

IES Mendiño

NOMBRE:

Se valorará presentación, resolución, simplificación y justificación de todos los pasos.

1. a) Enuncia e interpreta geoméricamente el teorema de Bolzano.

b) ¿Existe algún valor donde la función $f(x) = e^x + 5 \ln x$ valga +2? En caso afirmativo encuentra un intervalo donde se encuentre dicho valor.

a) Teorema de Bolzano

$$\left. \begin{array}{l} 1) \text{ si } f(x) \text{ es continua en } [a, b] \\ 2) f(a) \cdot f(b) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a, b) / f(c) = 0$$

al menos
Interpretación \Rightarrow corta al eje OX

$$b) \underbrace{e^x + 5 \ln x}_{f(x)} = 2$$

Supongamos $g(x) = f(x) - 2$
 \rightarrow Continua en $(0, +\infty)$

$$\left[\begin{array}{l} g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - 2 < 0 \\ g(1) = f(1) - 2 > 0 \end{array} \right.$$

Como $g(x)$ es continua en $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) \cdot g(1) < 0$$

$$\left. \right\} \Rightarrow \exists c \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) / g(c) = 0$$

según
T. Bolzano

De aquí,

$$g(c) = f(c) - 2 = 0 // \quad f(c) = 2$$

Intervalo $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

2. a) Definición de función continua en un punto.

b) Sea la función derivable $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \ln(a+2x) & \text{si } x < 0 \\ x^2+bx-3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Calcular a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$

a) $f(x)$ es continua en " x_0 " si cumple:

- 1) $\exists f(x_0)$
- 2) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$b) f(x) = \begin{cases} \ln(a+2x) & \text{si } x < 0 \\ x^2+bx-3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Continuidad en $x=0$

$$1) \exists f(0) \parallel f(0) = -3$$

$$2) \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \begin{cases} \nearrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(a+2x) = \ln a \\ \searrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2+bx-3) = -3 \end{cases}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Rightarrow \ln a = -3 \parallel \boxed{a = e^{-3}}$$

Derivabilidad en $x=0$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{a+2x} & \text{si } x < 0 \\ 2x+b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$$

$$\frac{2}{a} = b$$

$$\boxed{b = 2e^3}$$

3. Calcular a y b sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x + a e^x - a + \operatorname{sen} x}{b x^2 + x - \operatorname{sen} x} = 1$ [Justifica la respuesta]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x + a e^x - a + \operatorname{sen} x}{b x^2 + x - \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0} \quad (\text{Ind})$$

Aplicamos L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x + x \cos x + a e^x + \cos x}{2bx + 1 - \cos x} = \frac{a+1}{0}$$

$$a+1=0$$

para que exista el límite

$$\boxed{a=-1}$$

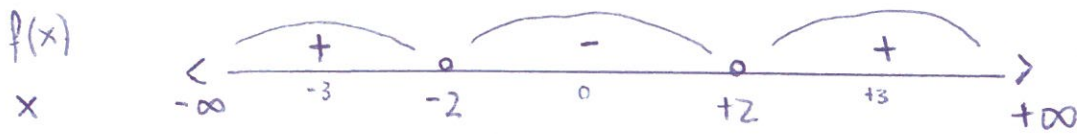
(L'H)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x + a e^x - \operatorname{sen} x}{2b + \operatorname{sen} x} = \frac{2+a}{2b} = 1 \quad \frac{1}{2b} = 1$$

