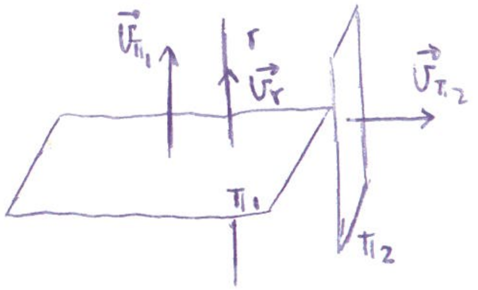
IES MENDIÑO NOMBRE:..........................................................................

Se valorará presentación, resolución, simplificación y justificación de todos los pasos.

**1.** a) Dado el plano $\pi_1$ : $3x + a\,y + z = 6$. Calcule "a" para que la recta r que pasa por el punto $P = (1,1,2)$ y es perpendicular a este plano ($\pi_1$) sea paralela al plano $\pi_2$ : $x - y = 3$.

b) Calcule el punto simétrico de $P(10, -5,5)$ con respecto al plano $\pi$: $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

a)



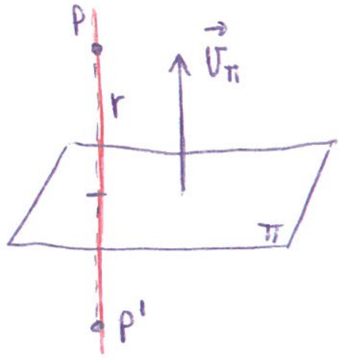

$$r \perp \pi_1 \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{v}_{\pi_1} = (3, a, 1)$$

$$r: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 1 + a\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

$$r \parallel \pi_2 \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_{\pi_2} = 0$$

$$(3, a, 1) \cdot (1, -1, 0) = 3 - a = 0 \qquad \boxed{a = 3}$$

b)




1) $$r: \begin{cases} x = 10 + 6\lambda \\ y = -5 + 3\lambda \\ z = 5 + 2\lambda \end{cases}$$

$$\vec{v}_r = \vec{v}_\pi$$

2) $r \cap \pi = M$

$$6(10 + 6\lambda) + 3(-5 + 3\lambda) + 2(5 + 2\lambda) - 6 = 0$$

$$60 + 36\lambda - 15 + 9\lambda + 10 + 4\lambda - 6 = 0 \qquad M(4, -8, 3)$$

$$49\lambda + 49 = 0 \rightsquigarrow \lambda = -1$$

3) $$M = \frac{P + P'}{2} \Rightarrow P' = 2M - P$$

$$P'(-2, -11, 1)$$

**2.** Considere las rectas de ecuaciones

$$r:\begin{cases} x+y-z+3=0 \\ -2x+z-1=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \quad x+1=\frac{-y+3}{-7}=\frac{z}{3}$$

a) Estudiar la posición relativa de las rectas.

b) Determina la ecuación implícita del plano que determinan ambas rectas.

a) $r: \begin{cases} x = t \\ y = -2+t \\ z = 1+2t \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} A(0,-2,1) \\ \vec{v}_r = (1,1,2) \end{matrix}$

$s: \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{7} = \frac{z-0}{3} \rightarrow \begin{matrix} B(-1,3,0) \\ \vec{v}_s = (1,7,3) \end{matrix}$

$\vec{v}_r \not\parallel \vec{v}_s$ pues $\frac{1}{1} \neq \frac{1}{7} \neq \frac{2}{3}$

$$[\vec{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \begin{vmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -3-7+10+1+14-15 = 0$$

r y s se cortan

b)

$$\begin{vmatrix} x-0 & y+2 & z-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$-11(x-0)-1(y+2)+6(z-1)=0$$

$$\boxed{-11x-y+6z-8=0}$$

Se valorará presentación, resolución, simplificación y justificación de todos los pasos.

## Vectores en el espacio:

**1.** Se consideran los vectores $\vec{u} = (1,-3,2)$ y $\vec{v} = (0,2,-2)$, así como el punto B(-4,6,-2)

a) Calcular los vectores perpendiculares a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de módulo $4\sqrt{3}$ .

b) Determinar los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que tiene al vector $\overrightarrow{OB}$ como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas.

