**: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$
  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$
- **Distributiva:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- **Complementario:** $A \cup \bar{A}$ = E
  $A \cap \bar{A}$ = ϕ
- **Leyes de Morgan**: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

3.- CONCEPTO DE PROBABILIDAD

La **probabilidad** de un suceso, indica el grado de probabilidad de que ocurra un suceso. Se escribe P(A)(probabilidad del suceso A) y cumple:

- La probabilidad de cualquier suceso está comprendida entre 0 y 1. Si P(A) está próxima a 0 el suceso es poco probable y será más probable cuánto más se acerque a 1.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- La probabilidad del suceso imposible es 0: P (ϕ) = 0
- La probabilidad del suceso seguro es 1: $P(E) = 1$

Cuando se repite un experimento aleatorio muchas veces, la frecuencia relativa con la que aparece un suceso tiende a estabilizarse hacia un valor fijo, a medida que aumentan el número de pruebas realizadas (este valor es una aproximación de la probabilidad de dicho suceso).Este resultado es conocido como **ley de los grandes números.**

3.1- Regla de Laplace

- Dos sucesos se llaman **equiprobables** cuando tienen la misma probabilidad de ocurrir al realizar un experimento aleatorio.
- Si en un espacio muestral, todos los sucesos son equiprobables, entonces la probabilidad de cualquier suceso A se puede calcular mediante la **ley de Laplace,** según la cual, basta contar el número de sucesos elementales que componen A y el número de sucesos elementales que componen E:

$$P(A) = \frac{N^o \, de \, casos \, favorables \, de \, A}{N^o \, de \, casos \, totales}$$

Ejemplo: Consideramos el experimento aleatorio “lanzar un dado”, E={1, 2, 3, 4, 5, 6} y los sucesos A=”sacar un número par”={2, 4, 6}, B=” sacar el número 2”={2}. Vamos a calcular P(A) y P(B)

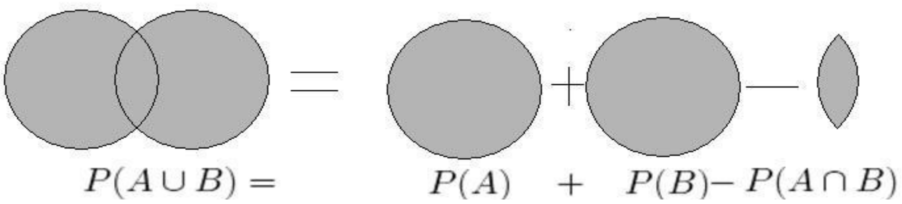
- $P(A)=\frac{N^o\, de\, casos\, favorables\, de\, A}{N^o\, de\, casos\, totales}=\frac{N^o\, de\, elementos\, de\, A}{N^o\, de\, elementos\, de\, E}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
- $P(B)=\frac{N^o\, de\, elementos\, de\, B}{N^o\, de\, elementos\, de\, E}=\frac{1}{6}$

Ejemplo: Tenemos una bolsa con cuatro bolas rojas, dos blancas y 3 verdes, todas del mismo peso y tamaño. Consideramos los sucesos R=”sacar bola roja”, B=”sacar bola blanca” y V=”sacar bola verde”

- $P(R)=\frac{4}{9}$
- $P(B)=\frac{2}{9}$
- $P(V)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

3.2- Probabilidad de la unión de sucesos

Sean A y B dos sucesos tenemos: $\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$



Si los sucesos son incompatibles ya sabemos que $A\cap B$ = ϕ y P(ϕ)=0, por ello $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)$

3.3- Probabilidad del suceso contrario

Sea A un suceso, $\overline{A}$ es el suceso contrario. Si conocemos $P(A)$ entonces también conocemos $P(\overline{A})$:

$\boxed{P(\overline{A})=1-P(A)}$

Ejemplo: Consideramos el suceso aleatorio “lanzar un dado” y los sucesos A=”sacar un número >3” y B=”sacar un número par”

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \quad P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \quad P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \quad P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{2}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

3.4- Sucesos independientes

Sea E el espacio muestral de un experimento aleatorio y A, B dos sucesos de E, decimos que los sucesos A y B son:

- **Independientes** si se verifica que $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$. Es decir, cuando la realización del segundo no está condicionada por la realización del primero.
- **Dependientes** si la realización del segundo está condicionada por la realización del primero. Se representa B/A

Ejemplo: En el ejemplo anterior del dado

$$P(A\cap B)=\frac{1}{3}$$

$$P(A)=\frac{1}{2}$$

$$P(B)=\frac{1}{2}$$

$P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{3}=P(A\cap B)$ $\rightarrow$ A y B no son independientes

3.5- Probabilidad condicionada

La probabilidad de un suceso A puede verse modificada si ha ocurrido previamente otro suceso B. Para medir la influencia entre esos sucesos, se define la **probabilidad de A condicionada por B**, se denota por $P(A/B)$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad \text{y} \quad P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

Si A y B son sucesos independientes : $P(A/B)=P(A)$

Ejemplo: Consideramos el suceso aleatorio “lanzar un dado” y los sucesos A=”sacar un número >3” y B=”sacar un número par”. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número mayor que 3 sabiendo que ha salido un número par?

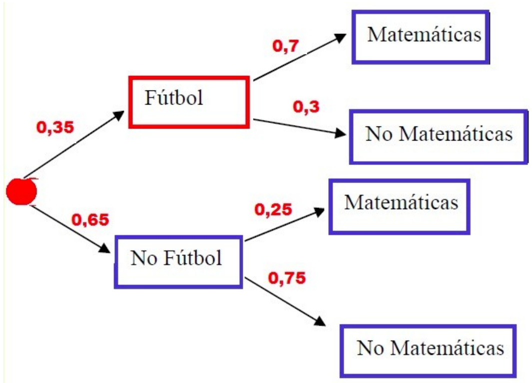
$$P(B)=\frac{1}{2} \qquad P(A\cap B)=\frac{1}{3}$$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

3.6- Diagramas de árbol

Cuando realizamos experimentos encadenados, es útil el diagrama de árbol.

Ejemplo: El 35 % de los estudiantes de un centro docente practica el fútbol. El 70 % de los que practican el fútbol estudia Matemáticas, así como el 25 % de los que no practican el fútbol. Elaboramos el diagrama de árbol.



Indica la probabilidad de jugar al futbol y la probabilidad de estudiar matemática:

$$P(F)=0{,}35$$
$$P(M)=P(M/F)\cdot P(F)+P(M/\bar{F})\cdot P(\bar{F})=0{,}7\cdot 0{,}35+0{,}25\cdot 0{,}65=0{,}407$$