$$\boxed{b = \frac{1}{2}}$$

4. Calcula el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-4}{x^2+4}\right)$

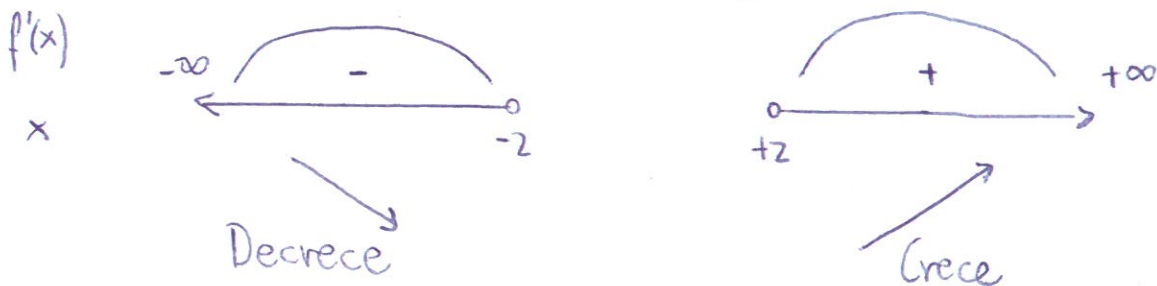
$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2-4}{x^2+4}\right) \quad \frac{x^2-4}{x^2+4} > 0 \quad x^2-4 = 0 \rightsquigarrow x = \pm 2$$



$$Df = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) //$$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x^2-4}{x^2+4}} \cdot \frac{2x(x^2+4) - (x^2-4) \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{16x}{(x^2-4)(x^2+4)}$$

$$16x = 0 \quad x = 0 \notin \text{Dom}f$$



$$\text{Crece } (2, +\infty) //$$

$$\text{Decrece } (-\infty, -2) //$$

5. Determina el valor de las constantes a, b y c sabiendo que la gráfica de la función definida por $f(x) = x(ax^2 + bx + c)$ tiene un punto de inflexión en $(-2, 12)$ y que en dicho punto la recta tangente tiene por ecuación $10x + y + 8 = 0$.

$$f(x) = x(ax^2 + bx + c)$$

Pto inflexión en $(-2, 12)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pasa por } (-2, 12) \Rightarrow f(-2) = 12 \checkmark \\ \text{PI } (-2, 12) \Rightarrow f''(-2) = 0 \checkmark \end{array} \right.$

Recta tangente en $(-2, 12)$ $10x + y + 8 = 0 \rightsquigarrow y = -10x - 8 \Rightarrow f'(-2) = -10 \checkmark$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f(-2) = 12 \rightsquigarrow -8a + 4b - 2c = 12 \quad \left\{ \begin{array}{l} 16a - 2c = 12 \\ -12a + c = -10 \end{array} \right.$$

$$f'(-2) = -10 \rightsquigarrow 12a - 4b + c = -10$$

$$f''(-2) = 0 \rightsquigarrow -12a + 2b = 0 \Rightarrow b = 6a$$

$$8a - c = 6$$

$$+ \quad -12a + c = -10$$

$$-4a = -4$$

$$\boxed{a=1}$$

$$\parallel$$

$$\boxed{b=6}$$

$$\parallel$$

$$\boxed{c=2}$$

6. Dada la función $f(x) = e^x(x^2+1)$. Calcular:

a) Ecuación de la recta tangente a la gráfica $f(x)$ en el punto de corte con el eje OY.

b) Intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión de $f(x)$.