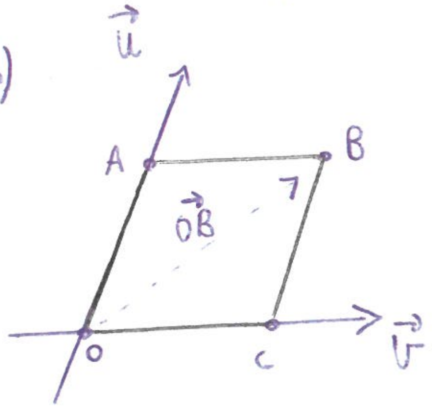
a)
$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (2,2,2)$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \qquad \frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$4\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (4,4,4)$$

$$4\sqrt{3}\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = (-4,-4,-4)$$

b)




$$\left.\begin{array}{l} \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} \\ \vec{AB} = \vec{OC} \end{array}\right] \quad \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{OC}$$

Como $\vec{OA}$ tiene dirección $\vec{u}$ $\quad \vec{OA} = \alpha\vec{u}$

Como $\vec{OC}$ tiene dirección $\vec{v}$ $\quad \vec{OC} = \beta\vec{v}$

$$\vec{OB} = (-4,6,-2)$$

$$\alpha(1,-3,2) + \beta(0,2,-2) = (-4,6,-2) \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha = -4 \\ -3\alpha + 2\beta = 6 \\ 2\alpha - 2\beta = -2 \end{array}\right. \rightsquigarrow \beta = -3$$

$$\vec{OA} = (-4,12,-8) \qquad \boxed{A(-4,12,-8)}$$

$$\vec{OC} = (0,-6,6) \qquad \boxed{C(0,-6,6)}$$

a) Otra forma

$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow (1,-3,2)(a,b,c) = a - 3b + 2c = 0 \rightsquigarrow a = c$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow (0,2,-2)(a,b,c) = 2b - 2c = 0 \rightsquigarrow b = c$

$|\vec{w}| = 4\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 4\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3c^2} = 4\sqrt{3}$

$\cancel{3}c^2 = 16 \cdot \cancel{3} \qquad c^2 = 16 \qquad c = \pm 4$

Los vectores perpendiculares a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de módulo $4\sqrt{3}$ son $(4,4,4)$ y $(-4,-4,-4)$.

**2.** a) Calcular las coordenadas de un vector $\vec{u}$ = (a,b,c) perpendicular a los vectores $\vec{v}$ = (1,2,3) y $\vec{w} = (1,-1,1)$ y tal que $[\vec{u}, 2\vec{v}, 3\vec{u}+\vec{w}]$ = 228.

b) Calcular el ángulo que forman dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabiendo que $|\vec{u}|$= 3, $|\vec{v}|$= 5 y $|\vec{u}+\vec{v}|$ = 7.

a) 1ª forma

(1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow (a,b,c)\cdot(1,2,3) = a+2b+3c=0$

(2) $\vec{u}\cdot\vec{w}=0 \Rightarrow (a,b,c)\cdot(1,-1,1) = a-b+c=0$

(3) $[\vec{u}, 2\vec{v}, 3\vec{u}+\vec{w}] = \underbrace{[\vec{u}, 2\vec{v}, 3\vec{u}]}_{0} + [\vec{u}, 2\vec{v}, \vec{w}] = 2[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 228$

$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 114$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5a+2b-3c = 114$$

$$\left.\begin{array}{l} a+2b+3c=0 \\ a-b+c=0 \\ 5a+2b-3c=114 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a=15 \\ b=6 \\ c=-9 \end{array} \qquad \vec{u}=(15,6,-9)$$

2ª forma

$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (5,2,-3)$$

cualquier vector perpendicular a $\vec{v}$ y $\vec{w}$

$\vec{u} = (5\alpha, 2\alpha, -3\alpha)$

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 114 \Rightarrow \begin{vmatrix} 5\alpha & 2\alpha & -3\alpha \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 114 \quad // \quad 38\alpha = 114 \quad \alpha = 3$$

$$\boxed{\vec{u} = (15,6,-9)}$$

b)

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v}$$
$$|\vec{u}|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2$$

Como $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$

$$7^2 = 3^2 + 2\cdot3\cdot5\cos\alpha + 5^2 \Rightarrow \cos\alpha = 0'5 \qquad \boxed{\alpha = 60^\circ}$$

**Puntos, rectas y planos en el espacio:**

**3.** Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -2+\lambda \\ z = 3-\lambda \end{cases}$ , $\quad s \equiv \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{-z+1}{-1}$

a) Estudiar su posición relativa.

b) Calcular el punto simétrico del punto P(2,1,2) respecto a la recta r.

