1ª Evaluación Temas: Matrices *Curso / Grupo: 2º Bach A*

IES MENDIÑO *NOMBRE:*...

Se valorará presentación, resolución, simplificación y justificación de todos los pasos.

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 2. **[C. Mancha, 2018]**

a) Hallar razonadamente dos parámetros a y b tales que $A^2 = a\cdot A + b\cdot I$.

b) Calcula todas las matrices X que verifican $(A - X)\cdot(A + X) = A^2 - X^2$.

a) $A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 = aA + bI \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} a+b=1 \\ -3a = -6 \end{cases}$

$\boxed{a=2}$

$\boxed{b=-1}$

b) $(A-X)\cdot(A+X) = A^2 - X^2$

$A^2 - XA + AX - X^2 = A^2 - X^2 \Rightarrow AX = XA$

$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$a - 3c = a$

$b - 3d = -3a + b \qquad a = d$

$c = c$

$d = -3c + d \rightsquigarrow \boxed{c=0}$

$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$

2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 - 2\lambda \\ \lambda + 1 & \lambda + 1 & -1 - \lambda \end{pmatrix}$ **[Navarra, 2023]**

a) Calcular, según los valores del parámetro real λ, el rango de A y el rango de B.

b) Calcular, según los valores del parámetro real λ, el rango de A·B.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad rg A = 3$

$B = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1-2\lambda \\ \lambda+1 & \lambda+1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$

$$\det B = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1-2\lambda \\ \lambda+1 & \lambda+1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)\cdot\lambda\cdot(-1-\lambda) + (1-2\lambda)(\lambda+1) - \lambda^2(\lambda+1) - (\lambda+1)^2(1-2\lambda) =$$

$$= (\lambda+1)\left[-\lambda - \cancel{\lambda^2} + \cancel{1} - \cancel{2\lambda} - \cancel{\lambda^2} - \lambda - \cancel{1} + \cancel{2\lambda^2} + \cancel{2\lambda}\right]$$

$\det B = (\lambda+1)\cdot(-2\lambda) \qquad \det B = 0 \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = 0 \end{cases}$

Casos:

① Si $\lambda \neq -1, 0 \qquad rg B = 3$

② Si $\lambda = -1 \qquad rg B = 2$ pues $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$

③ Si $\lambda = 0 \qquad rg B = 2$

↳ pues $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

b) 1ª Forma

$$\det(A\cdot B) = \underbrace{\det A}_{1} \cdot \det B \Rightarrow \det(A\cdot B) = \det B = (\lambda+1)(-2\lambda)$$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} -\lambda-1 & -\lambda-1 & \lambda+1 \\ \lambda^2-1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2-2\lambda+2 \\ 2\lambda+2 & \lambda^2+\lambda+2 & -2\lambda^2+\lambda-1 \end{pmatrix}$$

Casos:

① Si $\lambda \neq -1, 0 \qquad rg AB = 3$

② Si $\lambda = -1$

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$

$rg AB = 2$

③ Si $\lambda = 0$

$A\cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

$rg AB = 2$

2ª forma

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -\lambda-1 & -\lambda-1 & \lambda+1 \\ \lambda^2-1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2-2\lambda+2 \\ 2\lambda+2 & \lambda^2+\lambda+2 & -2\lambda^2+\lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A\cdot B) = \begin{vmatrix} -(\lambda+1) & -(\lambda+1) & \lambda+1 \\ \lambda^2-1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2-2\lambda+2 \\ 2\lambda+2 & \lambda^2+\lambda+2 & -2\lambda^2+\lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ \lambda^2-1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2-2\lambda+2 \\ 2\lambda+2 & \lambda^2+\lambda+2 & -2\lambda^2+\lambda-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+1)\cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2\lambda+1 & -\lambda+1 & -\lambda^2-2\lambda+2 \\ -2\lambda^2+3\lambda+1 & -\lambda^2+2\lambda+1 & -2\lambda^2+\lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\cdot \begin{vmatrix} -2\lambda+1 & -\lambda+1 \\ -2\lambda^2+3\lambda+1 & -\lambda^2+2\lambda+1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ C_1+C_3 & C_2+C_3 \end{array}$$