a) Eje OY ($x=0$) $\rightarrow f(0) = e^0(0^2+1) = 1$ $(0,1)$

$$f(x) = e^x(x^2+1)$$

$$f'(x) = e^x(x^2+1) + e^x(2x) = e^x(x^2+2x+1) = e^x(x+1)^2 \quad f'(0) = 1$$

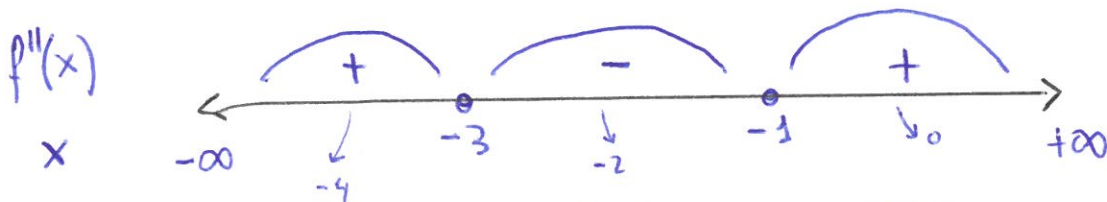
Ec. recta tangente

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \quad // \quad y - 1 = x$$

$$\boxed{y = x + 1}$$

b) $f''(x) = e^x(x+1)^2 + 2e^x(x+1) = e^x(x^2+4x+3) = e^x(x+1)(x+3)$

$$f''(x) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$



$$f''(-4) > 0 \quad f''(-2) < 0 \quad f''(0) > 0$$

Concava en $(-3, -1)$

Convexa en $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$

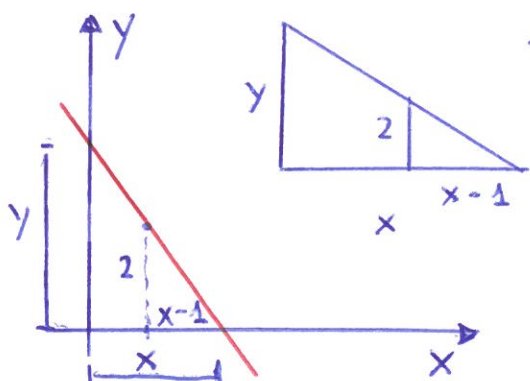
Ptos de inflexión $\begin{cases} (-3, \frac{10}{e^3}) // \\ (-1, \frac{2}{e}) // \end{cases}$

IES MENDIÑO

NOMBRE:

Se valorará presentación, resolución, simplificación y justificación de todos los pasos.

1. Hallar la pendiente de la recta que pasa por el punto A(1,2) y que corta en el primer cuadrante a los ejes de coordenadas formando un triángulo de área mínima.



T. Tales

$$\frac{y}{x} = \frac{2}{x-1} \Rightarrow y = \frac{2x}{x-1} \quad (\text{Condición})$$

$$\text{Función } A(x,y) = \frac{x \cdot y}{2} \quad \iint A(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

$$A'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \quad x^2 - 2x = 0 \quad x=2, \quad y=4$$

$$\text{Pendiente } m = -\frac{y}{x} = \boxed{-2}$$

Calcula las siguientes integrales:

$$2. \int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x - 1}} \cdot dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (\operatorname{tg} x - 1)^{-1/2} dx \quad (\text{Inmediata})$$

$$\int f' \cdot f^a dx = \frac{f^{a+1}}{a+1} + C = \frac{(\operatorname{tg} x - 1)^{-1/2 + 1}}{-1/2 + 1} + C = \boxed{2\sqrt{\operatorname{tg} x - 1} + C}$$

$$3. \int x\sqrt{x-1} dx \quad x-1 = t^2 \quad (\text{cambio de variable}) \quad x = 1+t^2 \\ dx = 2t dt$$

$$\int (1+t^2) \cdot \sqrt{t^2} \cdot 2t dt = \int (2t^2 + 2t^4) dt = \frac{2t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} + K =$$

$$= \boxed{\frac{2}{3}(\sqrt{x-1})^3 + \frac{2}{5}(\sqrt{x-1})^5 + C}$$

$$4. \int x^3 e^{x^2} dx \quad (\text{Partes})$$

$$\left. \begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = x e^{x^2} dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{x^2} \end{array} \right\} \int x^3 e^{x^2} dx = \frac{x^2}{2} e^{x^2} - \int x e^{x^2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$= \boxed{\frac{x^2 - 1}{2} \cdot e^{x^2} + C}$$

$$\boxed{\int u dv = u \cdot v - \int v du}$$

IES MENDIÑO

NOMBRE:

Se valorará presentación, resolución, simplificación y justificación de todos los pasos.

1. Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola $y = -x^2 + 3x$, su recta tangente en el punto $(3,0)$ y el eje Y.