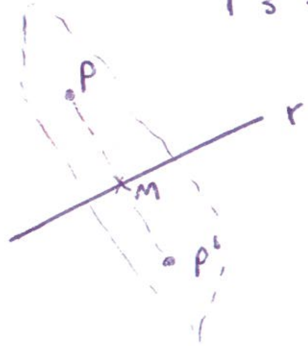
c) Hallar la recta que corta perpendicularmente a las rectas r y s.

a) $r: \begin{cases} A(1,-2,3) \\ \vec{v}_r = (1,1,-1) \end{cases}$ $\quad s \equiv \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$ $\quad s: \begin{cases} B(-1,1,1) \\ \vec{v}_s = (3,-1,1) \end{cases}$

$\vec{v}_r \nparallel \vec{v}_s$ pues $\dfrac{1}{3} \neq \dfrac{1}{-1} = \dfrac{-1}{1}$ No son paralelas ni coincidentes

$[\vec{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2+2-9+6+2-3 = -4$ Se cruzan

b)




1) $\pi: \begin{cases} P(2,1,2) \\ \vec{v}_\pi = \vec{v}_r = (1,1,-1) \end{cases} \Rightarrow x+y-z-1=0$

2) $r \cap \pi = M$

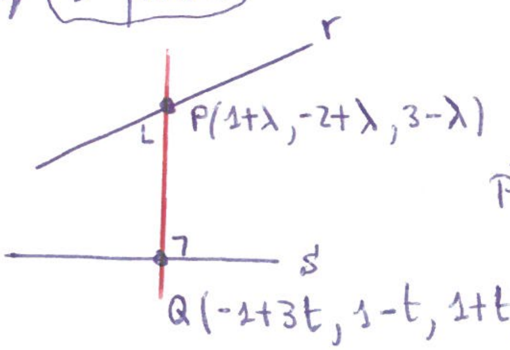
$(1+\lambda)+(-2+\lambda)-(3-\lambda)-1=0 \qquad 3\lambda-5=0 \qquad \lambda = \dfrac{5}{3}$

$M\left(1+\dfrac{5}{3}, -2+\dfrac{5}{3}, 3-\dfrac{5}{3}\right) = \left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{-1}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

3) $\dfrac{P+P'}{2} = M \Rightarrow P' = 2M - P$

$P' = 2\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{-1}{3}, \dfrac{4}{3}\right) - (2,1,2) = \boxed{\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{-5}{3}, \dfrac{2}{3}\right)}$

c) 1ª forma




$\vec{PQ} = (3t-\lambda-2, -t-\lambda+3, t+\lambda-2)$

Como corta perpendicularmente a r y s $\Rightarrow \begin{cases} \vec{PQ} \cdot \vec{v}_r = 0 \\ \vec{PQ} \cdot \vec{v}_s = 0 \end{cases}$

$$(3t-\lambda-2,\ -t-\lambda+3,\ t+\lambda-2)\cdot(1,1,-1)=0 \qquad t-3\lambda+3=0 \qquad \lambda=\frac{11}{8}$$

$$(3t-\lambda-2,\ -t-\lambda+3,\ t+\lambda-2)\cdot(3,-1,1)=0 \qquad 11t-\lambda-11=0 \qquad t=\frac{9}{8}$$

De aquí,

$$P\left(1+\frac{11}{8},\ -2+\frac{11}{8},\ 3-\frac{11}{8}\right)=\left(\frac{19}{8},\frac{-5}{8},\frac{13}{8}\right)$$

$$Q\left(-1+\frac{27}{8},\ 1-\frac{9}{8},\ 1+\frac{9}{8}\right)=\left(\frac{19}{8},\frac{-1}{8},\frac{17}{8}\right)$$

$$\vec{PQ}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\simeq(0,2,2) \qquad \begin{cases} x=\frac{19}{8} \\ y=-\frac{5}{8}+2\alpha \\ z=\frac{13}{8}+2\alpha \end{cases}$$

$$x=\frac{19}{8}$$

$$\frac{y+\frac{5}{8}}{2}=\frac{z-\frac{13}{8}}{2} \rightarrow y-z+\frac{18}{8}=0$$

2ª forma

$$\vec{v_r}\times\vec{v_s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(0,-4,-4)$$

Plano $\pi$

$$\begin{cases} A(1,-2,3) \\ \vec{v_r} \\ \vec{v_r}\times\vec{v_s} \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -4 \end{vmatrix}=-8(x-1)+4(y+2)-4(z-3)=0$$

$$-2x+2+y+2-z+3=0$$

$$2x-y+z-7=0$$

Plano $\pi'$

$$\begin{cases} B(-1,1,1) \\ \vec{v_s} \\ \vec{v_r}\times\vec{v_s} \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 \end{vmatrix}=8(x+1)+12(y-1)-12(z-1)=0$$

$$2x+2+3y-3-3z+3=0$$

$$2x+3y-3z+2=0$$

$$\boxed{\begin{matrix} 2x-y+z-7=0 \\ 2x+3y-3z+2=0 \end{matrix}}$$

**4.** a) Sean los puntos A(m,0,m), B(0,3,-3), C(1,1,1) y D (4, -1, 1). Calcula el valor de m para que los cuatro puntos estén en el mismo plano y calcula la ecuación general de ese plano.