$$= (\lambda+1)\cdot\left[\underbrace{(-2\lambda+1)\cdot(-\lambda^2+2\lambda+1)}_{} - \underbrace{(-\lambda+1)\cdot(-2\lambda^2+3\lambda+1)}_{}\right] =$$

$$\cancel{2\lambda^3} - \cancel{4\lambda^2} - \cancel{2\lambda} - \cancel{\lambda^2} + \cancel{2\lambda} + \cancel{1} - \cancel{2\lambda^3} + \cancel{3\lambda^2} + \lambda + \cancel{2\lambda^2} - 3\lambda - \cancel{1}$$

$$= (\lambda+1)\cdot(-2\lambda)$$

Casos:

1. Si $\lambda \neq -1, 0$ $\quad rg(A\cdot B) = 3$
2. Si $\lambda = -1$ $\quad rg(A\cdot B) = 2$
3. Si $\lambda = 0$ $\quad rg(A\cdot B) = 2$

3. a) Consideremos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha & \alpha \\ 2\alpha & 3\alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Encontrar todos los valores de α para los que se verifica $B \cdot C \cdot B^{-1} = A$. **[Madrid, 2025]**

b) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^{26} y A^{2026}.

a) $B \cdot C \cdot \underbrace{B^{-1} \cdot B}_{I} = A \cdot B$ // $B \cdot C = A \cdot B$ (comprobación)

Como tenemos $B^{-1} \rightsquigarrow \exists B^{-1} \Leftrightarrow \det B \neq 0 \rightsquigarrow -\alpha^3 \neq 0$ // $\alpha \neq 0$

Se verifica para $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \qquad A^3 = I$$

$$A^{26} = \underbrace{A^3 \cdot A^3 \cdot A^3}_{I} \cdot \underbrace{A^3 \cdot A^3 \cdot A^3}_{I} \cdot A^3 \cdot A^3 \cdot A^2 = A \cdot A = \boxed{A^2}$$

$$A^{2026} = \underbrace{A^3 \cdot \overset{\text{675 veces}}{A^3 \cdot \ldots} A^3 \cdot A^3}_{I} \cdot A$$

$$\boxed{A^{2026} = I}$$

IES MENDIÑO NOMBRE:...

Se valorará presentación, resolución, simplificación y justificación de todos los pasos.

1. Sean C_1, C_2, C_3 las columnas de una matriz cuadrada M de orden 3, con det(M) = - 2. Calcula el determinante de la matriz que tiene por columnas $C_1 + 3C_2$, $2C_1$, $4C_2 + 5C_3$.

$\det M = \det(C_1, C_2, C_3) = -2$

por tener columnas proporcionales

$\det(C_1+3C_2, 2C_1, 4C_2+5C_3) = \cancel{\det(C_1, 2C_1, 4C_2+5C_3)}^{\,0} + \det(3C_2, 2C_1, 4C_2+5C_3)$

$= \cancel{\det(3C_2, 2C_1, 4C_2)}_{\,0} + \det(3C_2, 2C_1, 5C_3) = 3\cdot 2\cdot 5 \det(C_2, C_1, C_3) =$

por tener columnas proporcionales

$= -30 \det(C_1, C_2, C_3) = \boxed{+60}$

cambio de columnas

cambio de signo

2. Si A es una matriz ortogonal ($A^t = A^{-1}$). ¿Cuánto vale det(A)?

Si $A^t = A^{-1} \Rightarrow \det A^t = \det A^{-1}$ // $\det A = \dfrac{1}{\det A}$

$(\det A)^2 = 1 \rightsquigarrow \boxed{\det A = \pm 1}$

$\left\{ \begin{array}{l} \det A^t = \det A \\ \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \end{array} \right.$

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a-2 & 0 & a \\ a+1 & a & 1 \\ 0 & 2a+1 & a+5 \end{pmatrix}$.

Para $a = \frac{3}{4}$, calcula el determinante de la matriz ($2\cdot A^t\cdot A^{-1}$).