Recta tangente

$$y - 0 = f'(3)(x - 3)$$

$$f'(3) = -2 \cdot 3 + 3 = -3$$

$$y = -3(x - 3)$$

$$y = -3x + 9$$

$$y = -x^2 + 3x \quad (\text{Parábola})$$

$$1) -1 < 0 \quad \cap \quad \text{cóncava}$$

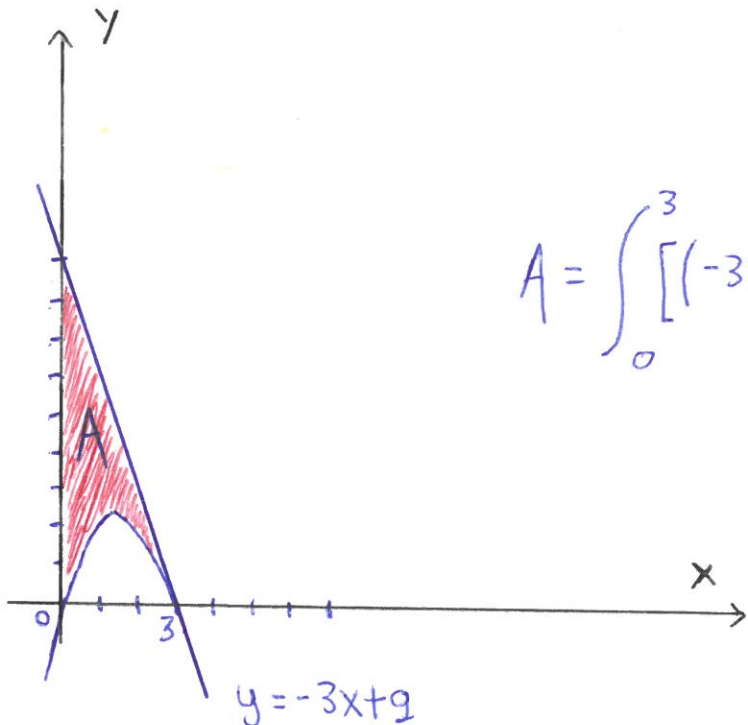
$$2) y' = -2x + 3 \quad -2x + 3 = 0 \quad x = \frac{3}{2}$$