b) Calcule el volumen del tetraedro de vértices el punto P = (3,2,6) y los puntos de corte del plano $\pi: 2x + 3y + z - 6 = 0$ con los ejes coordenados.

a) A, B, C y D están en un mismo plano $\Leftrightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = 0$ (coplanarios)

En este caso, vamos a coger B como origen $\Rightarrow [\vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BD}] = 0$

$\vec{BA} = (m, -3, m+3)$
$\vec{BC} = (1, -2, 4)$
$\vec{BD} = (4, -4, 4)$

$$\begin{vmatrix} m & -3 & m+3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{vmatrix} = -\cancel{8m} - 4m - 12 - 48 + \cancel{8m} + 36 + 16m$$
$$= 12m - 24 = 0 \qquad m = 2$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 8(x-2) + 12y + 4(z-2) = 0$$
$$2x + 3y + z - 6 = 0$$

b) $V_{tetraedro} = \frac{1}{6} \left| [\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC}] \right|$

$$A: \begin{cases} \text{eje } X \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ \pi: 2x + 3y + z - 6 = 0 \rightsquigarrow x = 3 \end{cases} \qquad A(3,0,0)$$

$$B: \begin{cases} \text{eje } Y \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ \pi: 2x + 3y + z - 6 = 0 \rightsquigarrow y = 2 \end{cases} \qquad B(0,2,0)$$

$$C: \begin{cases} \text{eje } Z \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \pi: 2x + 3y + z - 6 = 0 \rightsquigarrow z = 6 \end{cases} \qquad C(0,0,6)$$

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{6} \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 0 & -2 & -6 \\ -3 & 0 & -6 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{PA} \\ \vec{PB} \\ \vec{PC} \end{array} = \frac{1}{6} \left| -72 \right| = \boxed{12\,u^3}$$

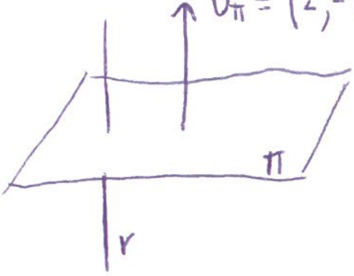
**5.** Sea el plano $\pi \equiv 2x - y + 2z - 5 = 0$ y la recta r que pasa por los puntos P(3,-4,-7) y Q(1,-3,-9).

a) Calcula el ángulo que forma la recta con el plano $\pi$.

b) Hallar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano $\pi$.

c) Calcular los puntos de la recta r que distan 9 unidades del plano $\pi$.

a)




$\vec{v}_\pi = (2,-1,2)$

$r: \begin{cases} P(3,-4,-7) \\ Q(1,-3,-9) \end{cases}$ $\quad \vec{PQ} = (-2,1,-2)$

Vemos que $r \perp \pi$ $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha = 90^\circ}$

b) En este caso, la proyección ortogonal de la recta sobre el plano $\pi$ es un punto

$r: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -4 + \lambda \\ z = -7 - 2\lambda \end{cases}$

$r \cap \pi = M$

$2(3-2\lambda) - (-4+\lambda) + 2(-7-2\lambda) - 5 = 0$

$6 - 4\lambda + 4 - \lambda - 14 - 4\lambda - 5 = 0 \quad // \quad -9\lambda - 9 = 0 \quad \lambda = -1$

$M(3+2, -4-1, -7+2)$ $\quad \boxed{M(5,-5,-5)}$

c) $d(P,\pi) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ siendo $\begin{cases} P(3-2\lambda, -4+\lambda, -7-2\lambda) \\ \pi: 2x - y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$

$d(P,\pi) = \dfrac{|-9\lambda - 9|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 9 \quad // \quad |-9\lambda - 9| = 27$

Dos casos:

$-9\lambda - 9 = 27 \quad // \quad \lambda = -4 \quad \Rightarrow \quad A(11,-8,1)$

$-9\lambda - 9 = -27 \quad // \quad \lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad B(-1,-2,-11)$

IES MENDIÑO NOMBRE:.............................................................................

Se valorará presentación, resolución, simplificación y justificación de todos los pasos. **5p cada ejercicio**

**1.** Una compañía de seguros afirma que el 70% de la población tiene contratado seguro de hogar, y tan sólo el 30% tiene contratado seguro de vida y seguro de hogar. Además, 3 de cada 5 personas de entre las que tienen contratado seguro de vida, tienen contratado seguro de hogar.

a) ¿Qué porcentaje de la población tiene contratado alguno de los seguros?

b) Justifica si son independientes o no los sucesos "tener contratado seguro de hogar" y "tener contratado seguro de vida".

c) ¿Qué probabilidad de la población tiene contratado solamente uno de los dos seguros?