Sea $A_{3\times 3}$

$\det(2A^tA^{-1}) = 2^3 \det(A^t\cdot A^{-1}) = 8\cdot \det A^t \cdot \det A^{-1} =$

$= 8\cdot \det A \cdot \dfrac{1}{\det A} = \boxed{8}$

IES MENDIÑO NOMBRE:..

Se valorará presentación, resolución, simplificación y justificación de todos los pasos.

1. a) Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1-a & 2a \\ 3 & a+2 \end{pmatrix}$. Si a = ¾, hallar det$(2 \cdot [A^t \cdot A^{-1}]^2)$.

b) Sean A, B, C y X matrices cuadradas de orden 3 que verifican A·X·B = C^{-1}. Si se sabe que det(A) = 3, det(B) = -1 y det(C) = 6. Calcular el determinante de 2X.

a) $A = \begin{pmatrix} 1-a & 2a \\ 3 & a+2 \end{pmatrix}$

$\det(KA) = K^n \cdot \det A$

$\det\left(2\left[A^t \cdot A^{-1}\right]^2\right) = 2^2 \cdot \det\left[A^t \cdot A^{-1}\right]^2 = 4\left(\det\left(A^t \cdot A^{-1}\right)\right)^2 =$

$4 \cdot \left(\det A^t \cdot \det A^{-1}\right)^2 = 4\left(\det A \cdot \frac{1}{\det A}\right)^2 = \boxed{4}$

$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

$\begin{cases} \det A^t = \det A \\ \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \end{cases}$

b) $AXB = C^{-1} \Rightarrow \det(AXB) = \det C^{-1}$

$\det A \cdot \det X \cdot \det B = \det C^{-1}$

$3 \cdot \det X \cdot (-1) = \frac{1}{6} \rightsquigarrow \det X = -\frac{1}{18}$

$\det 2X = 2^3 \cdot \det X = -\frac{8}{18} = \boxed{-\frac{4}{9}}$

2. a) Sea M una matriz cuadrada de orden 2 con det(M) = 5 y además $M^3 + 2M + 2I = 0$, siendo I la matriz unidad de orden 2. Calcular el determinante de 3M + 3I.

b) Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden dos, cuyos elementos vienen dados por la expresión $a_{ij} = 2i - j$. Calcular el determinante de la inversa de A.

a) $M_{2\times2}$ $\quad \det(M) = 5 \quad$ ¿$\det(3M+3I)$?

$$M^3 + 2M + 2I = 0 \quad // \quad 2M + 2I = -M^3 \quad // \quad M + I = -\frac{1}{2}M^3$$

$$\det(3M+3I) = \det(3(M+I)) = 3^2 \det(M+I) = 9\det\left(-\frac{1}{2}M^3\right) =$$

$$9\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \det M^3 = \frac{9}{4}(\det M)^3 = \frac{9}{4}\cdot 125 = \boxed{\frac{1125}{4}}$$

b) $A = (a_{ij})_{2\times2}$

$a_{ij} = 2i - j$

$$\begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{12} = 0 \\ a_{21} = 3 \\ a_{22} = 2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

3. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$, calcular el valor de los siguientes determinantes

a) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \\ x/3 & y/3 & z/3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ x+2 & y+2 & z+2 \\ 3/2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \\ x/3 & y/3 & z/3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\frac{4}{3} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= +\frac{4}{3} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{4}{3} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{-\frac{16}{3}}$$

b) $$\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ x+2 & y+2 & z+2 \\ 3/2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ x & y & z \\ 3/2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{0} + \begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 2 & 2 & 2 \\ 3/2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

Dos filas proporcionales

$$= 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{-12}$$

4. El determinante de cierta matriz cuadrada A es 5, y sus respectivas columnas son C_1, C_2 y C_3.

Calcular:

a) El determinante de 3A
b) El determinante cuyas columnas son $3C_2 - 2C_3$, $4C_3$, C_1.
c) El determinante de una matriz B que verificase $B \cdot A^{-1} \cdot B^t = 5\,I$

