

IES MENDIÑO

NOMBRE:.....

El examen consta de 4 preguntas de respuesta obligatoria: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados. Se valorará presentación, resolución, simplificación y justificación de todos los pasos.

PREGUNTA 1. Estadística y probabilidad. (2 puntos)

La caída de los tipos de interés en el segundo semestre de 2024 permitió a las familias ahorrar alrededor de 200 euros al mes en comparación con lo que venían pagando por sus hipotecas y préstamos. Este ahorro equivalía a más de 2000 euros anuales. Ante este escenario, los bancos ofrecieron condiciones más atractivas para captar clientes, lo que generó una fuerte competencia entre las entidades. Una de ellas lanzó los siguientes productos: Préstamo 24 Horas, Préstamo Auto y Préstamo Estudia. Cada cliente podía contratar, como máximo, uno de ellos.

La política de la empresa determinó que el reparto final de los préstamos concedidos fuera el siguiente: un 45% correspondió a Préstamos 24 Horas, un 40% a Préstamos Auto y un 15% a Préstamos Estudia. Además, se analizó el porcentaje de impago en estos productos, que fue del 20% en Préstamos 24 Horas, del 30% en Préstamos Auto y del 25% en Préstamos Estudia. Basándose en el contexto anterior, responda estos cuatro apartados:

- a) Seleccionado un préstamo al azar, calcule la probabilidad de que no se haya pagado.
- b) Sabiendo que no se pagó un préstamo, calcule la probabilidad de que sea un Préstamo Auto.
- c) Si se pagó el préstamo, calcule la probabilidad de que sea un Préstamo Estudia.
- d) Según los datos proporcionados por el enunciado, indique dos sucesos relacionados con este problema que sean incompatibles. Justifique la respuesta.

[Modelo Aragón 25-26]

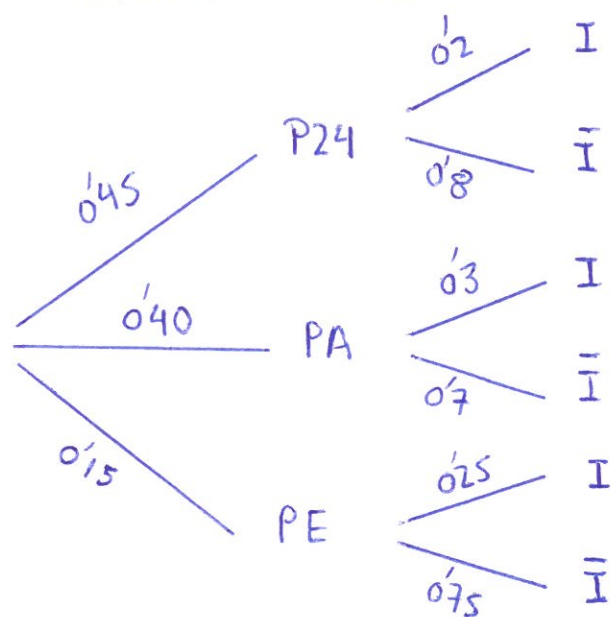
Sean los sucesos:

P24 = "Préstamo 24 Horas"

PA = "Préstamo Auto"

PE = "Préstamo Estudia"

e I = "Impago del producto"



$$a) P(I) = P(P24) \cdot P(I/P24) + P(PA) \cdot P(I/PA) + P(PE) \cdot P(I/PE)$$
$$0.45 \cdot 0.2 + 0.40 \cdot 0.3 + 0.15 \cdot 0.25$$

$$P(I) = 0.2475$$

$$b) P(PA/I) = \frac{P(PA \cap I)}{P(I)} = \frac{0.4 \cdot 0.3}{0.2475} = 0.4848$$

$$c) P(PE/\bar{I}) = \frac{P(PE \cap \bar{I})}{P(\bar{I})} = \frac{0.15 \cdot 0.75}{1 - 0.2475} = 0.1495$$

d) Dos sucesos A y B son incompatibles $\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0$

Consiste en escoger un préstamo al azar y sabemos que cada cliente solo puede tener uno de los préstamos.

Los sucesos P24 y PA son incompatibles

$$P(P24 \cap PA) = 0$$

PREGUNTA 2. Álgebra. (2 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 2.1 o 2.2.

2.1. Responda:

2.1.1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Encontrar, si existe, una matriz X tal que verifique: $AB + 2CX = D$.

2.1.2. Encontrar el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ según los valores de "a".

2.2. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ my + 2z = 4 \\ 2y + mz = 4 \end{cases}$$

2.2.1. Discutir el sistema en función del parámetro real "m".

2.2.2. Resolver el sistema, si es posible, para $m = 2$.

2.1

2.1.1

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D - AB = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{adj}(C^t) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det C = 5 \Rightarrow C^{-1} = \frac{\text{adj}(C^t)}{\det C} \quad C^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

De aquí,

$$X = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -15 & 10 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2.1.2

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \det M = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 7a + a + 1 + 5a = 0$$

$a = 0$

Casos:

(1) Si $a \neq 0$ $\text{rg} M = 3$

(2) Si $a = 0$ $\text{rg} M = 2$ pues $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$

2.2

2.2.1

$$\left. \begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ my + 2z &= 4 \\ 2y + mz &= 4 \end{aligned} \right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 2 & 4 \\ 0 & 2 & m & 4 \end{array} \right)$$

A Matriz coeficientes

A^* Matriz Ampliada

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & m & 2 \\ 0 & 2 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4 = 0 \quad m = \pm 2$$

Casos:

(1) Si $m \neq \pm 2$ Sistema Compatible Determinado (Solución única)

(2) Si $m = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array} \right)$$

Sistema Incompatible
(carece de solución)

(3) Si $m = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Sistema Compatible Indeterminado (∞ soluciones)

2.2.2

$$\left. \begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2y + 2z &= 4 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= y - z = 2 - \lambda - \lambda = 2 - 2\lambda \\ y &= 2 - \lambda \\ z &= \lambda \end{aligned}$$

De aquí,

$$\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

PREGUNTA 3. Análisis. (4 puntos)

Responda dos de estos tres apartados: 3.1, 3.2, 3.3.

3.1. Sea la función $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ \text{sen}(2x) + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ continua y derivable en $x = 0$.

3.1.1. Calcular a y b .

3.1.2 Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$.

3.2. Responda:

3.2.1. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 x - 3x^2}{e^{x^2} - \cos 2x}$

3.2.2. Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x(\ln x - 1)$. Calcule, si existen, los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. [Galicia, Xuño 2020]

3.3. Responda:

3.3.1. Calcular $\int_1^2 x(\ln x - 1) dx$ [Galicia, Xuño 2020]

3.3.2. Calcular el área de la región encerrada por el eje X y la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{3} & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad [\text{Galicia, Setembro 2020}]$$

3.1

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ \text{sen} 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\leadsto f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 0 \\ 2\cos 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

3.1.1

Continuidad en $x=0$

1) $\exists f(0) \quad f(0) = b$

2) $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax + b) = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (\text{sen} 2x + 1) = 1 \end{cases}$$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

$b = 1$

Derivable en $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$$

$a = 2$

3.1.2

Ec. recta tangente en $x = -1$

$$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1)$$

$$f(-1) = 2(-1) + 1 = -1$$

$$f'(-1) = 2$$

$$y + 1 = 2(x + 1) \Rightarrow y = 2x + 1$$

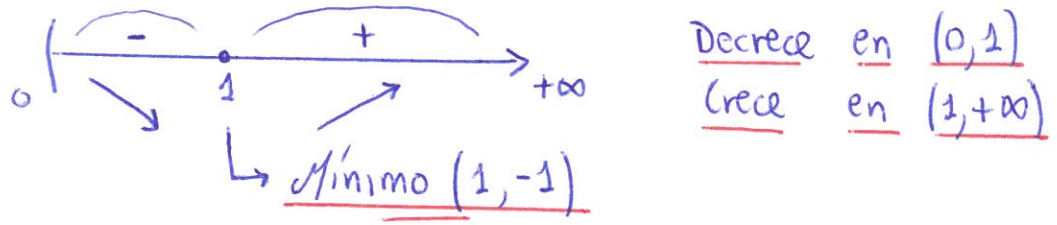
3.2

3.2.1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - 3x^2}{e^{x^2} - \cos 2x} = \frac{0}{0}$ (Ind) \sim Aplicamos Regla de L'Hopital

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{2 \sin x \cos x}^{\sin 2x} - 6x}{2x \cdot e^{x^2} + 2 \sin 2x} = \frac{0}{0}$ (Ind) $\stackrel{L'H}{\sim} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x - 6}{2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} + 4 \cos 2x} = \frac{-2}{3}$

3.2.2

$f(x) = x(\ln x - 1)$ $f'(x) = \ln x - 1 + 1 = \ln x$
 $D_f = (0, +\infty)$ $f'(x) = 0 \quad \ln x = 0 \quad x = 1$



3.3

3.3.1

$\int_1^2 x(\ln x - 1) dx$

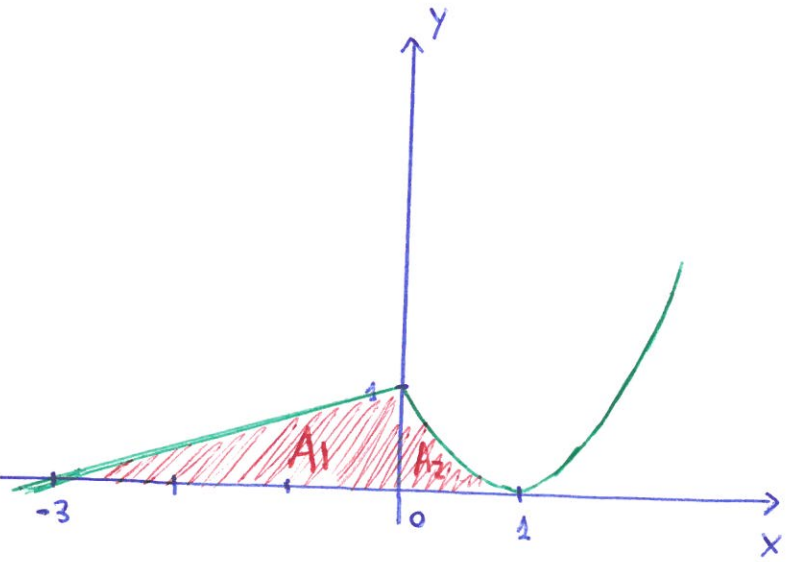
$\int x(\ln x - 1) dx = \frac{x^2}{2}(\ln x - 1) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2}(\ln x - 1) - \frac{x^2}{4} + C$

Por partes

$u = \ln x - 1 \quad // \quad du = \frac{1}{x} dx$
 $dv = x dx \quad // \quad v = \frac{x^2}{2}$

$\int_1^2 x(\ln x - 1) dx = \left[\frac{x^2}{2}(\ln x - 1) - \frac{x^2}{4} \right]_1^2$
 $= (2(\ln 2 - 1) - 1) - \left(\frac{1}{2}(-1) - \frac{1}{4} \right) =$
 $= 2\ln 2 - \frac{9}{4}$

3.3.2



$A_1 = \int_{-3}^0 \left(\frac{x+3}{3} \right) dx = \frac{1}{3} \left[\frac{(x+3)^2}{2} \right]_{-3}^0$

$A_2 = \int_0^1 (x-1)^2 dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3} \right]_0^1$

$A_T = A_1 + A_2 = \frac{11}{6} u^2$

PREGUNTA 4. Geometría. (2 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 4.1 o 4.2.

4.1. Responda:

4.1.1. Calcular el ángulo que forman dos vectores \vec{u} y \vec{v} sabiendo que $|\vec{u}| = 6$, $|\vec{v}| = 10$ y $|\vec{u} + \vec{v}| = 14$.

4.1.2. El triángulo ABC es rectángulo en A, siendo $A(3,0,-1)$, $B(6,-4,5)$, $C(5,3,z)$.

Calcúlese el valor de z y hállese el área del triángulo.

4.2. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = K + 2\lambda \end{cases}$, $s \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{-y-3}{-2} = \frac{z-1}{1}$

4.2.1. Determinar K sabiendo que ambas se cortan en un punto.

[Modelo Andalucía 2026]

4.2.2. Para $K = 0$, hallar la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s.

4.1 $|\vec{u}| = 6$
 4.1.1 $|\vec{v}| = 10$
 $|\vec{u} + \vec{v}| = 14$

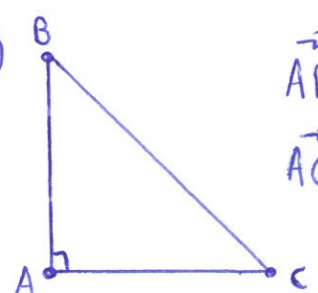
$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = |\vec{u} + \vec{v}|^2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u} + \vec{v}|^2$$

$$|\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + |\vec{v}|^2 = |\vec{u} + \vec{v}|^2 \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{1}{2}$$

$\widehat{\vec{u}, \vec{v}} = 60^\circ$

4.1.2



$$\vec{AB} = B - A = (3, -4, 6)$$

$$\vec{AC} = C - A = (2, 3, z+1)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \quad // \quad 6 - 12 + 6z + 6 = 0$$

$$\vec{AB} \perp \vec{AC} \quad \boxed{z = 0}$$

$$A = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| \quad \circ \quad A = \frac{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\|}{2}$$

1ª forma

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -22\vec{i} + 9\vec{j} + 17\vec{k}$$

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{(-22)^2 + 9^2 + 17^2} = \frac{\sqrt{854}}{2} u^2$$

2ª forma

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 6^2} = \sqrt{61} u$$

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14} u$$

$$A = \frac{\sqrt{61} \cdot \sqrt{14}}{2} = \frac{\sqrt{854}}{2} u^2$$

4.2

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = k + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow A(0, 2, k) \\ \vec{U}_r = (1, -1, 2)$$

$$s: \frac{x+2}{-1} = \frac{-y-3}{-2} = \frac{z-1}{1} \quad // \quad \frac{x+2}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow B(-2, -3, 1) \\ \vec{U}_s = (-1, 2, 1)$$

4.2.1

r y s se cortan en un punto $\Leftrightarrow [\vec{U}_r, \vec{U}_s, \vec{AB}] = 0$

$$\begin{array}{c} \vec{U}_r \\ \vec{U}_s \\ \vec{AB} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 1-k \end{vmatrix} = 2 - 2k + 10 + 2 + 8 + 5 - 1 + k = 0 \\ 26 - k = 0 \quad \boxed{k=26}$$

4.2.2

A(0, 2, 0)

$$\begin{array}{c} \vec{U}_r \\ \vec{U}_s \end{array} \begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad -5x - 3(y-2) + z = 0$$

$$-5x - 3y + z + 6 = 0 //$$