$$V\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

3) Corte con los ejes

$$\text{eje } OX (y=0) \quad (0,0) \text{ y } (3,0)$$

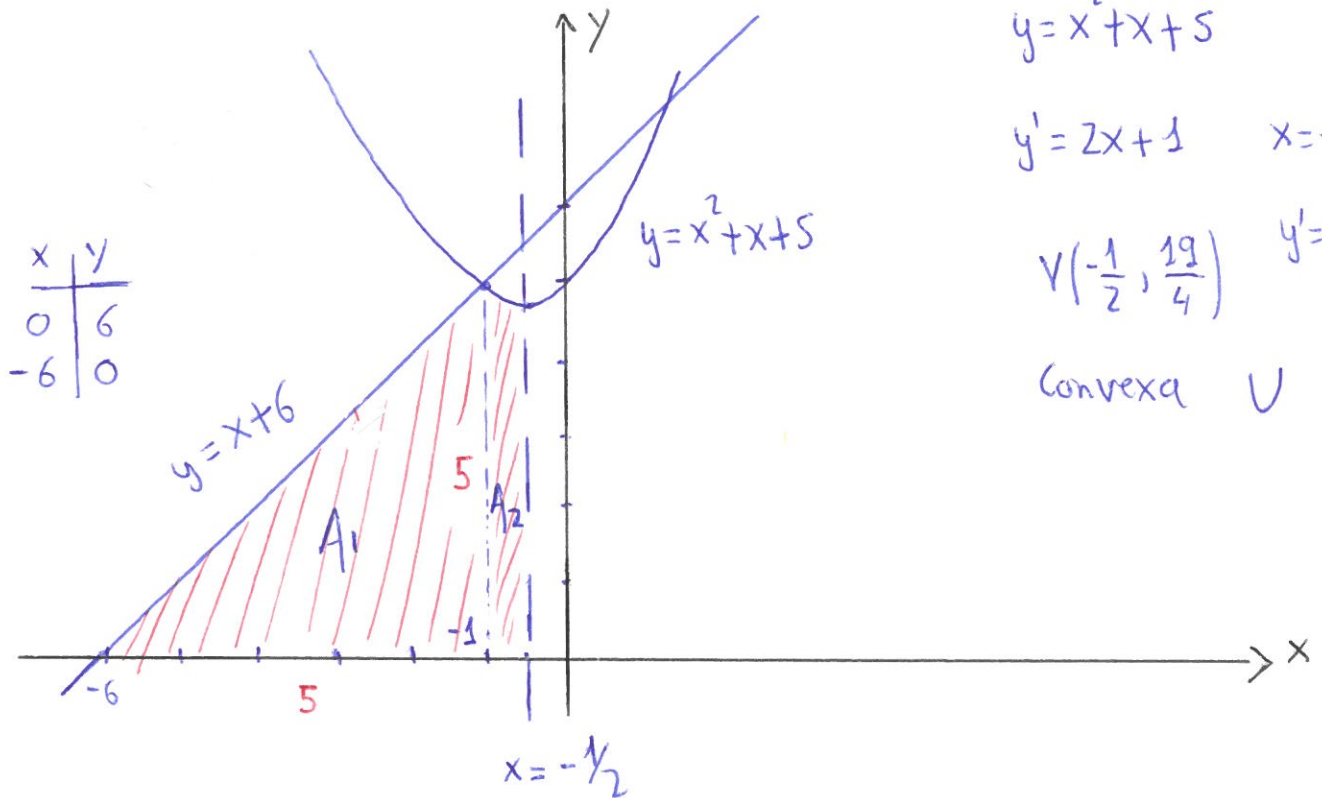
$$\text{eje } OY (x=0) \quad (0,0)$$



$$A = \int_0^3 [(-3x + 9) - (-x^2 + 3x)] dx$$

$$A = \int_0^3 (x^2 - 6x + 9) dx = \int_0^3 (x-3)^2 dx = \left[\frac{(x-3)^3}{3} \right]_0^3 = \boxed{9 \text{ u}^2}$$

2. Determine el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x + 5$, el eje OX y las rectas $x = -1/2$ e $y = x + 6$.



1ª forma

$$A_T = A_1 + A_2 = \int_{-6}^{-1} (x+6) dx + \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (x^2 + x + 5) dx = \frac{25}{2} + \frac{29}{12} = \frac{179}{12} u^2$$

2ª forma

$$A_1 = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2} u^2$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (x^2 + x + 5) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 5x \right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\frac{(-\frac{1}{2})^3}{3} + \frac{(-\frac{1}{2})^2}{2} + 5(-\frac{1}{2}) \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 5(-1) \right) \\
 &= \frac{179}{12} u^2
 \end{aligned}$$

Calcula las siguientes integrales:

3. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1 + \cos x}} \cdot dx$ [Andalucía 25/26]

Dos formas:

1] Inmediata
$$-\int \frac{f'}{f} dx = -\frac{(1 + \cos x)^{-\frac{1}{2} + 1}}{-\frac{1}{2} + 1} + C$$
$$= -2\sqrt{1 + \cos x} + C //$$

2] Cambio de variable

$$1 + \cos x = t^2$$
$$-\operatorname{sen} x dx = 2t dt$$

$$dx = \frac{2t dt}{-\operatorname{sen} x}$$

$$\int \frac{\cancel{\operatorname{sen} x}}{\sqrt{t^2}} \frac{2t}{-\cancel{\operatorname{sen} x}} dt = -2 \int dt = -2\sqrt{1 + \cos x} + C //$$

4. $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

$$1 + \sqrt{x} = t^2$$

1] $\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2t dt$

$$\hookrightarrow dx = 4t\sqrt{x} dt$$

$$\int \frac{\sqrt{t^2}}{\sqrt{x}} 4t\sqrt{x} dt = \int 4t^2 dt = \frac{4t^3}{3} + C$$

$$= \frac{4}{3} (\sqrt{1 + \sqrt{x}})^3 + C //$$

2]
$$2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} (1 + \sqrt{x})^{\frac{1}{2}} dx = 2 \frac{(1 + \sqrt{x})^{\frac{1}{2} + 1}}{\frac{1}{2} + 1} + C$$

$$= \frac{4}{3} (\sqrt{1 + \sqrt{x}})^3 + C //$$

5. De una función derivable $f(x)$ sabemos que pasa por el punto $(0,1)$ y que su derivada es $f'(x) = x \cdot e^{2x}$. Calcula $f(x)$. [set 2012]

$$f'(x) = x e^{2x} \Rightarrow f(x) = \int x e^{2x} dx + C$$

$$\int x e^{2x} dx = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx = x \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$$

$$\left[\begin{array}{l} u=x \rightarrow du=dx \\ dv=e^{2x} dx \rightarrow v=\frac{e^{2x}}{2} \end{array} \right]$$