$\det A = \det(C_1, C_2, C_3) = 5$

a) $\det(3A) = 3^3 \cdot \det A = 27 \cdot 5 = \boxed{135}$

Dos columna proporcionales

0

b) $\det(3C_2 - 2C_3, 4C_3, C_1) = \det(3C_2, 4C_3, C_1) + \det(\cancel{-2C_3, 4C_3, C_1}) =$

$= 3 \cdot 4 \det(C_2, C_3, C_1) = -12 \det(C_2, C_1, C_3) = +12 \det(C_1, C_2, C_3)$

$\det(3C_2 - 2C_3, 4C_3, C_1) = \boxed{60}$

c) $B \cdot A^{-1} \cdot B^t = 5\,I$

$a\times b \quad 3\times 3 \quad b\times a$

$b = 3 \rightsquigarrow B_{3\times 3}$

$\det(B \cdot A^{-1} \cdot B^t) = \det(5I)$

$\det B \cdot \underbrace{\det A^{-1}}_{\frac{1}{5}} \cdot \underbrace{\det B^t}_{\det B} = 5^3 \cdot \underbrace{\det I}_{1}$ // $(\det B)^2 \cdot \frac{1}{5} = 5^3$

$(\det B)^2 = 5^4$

$\boxed{\det B = \pm 25}$

Se valorará presentación, resolución, simplificación y justificación de todos los pasos.

1. Sea el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rl} ax + y + 3z &= 4 \\ x + y - 2z &= -2 \\ -x + 2y + (3+a)z &= 4+a \end{array}\right\}$.

a) Enuncia el **Teorema de Rouché**.

b) Determina, si existen, los valores de "a" para los que el sistema dado tiene solución única.

c) Determina, si existen, los valores de "a" para los que el sistema dado tiene al menos dos soluciones. Halla todas las soluciones en dichos casos.

d) ¿Existe algún valor de "a" para los que el sistema no tenga solución?

e) Resuelve el sistema por **Cramer** para a = 1. **[Sel. Andalucía 2015]**

a) Teorema de Rouché

"La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuacion con n incógnitas sea compatible (tenga solución) es $rgA = rgA^*$ siendo A matriz de coeficientes y A^* matriz ampliada."

b) Solución única → Sistema Compatible Determinado

$$\left.\begin{array}{rl} ax + y + 3z &= 4 \\ x + y - 2z &= -2 \\ -x + 2y + (3+a)z &= 4+a \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 3+a & 4+a \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3+a \end{vmatrix} = a(3+a) + 6 + 2 + 3 + 4a - (3+a) = a^2 + 6a + 8 = 0$$

$$a = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 8}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} \begin{array}{l} \nearrow a = -2 \\ \searrow a = -4 \end{array}$$

Si $a \neq -4, -2 \Rightarrow$ Solución única

c) Al menos dos soluciones ⇒ Sistema Compatible Indeterminado $\boxed{a = -2}$

d) Sistema Incompatible $\boxed{a = -4}$

$\boxed{\text{DISCUSIÓN}}$

Si $a=-4$ $\quad A=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad rg A = 2$

$A^* = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad rg A^* = 3$

Si $a=-2$ $\quad A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad rg A = 2$

$A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ $\quad rg A^* = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

c)

$\rightarrow \left.\begin{array}{l} -2x+y+3z=4 \\ x+y-2z=-2 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} -2x+y=4-3\lambda \\ -\ \ x+y=-2+2\lambda \\ \hline -3x=6-5\lambda \end{array}$ $\rightsquigarrow y=-2+2\lambda+2-\frac{5}{3}\lambda=\frac{1}{3}\lambda$

$\rightsquigarrow x=-2+\frac{5}{3}\lambda$

Sol: $\left\{\begin{array}{l} x=-2+\frac{5}{3}\lambda \\ y=\frac{1}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right. \quad (\lambda\in\mathbb{R})$

e) $\left.\begin{array}{l} x+y+3z=4 \\ x+y-2z=-2 \\ -x+2y+4z=5 \end{array}\right]$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4+6+2+3+4-4=15$