Sean los sucesos $\begin{cases} SV = \text{"contrato seguro de vida"} \\ SH = \text{"contrato seguro de hogar"} \end{cases}$

Datos:

$P(SH) = 0'7$ // $P(SV \cap SH) = 0'3$ // $P(SH/SV) = \frac{3}{5} = 0'6$

a) 1ª forma

$P(SV \cup SH) = P(SV) + P(SH) - P(SV \cap SH)$

$P(SV \cup SH) = 0'5 + 0'7 - 0'3 = 0'9$ 90%

$P(SH/SV) = \dfrac{P(SV \cap SH)}{P(SV)}$

$P(SV) = \dfrac{P(SV \cap SH)}{P(SH/SV)} = 0'5$

b) Teoría:

A y B son independientes $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

En este caso, $P(SV \cap SH) \neq P(SV) \cdot P(SH)$

$0'3 \neq 0'5 \cdot 0'7$

Los sucesos SV y SH NO son independientes

c) $P(SV \cap \overline{SH}) + P(\overline{SV} \cap SH) = 0'2 + 0'4 = 0'6$

$P(SV \cap \overline{SH}) = P(SV) - P(SV \cap SH) = 0'5 - 0'3 = 0'2$

$P(\overline{SV} \cap SH) = P(SH) - P(SV \cap SH) = 0'7 - 0'3 = 0'4$

2ª forma — "Tabla de contingencia"

Sean los sucesos $\begin{cases} SV = \text{"contrato seguro de vida"} \\ SH = \text{"contrato seguro de hogar"} \end{cases}$

Datos:

$P(SH) = 0'7$ // $P(SV \cap SH) = 0'3$ // $P(SH/SV) = \frac{3}{5} = 0'6$

$$P(SH/SV) = \frac{P(SH \cap SV)}{P(SV)}$$

$P(SV) = 0'5$

| | $SV$ | $\overline{SV}$ | |
|---|---|---|---|
| $SH$ | 0'3 | 0'4 | 0'7 |
| $\overline{SH}$ | 0'2 | 0'1 | 0'3 |
| | 0'5 | 0'5 | 1 |

a) $P(SV \cup SH) = P(SV) + P(SH) - P(SV \cap SH) = 0'5 + 0'7 - 0'3 = 0'9$

90% //

b) A y B son independientes $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

En este caso, $P(S_V \cap S_H) \neq P(S_V) \cdot P(S_H)$

$0'3 \neq 0'5 \cdot 0'7$

$S_V$ y $S_H$ NO son independientes

c) $P(S_V \cap \overline{S_H}) + P(\overline{S_V} \cap S_H) = 0'2 + 0'4 = \boxed{0'6}$

**2.** La duración de un concierto musical en horas sigue una distribución normal de desviación típica 0,5 horas. El 80 % de estos conciertos dura menos de 2 horas.

a) ¿Cuál es la duración media de estos conciertos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que dure entre una hora y media y dos horas?

c) ¿Cuál debe ser la duración del concierto para que se encuentre entre el 10 % de los que más duran?

Sea $X$ = "Duración de un concierto musical (horas)" $\quad X \sim N(\mu, 0'5)$

a) $P(X < 2) = 0'8 \underset{\text{Tipificamos}}{=} P\left(Z < \frac{2-\mu}{0'5}\right) = 0'8 \qquad \frac{2-\mu}{0'5} = 0'84$

$$\boxed{\mu = 1'58\ h}$$

b) $P(1'5 \leq X \leq 2) \underset{\text{Tipificamos}}{=} P\left(\frac{1'5-1'58}{0'5} \leq Z \leq \frac{2-1'58}{0'5}\right) =$

$= P(-0'16 \leq Z \leq 0'84) = P(Z \leq 0'84) - P(Z \leq -0'16)$

$= P(Z \leq 0'84) - [1 - P(Z \leq 0'16)] = 0'7995 - [1 - 0'5636]$

$P(1'5 \leq X \leq 2) = \boxed{0'3631}$

c) $P(X \geq a) = 0'1 \underset{\text{tipificamos}}{\Rightarrow} P\left(Z \geq \frac{a-1'58}{0'5}\right) = 0'1$

$\hookrightarrow P\left(Z \leq \frac{a-1'58}{0'5}\right) = 0'9$

$\boxed{a = 2'22} \leftarrow \frac{a-1'58}{0'5} = 1'28$

La duración del concierto debe ser de 2'22h para que se encuentre entre el 10% de los que más duran

3ª Evaluación  Temas: Probabilidad y distribuciones  *Curso / Grupo: 2º Bach A*

IES MENDIÑO  *NOMBRE:*..........................................................................

Se valorará presentación, resolución, simplificación y justificación de todos los pasos.

**Probabilidad:**

**1.** a) Sean $A$ y $B$ dos sucesos de un mismo espacio muestral.

Calcula $P(A)$ si $P(B) = 0.8$, $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.8$ y $P(A \cup B)$ es el triple de $P(A)$

b) En un experimento aleatorio, sean $A$ y $B$ dos sucesos independientes con $P(\bar{A}) = 0,4$; $P(B) = 0,7$.

Calcular: 1) $P(\bar{A} \cup B)$ , 2) $P(A - \bar{B})$ y 3) $P(\bar{B}/\bar{A} \cup B)$.

a) $P(B) = 0'8$

$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0'8 \quad // \quad P(\overline{A \cap B}) = 0'8 \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = 0'2$

$P(A \cup B) = 3P(A)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad // \quad 3P(A) = P(A) + 0'8 - 0'2$

$\boxed{P(A) = 0'3}$

b) Si $A$ y $B$ son independientes $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(\bar{A}) = 0'4 \quad // \quad P(A) = 0'6$
$P(B) = 0'7$
$\Big\} \quad P(A \cap B) = 0'6 \cdot 0'7 = 0'42$

1) $P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) + P(B) - [P(B) - P(A \cap B)]$

$P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(A \cap B) = 0'4 + 0'42 = \boxed{0'82}$

2) $P(A - \bar{B}) = P(A \cap \bar{\bar{B}}) = P(A \cap B) = \boxed{0'42}$

3) $P\left(\bar{B}/_{\bar{A} \cup B}\right) = \dfrac{P(\bar{B} \cap (\bar{A} \cup B))}{P(\bar{A} \cup B)} = \dfrac{P((\bar{B} \cap \bar{A}) \cup \underbrace{(\bar{B} \cap B)}_{\emptyset})}{P(\bar{A} \cup B)} = \dfrac{P(\bar{B} \cap \bar{A})}{P(\bar{A} \cup B)}$

$= \dfrac{P(\overline{A \cup B})}{P(\bar{A} \cup B)} = \dfrac{1 - P(A \cup B)}{P(\bar{A} \cup B)} = \dfrac{0'12}{0'82} = \boxed{0'1463}$

**2.** La selección española competirá en la Copa Mundial de Fútbol 2026. En los dos primeros partidos de la fase de grupos, que consta de tres partidos, la probabilidad de ganar cada uno de ellos es del 80 %. Sin embargo, debido al aumento en la moral de los jugadores, si ganan los dos primeros partidos la probabilidad de ganar el tercero asciende al 90 %. En caso contrario, la probabilidad de ganar el tercer partido se mantendrá en el 80 %.

a) Determinar la probabilidad de que la selección española no gane ningún partido durante la fase de grupos.

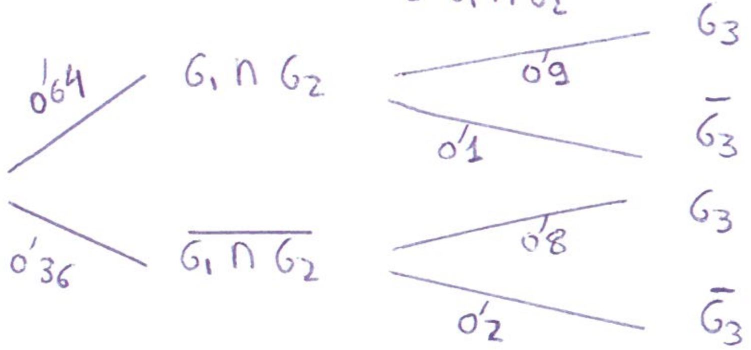
b) Calcular la probabilidad de que la selección gane el tercer partido de la fase de grupos.

c) Si sabemos que la selección ha ganado el tercer partido, determinar la probabilidad de que no haya ganado alguno de los dos encuentros anteriores.

Sean los sucesos $G_1$ = "Ganar el primer partido"
$G_2$ = "Ganar el segundo partido" en la fase de grupos
$G_3$ = "Ganar el tercer partido"

a) $P(\bar{G}_1 \cap \bar{G}_2 \cap \bar{G}_3) = 0'2^3 = \boxed{0'008}$

b) Diagrama en árbol $\begin{cases} G_1 \cap G_2 = \text{"Ganar los dos primeros partidos"} \\ \overline{G_1 \cap G_2} \end{cases}$




$$P(G_3) = P(G_1 \cap G_2) \cdot P(G_3 / G_1 \cap G_2) + P(\overline{G_1 \cap G_2}) \cdot P(G_3 / \overline{G_1 \cap G_2})$$

$$P(G_3) = 0'64 \cdot 0'9 + 0'36 \cdot 0'8 = \boxed{0'864}$$

c) $$P(\overline{G_1 \cap G_2} / G_3) = \frac{P(\overline{G_1 \cap G_2} \cap G_3)}{P(G_3)} = \frac{0'36 \cdot 0'8}{0'864} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

## Distribuciones:

**3.** Una envasadora de aceitunas comercializa bolsas con 12 aceitunas. La cosecha de este año ha sido atacada por el hongo Sphaeropsis dalmática y una de cada veinte aceitunas presenta la enfermedad escudete.

a) Calcular la probabilidad de que una bolsa no tenga aceitunas con la enfermedad.

b) Los controles sanitarios han fallado y se han distribuido 100 bolsas de aceitunas de esta cosecha. Calcular la probabilidad de que a lo sumo el 40 % de las bolsas distribuidas tenga alguna aceituna con escudete. **[Modelo Madrid 25-26]**

**Nota:** Para resolver algunos de los apartados anteriores pueden emplearse algunos de los siguientes valores relacionados con las tablas de la normal estándar:

$P(Z \leq |-1{,}96|) = 0{,}95$ ; $P(Z \geq -1{,}90) = 0{,}9713$ ; $P(Z \leq -1{,}29) = 0{,}0985$ ; $P(Z \geq |0{,}9|) = 0{,}3682$ ; $P(Z \geq 1{,}10) = 0{,}1357$ ; $P(Z \leq 2{,}10) = 0{,}9821$ ; $P(Z > 2{,}90) = 0{,}0019$ .

Sea $X$ = "Nº de aceitunas de entre las 12 conforman una bolsa que no tiene la enfermedad"

a)
$$\left.\begin{array}{l} n = 12 \\ p = \frac{19}{20} = 0'95 \end{array}\right] X \sim B(12; 0'95)$$

$$P(X=12) = \binom{12}{12} 0'95^{12} \cdot 0'05^{0}$$

$$P(X=12) \simeq \boxed{0'54}$$

b) Sea $X$ = "Nº de bolsas con alguna aceituna con escudete entre las 100 bolsas empaquetadas sin control sanitario"

$p(\text{alguna aceituna con escudete}) = 1 - 0'54 = 0'46$

$X \sim B(100; 0'46)$ $\quad np = 46 > 5$ $\quad nq = 54 > 5$ Aproximación Binomial a Normal

$\mu = np = 46$

$\sigma = \sqrt{npq} = 5$

$$P(X \leq 40) = P(X' \leq 40'5) = P\left(Z \leq \frac{40'5 - 46}{5}\right) =$$

corrección Yates

$$= P(Z \leq -1'10) = P(Z \geq 1'1) = \boxed{0'1357}$$

**4.** a) En un cierto humedal, la probabilidad de que un renacuajo llegue a rana adulta es del 2%. Si se escogen al azar 2500 de esos renacuajos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 55 de ellos lleguen a ranas adultas?

b) Para conceder becas de estudio, un organismo valora los méritos presentados y asigna a cada candidato una puntuación que indica más méritos cuanto mayor es su valor. Este año, la puntuación sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20, y se toma la decisión de conceder la beca al 5% mejor del conjunto de solicitantes. ¿Qué puntuación es preciso alcanzar para obtener la beca?

**Nota:** Para resolver algunos de los apartados anteriores pueden emplearse algunos de los siguientes valores relacionados con las tablas de la normal estándar: $P(Z < 0'79) = 0,7852$; $P(Z < 0,64) = 0,7389$; $P(Z<0'71) = 0,7611$; $P(|Z| < 1,64) = 0,90$; $P(Z> 1,96) = 0,025$

a) Sea X = "Nº de renacuajos que llegan a adultas, de entre 2500"

$\left.\begin{array}{l} n=2500 \\ p=0'02 \end{array}\right\} X \sim B(2500;\, 0'02)$ $\quad np = 50 > 5$, $nq = 2450 > 5$ Aproximación Binomial a Normal

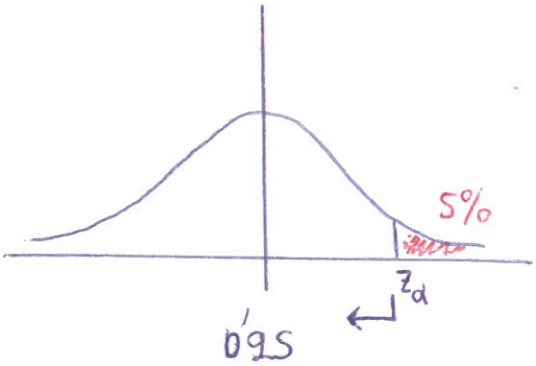
$\mu = np = 50$ $\quad \sigma = \sqrt{npq} = 7$ $\quad X' \sim N(50; 7)$

$P(X \geq 55) = P(X' \geq 54'5) = p\left(Z \geq \frac{54'5-50}{7}\right)$

Corrección Yates

$= p(Z \geq 0'64) = 1 - p(Z \leq 0'64) = 0'2611$

b)




$P(Z \leq z_\alpha) = 0'95$ $\quad X \sim N(100; 20)$

$\hookrightarrow 1'64 = \frac{X - 100}{20}$ $\quad \underline{X = 132'8}$

$P(|Z| < 1'64) = 0'90$ // $P(-1'64 \leq Z \leq 1'64) = 0'90$

$p(Z \leq 1'64) - \underbrace{p(Z \leq -1'64)}_{1 - p(Z \leq 1'64)} = 2p(Z \leq 1'64) - 1 = 0'90$

$p(Z \leq 1'64) = 0'95$

Su puntuación para obtener la beca es de 133

**5.** En el I.E.S. Mendiño se pretende medir el nivel de conocimientos en matemáticas de estudiantes de 4º ESO. Para ello se realiza un examen tipo test con 100 preguntas y en cada una de ellas debe decidirse si la afirmación es verdadera o falsa. Un estudiante decide responder al azar a todas las preguntas.

a) Calcula la probabilidad de que el estudiante obtenga, al menos, un 6 de nota.

b) Calcula la probabilidad de que el estudiante responda satisfactoriamente más del 45 % y menos del 65 % de las preguntas.

c) Supongamos que se reduce el número de preguntas del examen a 10. Calcula la probabilidad de que un estudiante que responde al azar acierte 5 preguntas y el valor esperado.

**Nota:** Para resolver algunos de los apartados anteriores pueden emplearse algunos de los siguientes valores relacionados con las tablas de la normal estándar:

$P(Z \leq |-1{,}96|) = 0{,}95$ ; $P(Z \geq -1{,}90) = 0{,}9713$ ; $P(Z \leq 0{,}5) = 0{,}6915$ ; $P(Z \geq |0{,}9|) = 0{,}3682$ ;

$P(Z \geq 1{,}10) = 0{,}1357$ ; $P(Z \leq 2{,}10) = 0{,}9821$ ; $P(Z > 2{,}90) = 0{,}0019$ .

Sea X = "Nº de aciertos en ese test de 100 preguntas"

a

$\left.\begin{array}{l} n = 100 \\ p = 0'5 \end{array}\right\} X \sim B(100; 0'5)$ $\quad np = 50 > 5$, $nq = 50 > 5$ Aproximación Binomial a Normal

$X' \sim N(50; 5)$

$P(X \geq 60) = P(X' \geq 59'5) = P\left(Z \geq \frac{59'5 - 50}{5}\right)$ $\quad \left[\begin{array}{l} \mu = np = 50 \\ \sigma = \sqrt{npq} = 5 \end{array}\right.$

Corrección de Yates

$= P(Z \geq 1'9) = 1 - P(Z \leq 1'9) = \boxed{0'0287}$

$P(Z \geq -1'9) = P(Z \leq 1'9) = 0'9713$

b) $P(45 < X < 65) = P(45 + 0'5 < X' < 65 - 0'5) = P(45'5 < X' < 64'5)$

$= P\left(\frac{45'5 - 50}{5} < Z < \frac{64'5 - 50}{5}\right) = P(-0'9 < Z < 2'9) =$

$= P(Z < 2'9) - P(Z < -0'9) = (1 - 0'0019) - (1 - 0'8159)$

$= \boxed{0'814}$ $\qquad 1 - P(Z \leq 0'9)$

c)

$n = 10$ $\qquad P(X=5) = \binom{10}{5} \cdot 0'5^5 \cdot 0'5^5 = \boxed{0'246}$

$r = 5$

$p = 0'5$ $\qquad X \sim B(10; 0'5)$

Valor esperado $\qquad E(X) = np = \boxed{5}$

Nota :

$$p(z \geq |0'9|) = 0'3682 \Rightarrow p(z \leq |0'9|) = 0'6318$$

$$p(-0'9 \leq z \leq 0'9) = p(z \leq 0'9) - p(z \leq -0'9) =$$

$$= p(z \leq 0'9) - [1 - p(z \leq 0'9)] = 2p(z \leq 0'9) - 1$$

$$2p(z \leq 0'9) - 1 = 0'6318$$

$$p(z \leq 0'9) = 0'8159$$