SIMULACRO 1 Fecha: Curso / Grupo: 2º Bach A

IES MENDIÑO NOMBRE: SOLUCIONES

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados. Se valorará presentación, resolución, simplificación y justificación de todos los pasos.

PREGUNTA 1. Estadística y probabilidad. (2 puntos)

1. Según los datos de la Comunidad de Madrid, en la temporada 2021-2022 la cobertura de la vacuna de la gripe entre mayores de 65 años fue de un 73.2 %. Ante una situación de brote epidémico, las autoridades deciden restringir aquellas reuniones en las que la probabilidad de que haya más de una persona no vacunada sea mayor de 0.5.

a) Suponiendo que los asistentes a una reunión suponen una muestra aleatoria, ¿se deberían restringir las reuniones de 5 personas mayores de 65 años? ¿Y las reuniones de 7 personas mayores de 65 años?

b) Se toma una muestra aleatoria de 500 personas mayores de 65 años. Calcule la probabilidad de que al menos 350 de ellos estén vacunados contra la gripe.

Nota: Para resolver algunos de los apartados anteriores pueden emplearse algunos de los siguientes valores relacionados con las tablas de la normal estándar:

$P(Z < 1'62) = 0'9474$; $P(Z \leq -1'57) = 0{,}0582$; $P(Z \leq 2{,}10) = 0{,}9821$; $P(Z \leq |1{,}67|) = 0{,}905$;

Sea X = "Nº de personas mayores de 65 años"

a) $\left.\begin{matrix} n=5 \\ p=0'268 \end{matrix}\right\} X \sim B(5; 0'268)$ $\quad P(X \geq 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$

↳ No vacunada

$$P(X\geq 2) = 1 - \left[\binom{5}{0} 0'268^0 \, 0'732^5 + \binom{5}{1} 0'268^1 \cdot 0'732^4\right]$$

$$P(X \geq 2) = 0'406 < 0'5$$

$\left.\begin{matrix} n=7 \\ p=0'268 \end{matrix}\right\} X \sim B(7; 0'268)$ $\quad P(X \geq 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$

$$P(X\geq 2) = 1 - \left[\binom{7}{0} \cdot 0'268^0 \cdot 0'732^7 + \binom{7}{1} 0'268^1 \cdot 0'732^6\right]$$

$$P(X \geq 2) = 0'5988 > 0'5$$

→ Se deberían restringir reuniones de 7 personas.

b) $\left.\begin{array}{l} n=500 \\ p=0'732 \end{array}\right\} B(500;\, 0'732)$

$np = 366 > 5$

$nq = 134 > 5$

Aproximación Binomial a Normal

$\mu = np = 366$

$\sigma = \sqrt{npq} = 9'9$

$X \sim N(366;\, 9'9)$

$P(X \geq 350) = P(X' \geq 349'5) = P\left(Z \geq \frac{349'5 - 366}{9'9}\right) = P(Z \geq -1'67)$

corrección de Yates

$= P(Z \leq 1'67) = \boxed{0'9525}$

$P(Z \leq |1'67|) = P(-1'67 \leq Z \leq 1'67) = P(Z \leq 1'67) - P(Z \leq -1'67)$

$= P(Z \leq 1'67) - [1 - P(Z \leq 1'67)] = 2P(Z \leq 1'67) - 1 = 0'905$

$P(Z \leq 1'67) = 0'9525$

PREGUNTA 2. Álgebra. (2 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 2.1 o 2.2.

2.1. Sean $a \in \Re$, $A = \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Se pide:

2.1.1. Calcular, si existen, los valores de a tales que la matriz $A \cdot A^t$ sea una matriz diagonal.

2.1.2. Calcular, si existen, los valores de a tales que $(A - B) \cdot (A + B) = A^2 - B^2$.

2.2. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 2x + ay + z &= 7 \\ x + 2y + az &= 2 \end{aligned}\right\}$$

2.2.1. Discutir el sistema en función del parámetro real "a".

2.2.2. Resolver el sistema, si es posible, para a = -1. **[Modelo Madrid 2026]**

$\boxed{2.1}$ 2.1.1.

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a & a \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a^2+4 & 2a^2-2 \\ 2a^2-2 & a^2+1 \end{pmatrix}$$

Para que $A \cdot A^t$ sea una matriz diagonal $\Rightarrow 2a^2 - 2 = 0$ $\boxed{a = \pm 1}$

2.1.2

$$(A-B)\cdot(A+B) = \cancel{A^2} - BA + AB - \cancel{B^2} = \cancel{A^2} - \cancel{B^2}$$

$$-BA + AB = 0 \quad // \quad AB = BA$$

$$\begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+2 & 4a-4 \\ a-1 & 2a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$2a+2 = 4a \rightarrow a = 1$

$4a-4 = 0 \rightarrow a = 1$

$a-1 = 0 \rightarrow a = 1$

$2a+2 = 4 \rightarrow a = 1$

$\boxed{a = 1}$

$\boxed{2.2}$

2.2.1

$$\left.\begin{array}{l} x+2y-z=2 \\ 2x+ay+z=7 \\ x+2y+az=2 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & 2 \\ 2 & a & 1 & \vdots & 7 \\ 1 & 2 & a & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^2-4+\cancel{2}+a-\cancel{2}-4a = a^2-3a-4=0$$

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2} = \frac{3\pm 5}{2} \begin{array}{l} \nearrow a=4 \\ \searrow a=-1 \end{array}$$

Casos:

1) Si $a \neq -1, 4$ Sistema Compatible determinado (Sol. única)

2) Si $a=-1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$rg\,A = 2$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & 2 \\ 2 & -1 & 1 & \vdots & 7 \\ 1 & 2 & -1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & -5 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \quad rg\,A^*=2$$

Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

3) Si $a=4$ $\quad rg\,A=2 \quad rg\,A^*=3$ S. Incompatible

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8+8+14-8-14-8 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 4+32-14-4-56+8 \neq 0$$

2.2.2

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=2 \\ -5y+3z=3 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=9-3\lambda \\ z=16-5\lambda \end{array}\right. (\lambda\in\mathbb{R}) \quad \text{o} \quad \left\{\begin{array}{l} x=3-\frac{1}{3}\mu \\ y=\mu \\ z=1+\frac{5}{3}\mu \end{array}\right. (\mu\in\mathbb{R})$$

PREGUNTA 3. Análisis. (4 puntos)

Responda dos de estos tres apartados: 3.1, 3.2, 3.3.

3.1. Sea la función derivable $f:\Re \to \Re$ definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-e^{-x}}{2x} & si \quad x<0 \\ ax+b & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

3.1.1. Calcular a y b.

3.1.2 Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = -1.

3.2. Se dispone de una placa circular de 4 m de radio, de la que se pretende obtener una pieza rectangular de área máxima. Sabiendo que el centro del rectángulo estará en el centro de la placa, calcule la longitud de los lados del rectángulo y el área del mismo. **[Modelo Aragón 2026]**

3.3. Responda:

3.3.1. Calcular $\int_0^2 e^{-x}(x-1)dx$

3.3.2. Se considera la función f(x) = $\begin{cases} \frac{30-2x}{3} & si \quad 0\leq x<3 \\ 9-(x-4)^2 & si \quad x\geq 3 \end{cases}$

Calcular el área encerrada por la función f(x) y los dos ejes de coordenadas.

$\boxed{3.1}$ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-e^{-x}}{2x} & si \quad x<0 \\ ax+b & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

3.1.1

→ Continua en $x=0$

1) $\exists f(0) \quad f(0)=b$

2) $\exists \lim_{x\to 0} f(x) \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \dfrac{e^x-e^{-x}}{2x} = \dfrac{0}{0}\ (\text{Ind}) \overset{\text{L'Hopital}}{\sim} \lim_{x\to 0^-} \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} (ax+b) = b \end{cases}$

3) $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow \boxed{b=1}$

→ Derivable en $x=0$

$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{(e^x+e^{-x})\cancel{2}x-\cancel{2}(e^x-e^{-x})}{2\cancel{4}x^2} & si \quad x<0 \\ a & si \quad x>0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = a$

$\boxed{a=0}$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{x}(x-1)+e^{-x}(x+1)}{2x^2} = \frac{0}{0}\ (\text{Ind}) \overset{L'H}{\sim} \lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{x}(e^{x}-e^{-x})}{4\cancel{x}} = 0$$

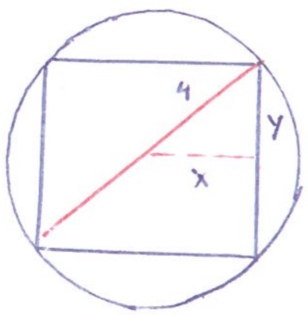
(3.1.2) Ec. recta tangente en $x=-1$ $\quad y-f(-1) = f'(-1)(x+1)$

$$f(-1) = \frac{e^{-1}-e}{-2}$$

$$f'(-1) = -e^{-1}$$

$$y - \left(\frac{e^{-1}-e}{-2}\right) = -\frac{1}{e}(x+1)$$

3.2



Condición $\quad x^2+y^2=4^2$

Función $\quad A(x,y) = 2x\cdot 2y = 4xy$

$$\left.\right\}\ A(x) = 4x\sqrt{16-x^2} \qquad 0\le x\le 4$$

$$A'(x) = 4\cdot\sqrt{16-x^2} + 4x\cdot\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{16-x^2}} = \frac{64-8x^2}{\sqrt{16-x^2}}$$

$$64-8x^2=0 \quad \begin{cases} x=-2\sqrt{2} \\ x=2\sqrt{2} \end{cases}$$

$A'(x)$: $[0,\ 2\sqrt{2})$ $+$; $(2\sqrt{2},\ 4]$ $-$; x

$2\sqrt{2}$ → máximo

Lados del rectángulo

$2x = 4\sqrt{2}\ m$

$2y = 2\sqrt{16-(2\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{2}\ m$

$$A(x,y) = (4\sqrt{2})^2 = 32\ m^2$$

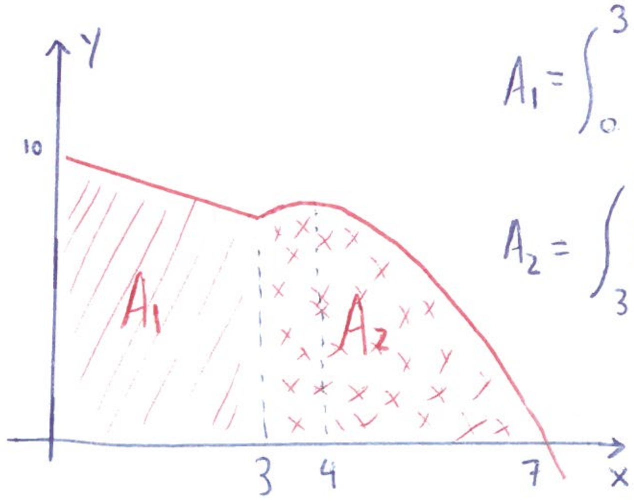
3.3

(3.3.1) $\int e^{-x}(x-1)\,dx$ (Partes) $\quad u = x-1 \quad du = dx$; $\quad dv = e^{-x}dx \quad v = -e^{-x}$

$$\int e^{-x}(x-1)\,dx = -e^{-x}(x-1) - e^{-x} =$$
$$= -xe^{-x}$$

$$\int_0^2 e^{-x}(x-1)\,dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^2 = -2e^{-2}$$

(3.3.2)



$$A_1 = \int_0^3 \frac{30-2x}{3}\,dx$$

$$A_2 = \int_3^7 \left[9-(x-4)^2\right]dx$$

$$A_T = A_1 + A_2$$

$$A_T = \frac{161}{3}\ u^2$$

PREGUNTA 4. Geometría. (2 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 4.1 o 4.2.

4.1. Responda:

4.1.1. Halla el punto Q simétrico del punto P = (2, 0,1) respecto de recta r que pasa por el punto *A = (0, 3, 2) y* es paralela a la recta s de ecuaciones $s \equiv \begin{cases} x+2y=0 \\ z=0 \end{cases}$

4.1.2. El triángulo *ABC* es rectángulo en *A*, siendo *A*(3,0,-1) , *B*(6,-4,5) , *C*(5,3,*z*) . Calcúlese el valor de *z* y hállese el área del triángulo.

4.2. Responda:

4.2.1. Se consideran el plano $\pi \equiv ax+y+z=1$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{-z-1}{-3}$ donde a es un parámetro real.

- Estudie la posición relativa de recta y plano en función de a.

- Obtenga el valor de a que hace que π y r sean perpendiculares y

- razone si r puede estar contenida en π o no.

4.2.2. Si π es el plano $-3x+y+z=1$, diga qué valor debe tomar el parámetro real b para que la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-b}{3} = \dfrac{z+1}{3}$ esté contenida en π. **[Modelo Galicia 2026]**

$\boxed{4.1}$

4.1.1

$A(0,3,2)$

$s \equiv \begin{cases} x+2y=0 \\ z=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x=-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases} \quad \vec{v}_s=(-2,1,0) \quad \Rightarrow \quad r: \begin{cases} x=0-2t \\ y=3+t \\ z=2 \end{cases}$

1) $\pi: \begin{cases} P(2,0,1) \\ \vec{v}_\pi = \vec{v}_r = (-2,1,0) \end{cases} \quad -2x+y+D=0 \quad D=4 \quad -2x+y+4=0$

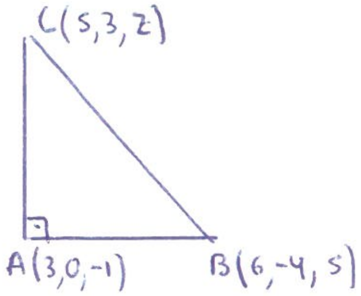
2) $r \cap \pi = M$

$-2(-2t)+(3+t)+4=0 \quad 5t+7=0 \rightsquigarrow t=-\frac{7}{5} \quad \begin{cases} x=\frac{14}{5} \\ y=3-\frac{7}{5}=\frac{8}{5} \\ z=2 \end{cases}$

$M\left(\frac{14}{5},\frac{8}{5},2\right)$

3) $\frac{P+P'}{2}=M \quad // \quad P'=2M-P \quad P'\left(\frac{18}{5},\frac{16}{5},3\right)$ //

4.1.2



$$\vec{AB} = B - A = (3,-4,6)$$
$$\vec{AC} = C - A = (2,3,z+1)$$

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 0 \Rightarrow \cancel{6} - \cancel{12} + 6z + \cancel{6} = 0 \qquad \boxed{z=0}$$

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(-22)^2+9^2+17^2}\right] = \frac{\sqrt{854}}{2}\ u^2$$

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-22, 9, 17)$$

Otra forma: $A_\Delta = \dfrac{B\cdot h}{2} \Rightarrow \dfrac{\|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{AC}\|}{2} = \dfrac{\sqrt{3^2+(-4)^2+6^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2+1^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{854}}{2}\ u$

$\boxed{4.2}$ $\quad \pi \equiv ax+y+z=1 \qquad r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{-z-1}{-3} \rightarrow \dfrac{z+1}{3}$

4.2.1 $\quad \vec{v}_\pi = (a,1,1)$

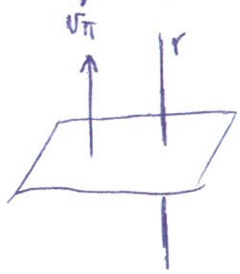
$$\begin{cases} \vec{v}_r = (2,3,3) \\ A(1,0,-1) \end{cases}$$

- $\vec{v}_\pi\cdot\vec{v}_r = (a,1,1)\cdot(2,3,3) = 2a+3+3 = 0 \rightsquigarrow \boxed{a=-3}$

Casos:

1) Si $a \neq -3$ la recta corta en un punto al plano.
2) Si $a=-3$ y $A \notin \pi$ la recta es paralela al plano.

- Para que π y r sean perpendiculares $\vec{v}_\pi \parallel \vec{v}_r$



$$\frac{a}{2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \rightsquigarrow a = 2/3$$

- $r \subset \pi \Rightarrow A \notin \pi$ pues $-3(1)+0+(-1) \neq 1$ y $a=-3$

(4.2.2) $\pi: -3x+y+z=1$ $\vec{v}_\pi = (-3,1,1)$ $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$

$A(1, b, -1)$

$\vec{v}_r = (2,3,3)$

1) $\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r = 0$ sí

2) $A \in \pi \Rightarrow -3(1) + b - 1 = 1$

$\boxed{b=5}$