$x=\dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{15}=\dfrac{16-12-10-15+16+8}{15}$ $\quad y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix}}{15}=\dfrac{-8+15+8-6+10-16}{15}$

$x=\frac{3}{15}$ $\quad \boxed{x=\frac{1}{5}}$ $\quad y=\frac{3}{15}$ $\quad \boxed{y=\frac{1}{5}}$

$z=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{15}=\dfrac{5+8+2+4+4-5}{15}=\dfrac{18}{15}=\dfrac{6}{5}$ $\quad \boxed{z=\frac{6}{5}}$

2. a) Discute, en función de a y b, el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rrrl} x & +ay & +2z & =3 \\ x & -3y & -z & =-1 \\ -x & +8y & +4z & =b \end{array}\right\}$$

b) Resolver el sistema si a = 2 y b = 5. **[Sel. Murcia 2011]**

a) $\left.\begin{array}{l} x+ay+2z=3 \\ x-3y-z=-1 \\ -x+8y+4z=b \end{array}\right\}$ $\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{1 \quad a \quad 2}^{A} & & & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & 4 & b \end{array}\right)}_{A^*}$

1ª Forma Rouché

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -12+16+a-6+8-4a=0 \quad // \quad -3a+6=0 \qquad a=2$$

DISCUSIÓN

① Si $a \neq 2$ $\forall b$ Sistema Compatible Determinado

② Si $a=2$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rgA=2$$

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & 4 & b \end{pmatrix} \qquad \underset{c_1\ c_2}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 8 & b \end{vmatrix}} = -3b+24+2-9+8-2b=0$$

$$-5b+25=0 \rightarrow b=5$$

Dos casos:

- Si $a=2$ y $b \neq 5 \Rightarrow$ Sistema Incompatible $\left\{\begin{array}{l} rgA=2 \\ rgA^*=3 \end{array}\right.$

- Si $a=2$ y $b=5 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

$rgA=rgA^*=2$

$$\underset{c_1\ c_3}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}} = -5+12+2-3+4-10=0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \\ 8 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -10-36-16+24+8+30=$$

a)

2ª forma   Gauss

$$\left.\begin{array}{l} x+ay+2z=3\\ x-3y-z=-1\\ -x+8y+4z=b \end{array}\right\} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{1\quad a\quad 2}}^{A}} & \\ 1 & a & 2 & 3\\ 1 & -3 & -1 & -1\\ -1 & 8 & 4 & b \end{array}\right)}_{A^*}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 3\\ 1 & -3 & -1 & -1\\ -1 & 8 & 4 & b \end{array}\right) \underset{\substack{F_2-F_1\\ F_3+F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 3\\ 0 & -3-a & -3 & -4\\ 0 & 8+a & 6 & b+3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & z & y & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 3\\ 0 & -3 & -3-a & -4\\ 0 & 6 & 8+a & b+3 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\underset{F_3+2F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 3\\ 0 & -3 & -3-a & -4\\ 0 & 0 & 2-a & b-5 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} 2-a=0 \Rightarrow a=2\\ \\ b-5=0 \Rightarrow b=5 \end{array}$$

$\boxed{\text{DISCUSIÓN}}$

1. Si $a\neq 2$ $\forall b\in\mathbb{R}$ Sistema Compatible Determinado

2. • Si $a=2$ y $b\neq 5$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -5 & -4\\ 0 & 0 & 0 & b-5 \end{array}\right)$ S. Incompatible ⇝ Imposible

   • Si $a=2$ y $b=5$ $\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -5 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\\ \begin{array}{cccc} x & z & y & \end{array}\end{array}$ S. Compatible Indeterminado

b)

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+2z=3\\ -5y-3z=-4 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} (z=\lambda)\\ -5y=3z-4 \rightsquigarrow y=-\frac{3}{5}\lambda+\frac{4}{5} \end{array}$$

$$x+2\left(-\frac{3}{5}\lambda+\frac{4}{5}\right)+2\lambda=3 \longrightarrow x=\frac{7}{5}-\frac{4}{5}\lambda$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=\frac{7}{5}-\frac{4}{5}\lambda\\ y=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right. \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$