Integral
por partes

Como pasa
por
 $(0,1)$

$$f(0) = 1 \quad 1 = 0 - \frac{1}{4} + C$$

$$C = \frac{5}{4}$$

$$f(x) = x \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + \frac{5}{4}$$

6. $\int \frac{x^3+3}{x^2-x} dx$

[xüño 2013]

$$\int \frac{x^3+3}{x^2-x} dx = \int \left(x+1 + \frac{x+3}{x^2-x} \right) dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x+3}{x(x-1)} dx$$

$$\begin{array}{r} x^3 \quad +3 \quad | \quad x^2-x \\ -x^3+x^2 \\ \hline x^2+3 \\ -x^2+x \\ \hline x+3 \end{array}$$

$$\frac{D}{d} = c + \frac{R}{d}$$

(Racional)
Descomposición en fracciones

$$\frac{x+3}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)}$$

$$\int \frac{x^3+3}{x^2-x} dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{-3}{x} dx + \int \frac{4}{x-1} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x - 3 \ln|x| + 4 \ln|x-1| + C$$

$$\begin{cases} x=1 & B=4 \\ x=0 & A=-3 \end{cases}$$

IES MENDIÑO

NOMBRE:

Se valorará presentación, resolución, simplificación y justificación de todos los pasos.

1. Calcula a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} + ax + b & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}(x^2 + 2) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 0$.Continuidad en $x = 0$

$$1) \exists f(0) \quad f(0) = \frac{1}{2}(0^2 + 2) = 1$$

$$2) \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{2x} + ax + b) = 1 + b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}(x^2 + 2) = 1 \end{cases}$$

$$3) b + 1 = 1 \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

Derivabilidad en $x = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 2e^{2x} + a & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \quad // \quad 2 + a = 0 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

Sol: $f(x)$ es continua y derivable en $x = 0$ si $a = -2$ y $b = 0$

2. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{e^x}$ calculando el dominio, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos.

$$f(x) = x \cdot e^{-x}$$

1) Dominio $e^x > 0$ $D_f = \mathbb{R}$

2) Puntos de corte con los ejes $\begin{cases} \text{eje OX (y=0)} & (0,0) \\ \text{eje OY (x=0)} & (0,0) \end{cases}$

3) Asíntotas

• Vertical \nexists A.V pues $D_f = \mathbb{R}$

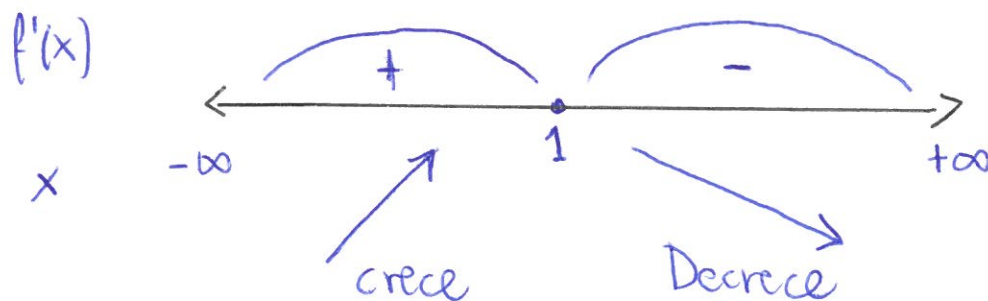
• Horizontal $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$ (Ind) $\xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ y=0

• Si hay A. Horizontal no hay A. Oblicua.

4) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1-x)$$

$$f'(x) = 0 \quad 1-x = 0 \quad x = 1 \quad \rightsquigarrow \quad (1, e^{-1})$$



$\left\{ \begin{array}{l} \text{Crece en } (-\infty, 1) \\ \text{Decrece en } (1, +\infty) \end{array} \right.$

Máximo en $(1, e^{-1})$

Representación gráfica:

