UNIDAD 8: PROBABILIDAD

1. LEYES DE AZAR. EXPERIMENTOS ALEATORIOS

Un experimento se llama **aleatorio** cuando no se puede predecir el resultado. Hay una serie de características que caracterizan este tipo de experimentos:

- En las mismas condiciones iniciales, pueden dar lugar a diferentes resultados finales.
- Todos los resultados posibles se conocen por adelantado.
- En general, el experimento puede repetirse en las mismas condiciones indefinidamente.

Si realizamos un experimento, pero podemos predecir el resultado, se llama **experimento determinista.**

Ejemplos:

- Experimentos deterministas: Averiguar la hipotenusa de un triángulo rectángulo, conocidos los catetos.
- Experimento aleatorio: Resultado de lanzar una moneda o un dado, averiguar el resultado de un partido de baloncesto, antes de que se juegue.

1.1- Espacio muestral, suceso y espacio de sucesos

Dado un experimento aleatorio, se llama **espacio muestral** y se designa por E, al conjunto de todos los resultados posibles distintos de dicho experimento aleatorio.
A los elementos que forman el espacio muestral E, se les conoce como **sucesos elementales.**
Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral. Se representan con letras mayúsculas.
El **espacio de sucesos**, S, es el conjunto formado por todos los sucesos asociados a ese experimento.

Ejemplos:

- Lanzar una moneda al aire E={ +, c }, siendo + el suceso elemental "sacar cruz" y c el suceso elemental "sacar cara"
- Lanzar un dado al aire E={1, 2, 3, 4, 5, 6}
- Averiguar el resultado de un partido de baloncesto E={gana, pierde, empata}

1.2- Tipos de sucesos

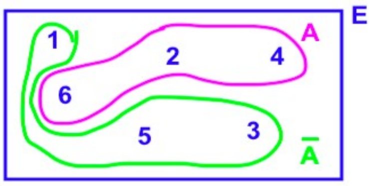
Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral. Tenemos dos tipos de sucesos:

- **Elementales**: Cada uno de los posibles resultados del espacio muestral.
- **Compuestos**: Formado por dos o más sucesos elementales.
- Suceso **imposible(ϕ)**→ No posee ningún suceso elemental.
- Suceso **seguro (E)** → Se cumple siempre.
- El **suceso contrario o complementario** de un suceso A lo denotamos por $\bar{A}$ (es el que se cumple cuando no se cumple A). $\bar{A}$ Está formado por todos los sucesos elementales de E que no están en A.

Ejemplo: Si tiramos un dado al aire el espacio muestral es E={1, 2, 3, 4, 5, 6}

- Los sucesos elementales serían: {1}, {2}, {3}, {4}, {5} y {6}
- Los sucesos compuestos podían ser: Obtener un número par {2, 4, 6}
  Obtener un número impar {1, 3, 5}
  Obtener un número mayor que 3 {4, 5, 6}
- Un suceso imposible : Obtener un 7 {ϕ}
- Un suceso seguro: Obtener un número menor o igual a 6 : {1, 2, 3, 4, 5, 6} = E

Ejemplo: Sea A el suceso "sacar número par", el suceso contrario $\bar{A}$ será "sacar número impar".
A = {2, 4, 6} y $\bar{A}$ ={1, 3, 5}

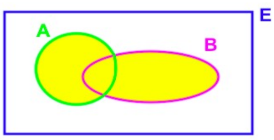


Para representar sucesos son de gran utilidad os **diagramas de Venn.**

1.3- Operaciones con sucesos

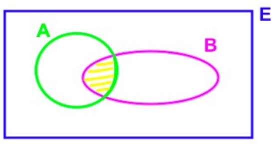
Los sucesos pueden operarse obteniendo otros sucesos nuevos.

- **Unión**: Unión de dos sucesos A y B, $A \cup B$, es el suceso que se verifica cuando lo hace A o B, o ambos.

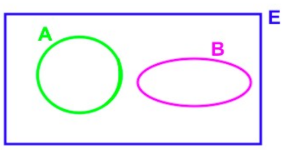


$$A \cap B=\{x \in E / x \in A \; o \; x \in B\}$$

- **Intersección:** Intersección de dos sucesos A y B, $A \cap B$, es el suceso que se verifica cuando lo hace A y B a la vez. El suceso $A \cap B$ está formado por os sucesos de A y de B.

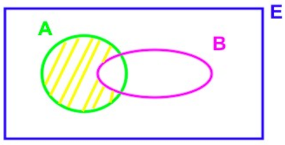


$$A \cap B=\{x \in E / x \in A \; y \; x \in B\}$$



Cuando $A \cap B$ = ϕ, se dice que el suceso A y B son **incompatibles.** En caso contrario diremos que A y B son compatibles.

- **Diferencia**: Diferencia de A y B, $A-B$, es el suceso que se verifica cuando lo hace A pero no B. Está formado por los sucesos de A que no están en B.



$$A-B=\{x\in E/x\in A \ y \, x\notin B\}$$

$$A-B=A-(A\cap B)=\bar{B}\cap A$$

Ejemplo: Consideramos el experimento aleatorio “lanzar un dado”, E={1, 2, 3, 4, 5, 6} y los sucesos A=”sacar un número par”, B=”sacar un número mayor que 3” y C=”sacar un número impar”.

A={2, 4, 6}   B={4, 5, 6}   C={1, 3, 5}

$A\cup B$ = {2, 4, 5, 6} → sacar un número par o un número mayor que 3.
$A\cap B$ = {4, 6 } → sacar un número par y un número mayor que 3.
$A-B$ = {2} → sacar un número par que no sea mayor que 3
$A\cup C$ = E → sacar un número par o un número impar, se verifica siempre, por eso es el suceso seguro.
$A\cap C$ = ϕ → sacar un número par y uno impar, no es posible, no se verifica nunca, esel suceso imposible.

1.4- Propiedades

Sea E el espacio muestral de un experimento aleatorio y sean A, B y C sucesos de dicho espacio muestral. Se verifican las siguientes propiedades:

- **Complementario**: $A\cup\bar{A}$ = E
  $A\cap\bar{A}$ = ϕ
- **Leyes de Morgan**: $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$
  $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

2.- CONCEPTO DE PROBABILIDAD

La **probabilidad** de un suceso, indica el grado de probabilidad de que ocurra un suceso.
Se escribe P(A) (probabilidad del suceso A) y cumple:

- La probabilidad de cualquier suceso está comprendida entre 0 y 1. Si P(A) está próxima a 0 el suceso es poco probable y será más probable cuánto más se acerque a 1. $0\leq P(A)\leq 1$
- La probabilidad del suceso imposible es 0: P (ϕ) = 0
- La probabilidad del suceso seguro es 1: $P(E)=1$

Cuando se repite un experimento aleatorio muchas veces, la frecuencia relativa con la que aparece un suceso tiende a estabilizarse hacia un valor fijo, a medida que aumentan el número de pruebas realizadas (este valor es una aproximación de la probabilidad de dicho suceso). Este resultado es conocido como **ley de los grandes números**.

2.1- Regla de Laplace

- Dos sucesos se llaman **equiprobables** cuando tienen la misma probabilidad de ocurrir al realizar un experimento aleatorio.
- Si en un espacio muestral, todos los sucesos son equiprobables, entonces la probabilidad de cualquier suceso A se puede calcular mediante la **ley de Laplace**, según la cual, basta contar el número de sucesos elementales que componen A y el número de sucesos elementales que componen E:

$$P(A)=\frac{N^o\ de\ casos\ favorables\ de\ A}{N^o\ de\ casos\ totales}$$

Ejemplo: Consideramos el experimento aleatorio “lanzar un dado”, E={1, 2, 3, 4, 5, 6} y los sucesos A=”sacar un número par”={2, 4, 6}, B=” sacar el número 2”={2}. Vamos a calcular P(A) y P(B)

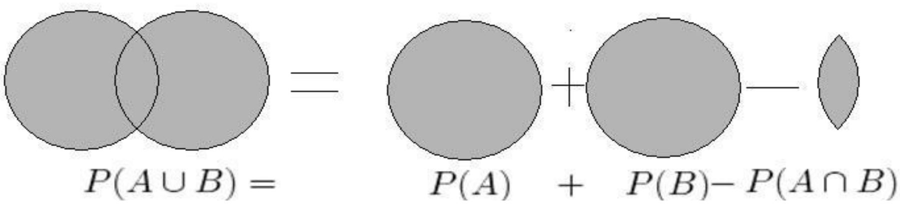
- $P(A)=\frac{N^o\ de\ casos\ favorables\ de\ A}{N^o\ de\ casos\ totales}=\frac{N^o\ de\ elementos\ de\ A}{N^o\ de\ elementos\ de\ E}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
- $P(B)=\frac{N^o\ de\ elementos\ de\ B}{N^o\ de\ elementos\ de\ E}=\frac{1}{6}$

Ejemplo: Tenemos una bolsa con cuatro bolas rojas, dos blancas y 3 verdes, todas del mismo peso y tamaño. Consideramos los sucesos R=”sacar bola roja”, B=”sacar bola blanca” y V=”sacar bola verde”

- $P(R)=\frac{4}{9}$
- $P(B)=\frac{2}{9}$
- $P(V)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$
-

2.3- Probabilidad de la unión de sucesos

Sean A y B dos sucesos tenemos: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$



Si los sucesos son incompatibles ya sabemos que $A\cap B = \phi$ y $P(\phi)=0$, por ello $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)$

2.4- Probabilidad del suceso contrario

Sea A un suceso, $\overline{A}$ es el suceso contrario. Si conocemos $P(A)$ entonces también conocemos $P(\overline{A})$:

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

Ejemplo: Consideramos el suceso aleatorio "lanzar un dado" y los sucesos A="sacar un número >3" y B="sacar un número par"

- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

- $P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{2}$

2.4- Sucesos independientes

Sea E el espacio muestral de un experimento aleatorio y A, B dos sucesos de E, decimos que los sucesos A y B son:

- **Independientes** si se verifica que $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$. Es decir, cuando la realización del segundo no está condicionada por la realización del primero.
- **Dependientes** si la realización del segundo está condicionada por la realización del primero. Se representa B/A

Ejemplo: En el ejemplo anterior del dado

$P(A\cap B)=\frac{1}{3}$

$P(A)=\frac{1}{2}$

$P(B)=\frac{1}{2}$

$P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{3}=P(A\cap B)$ $\rightarrow$ A y B no son independientes

2.5- Probabilidad condicionada

La probabilidad de un suceso A puede verse modificada si ha ocurrido previamente otro suceso B. Para medir la influencia entre esos sucesos, se define la **probabilidad de A condicionada por B**, se denota por $P(A/B)$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad \text{y} \quad P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

Si A y B son sucesos independientes : $P(A/B)=P(A)$

Ejemplo: Consideramos el suceso aleatorio “lanzar un dado” y los sucesos A=”sacar un número >3” y B=”sacar un número par”. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número mayor que 3 sabiendo que ha salido un número par?

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

$$P(A\cap B)=\frac{1}{3}$$

$$P(B)=\frac{1}{2}$$

2.6- Teorema de Bayes

El teorema de Bayes nos dice que $P(A/B)=\frac{P(B/A)\cdot P(A)}{P(B)}$

2.7- Tablas de contingencia

Cuando tenemos datos de dos características de un colectivo, con varias posibilidades para cada característica, podemos utilizar las tablas de contingencia.
Siempre se hacen las sumas parciales por filas y por columnas. Finalmente se hace la suma total que debe dar la cantidad total del colectivo.

Ejemplo: En un viaje organizado por Europa para 120 personas, 48 de los que van saben hablar inglés, 36 saben hablar francés, y 12 de ellos hablan los dos idiomas. Elaboramos la tabla de contingencia. Calcula la probabilidad de que eligiendo un viajero al azar :
a) Hable francés
b) No hable francés ni inglés
c) hable francés sabiendo que no habla inglés.

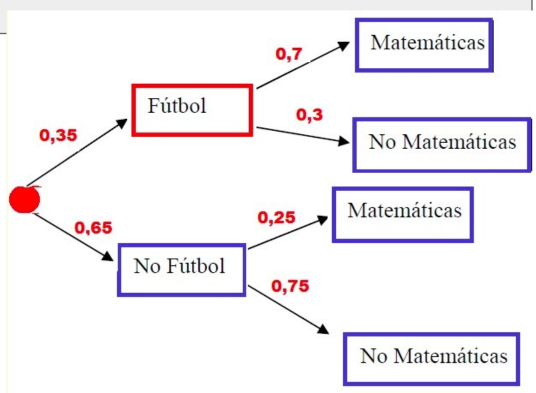
	HABLAN FRANCÉS	NO HABLAN FRANCÉS	
HABLAN INGLÉS	12	36	48
NO HABLAN INGLES	24	48	72
	36	84	120

a) $P(F)=36/120=3/10$
b) $P(\bar{F}\cap\bar{I})=48/120=2/5$
c)
$$P(F/\bar{I})=frac\,P(F\cap\bar{I})\,P(\bar{I})=frac\,24/120\;48/120=1/2$$

2.8- Diagramas de árbol

Cuando realizamos experimentos encadenados, es útil el diagrama de árbol.

Ejemplo: El 35 % de los estudiantes de



un centro docente practica el fútbol. El
70 % de los que practican el fútbol estudia Matemáticas, así como el 25 % de los que no practican el fútbol. Elaboramos el diagrama de árbol.

Indica la probabilidad de jugar al futbol y la probabilidad de estudiar matemática:

$P(F)=0,35$

$P(M)=P(M/F)\cdot P(F)+P(M/\bar{F})\cdot P(\bar{F})=0,7\cdot 0,35+0,25\cdot 0,65=0,407$